40420

TEORIA FUNCȚIILOR DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

*

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

OCTAV MAYER

TEORIA FUNCȚIILOR DE O VARIABILĂ COMPLEXĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
București 1981

Theory of Functions of a Complex Variable
Теория функций комплексной переменной

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
79717 Calea Victoriei 125, sector 1, telef. 507680, Bucureşti

Prefață

Tratatul de față, redactat de academicianul Octav Mayer în timpul vieții sale (+1966), constituie o amplă prezentare a problemelor legate de cursul de „teoria funcțiilor de o variabilă complexă", predat de autor între anii 1948 și 1960 la Facultatea de matematică a Universității „Al. I. Cuza" din Iași. Publicarea volumului reprezintă un pios omagiu adus ilustrului dispărut.

Deși specialitatea lui O. Mayer era geometria, acest tratat de teoria funcțiilor de o variabilă complexă este unul din cele mai bune și complete pe care le avem în momentul de față la noi în țară. Calitățile sale de bază sînt claritatea, rigoarea, tendința de a fi exhaustiv, cît și o mare bogăție de exemple, probleme și exerciții (care ar fi fost suficiente pentru o culegere), cea mai mare parte a lor fiind rezolvate. Ele au fost repartizate în cadrul paragrafelor corespunzătoare sau la sfîrșitul lor. Faptul că autorul era specialist în geometrie se reflectă în accentul pe care îl pune pe teoria geometrică a funcțiilor, cît și în interpretările geometrice ale diferitelor rezultate de teoria funcțiilor (cum ar fi de exemplu transformarea cercurilor în cercuri prin transformări liniare).

Față de redactarea autorului, s-au făcut un minim de modificări, dintre care unele privesc terminologia și notațiile. Ne-am îngăduit să facem acest lucru deoarece este vorba de un tratat destinat și studenților și deci este natural ca ei să întîlnească într-însul terminologia și notațiile cu care sînt familiarizați. Prin bogăția problemelor pe care le conține, poate fi un auxiliar prețios cadrelor didactice, iar din modul exhaustiv de a trata problemele poate servi drept studiu introductiv specialiștilor din acest domeniu.

Tratatul de față conține generalități asupra noțiunilor de funcție de o variabilă complexă, limită, continuitate, apoi teoria seriilor și produselor infinite (cu numeroase incursiuni în teoria funcțiilor de o variabilă reală și cu încadrarea lor în teoria mai generală a funcțiilor depinzînd de un parametru); în continuare, după introducerea noțiunii de monogenitate, se tratează pe larg transformările liniare și funcțiile elementare și, în sfîrșit, topologia planului lui Gauss. Ultimele 3 capitole se ocupă de teoria integrării, dezvoltării în serie Taylor și Laurent și de studiul singularităților, unde se pune accentul pe teoria reziduurilor și aplicațiile lor (ilustrată și prin numeroase probleme).

Cartea este prevăzută și cu numeroase figuri reprezentînd un suport intuitiv pentru urmărirea demonstrațiilor sau a rezolvării problemelor.

Am considerat util să adăugăm un indice de materii și unul de autori.

Ar mai fi de menționat că unele demonstrații, care erau numai schițate în redactarea autorului, au fost completate de noi. De asemenea, cea mai mare parte din probleme și exerciții, care se aflau în caiete separate, au fost verificate și intercalate în text, la locul considerat cel mai potrivit. Ținem să menționăm cu această ocazie că majoritatea modificărilor făcute au fost discutate cu prof. N. Negoescu, iar unele și cu prof. Al. Climescu, cărora le mulțumim și pe această cale.

Petru Caraman

Tabla de materii

Introducere 11

Cap. I. Variabila complexă. Funcţii. Limite. Continuitate. Serii şi produse infinite

Numere şi variabile complexe

1. Definiţia numerelor complexe. Expresia carteziană 13
2. Expresia trigonometrică a numerelor complexe 15
3. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe 18
4. Inegalităţi pentru moduli 19
5. Variabila complexă. Planul lui Gauss şi sfera lui Riemann 21

Exerciţii 25

Funcţii. Limite. Continuitate

6. Noţiunea de funcţie de variabile complexe (în sens larg) 26
7. Noţiunile de limită şi continuitate 29
8. Cîteva teoreme referitoare la domeniul de definiţie al funcţiei 31
9. Criteriul lui Cauchy 33
10. Limita unui şir infinit 35
11. Calculul cu limite pentru modul şi argument 37
12. Calculul cu limite pentru mai multe funcţii şi aplicaţii la continuitate 40
13. Continuitatea uniformă 42

Exerciţii 45

Convergenţa seriilor şi produselor infinite

14. Serii (generalităţi) 46
15. Operaţii cu serii 50
16. Natura unei serii 52
17. Condiţii necesare 54
18. Criterii de convergenţă sau divergenţă pentru serii simple cu termeni pozitivi 56
19. Criterii de comparaţie 60
20. Criteriul lui Kummer 66
21. Criterii de convergenţă pentru serii multiple cu termeni pozitivi 68
22. Convergenţa absolută a seriilor 71
23. Teorema lui Weierstrass 78
24. Criterii de convergenţă pentru serii oarecare 79
25. Transformarea seriilor simple 85
26. Produsul a două serii convergente 90
27. Produse infinite. (Generalităţi) 92
28. Criterii generale de convergenţă pentru produse infinite 94
29. Criterii de convergenţă pentru produse infinite simple cu factori pozitivi, supraunitari sau subunitari 97

30. Convergența absolută a produselor infinite 98
31. Criterii de convergență pentru produse oarecare 100
Exerciții 102

Convergența funcțiilor depinzînd de parametri și în special a seriilor și produselor infinite de funcții

32. Generalități 111

Cap. II. Noțiunea de funcție monogenă (olomorfă) de o variabilă și reprezentările conforme plane. Funcțiile elementare

Monogeneitate (derivabilitate)

33. Diferențiabilitate 113
34. Derivata unei funcții de o variabilă complexă 116
Exerciții 122

Reprezentarea definită de o funcție olomorfă

35. Funcția inversă 125
36. Transformarea domeniilor 127
37. Reprezentări conforme (Generalități) 129
Exerciții 132

Transformări liniare (omografice)

38. Proprietăți generale 134
39. Drepte și cercuri în planul lui Gauss. Păstrarea lor în transformările liniare.. 135
40. Puncte duble. Clasificarea transformărilor liniare 139
41. Simetrii față de drepte și cercuri 142
42. Reprezentări conforme de discuri pe discuri 145
43. Proprietăți grupale ale transformărilor liniare și antiliniare 147
Exerciții 148

Funcții elementare

44. Funcțiile z^n (n întreg), $\sqrt[n]{z}$ (n întreg > 1). Polinoame și funcții raționale.... 151
45. Funcția e^z (exponențială) 154
46. Funcția $\log z$ 157
47. Funcțiile a^z și z^α 159
48. Funcțiile circulare $\cos z$ și $\sin z$ 160
49. Funcțiile ciclometrice $\arccos z$ și $\arcsin z$ 167
50. Funcțiile circulare $\operatorname{tg} z$ și $\operatorname{ctg} z$ 169
51. Funcțiile ciclometrice $\operatorname{arc\,tg} z$ și $\operatorname{arc\,ctg} z$ 174
52. Funcțiile hiperbolice 175
Exerciții 176

Cap. III. Elemente de topologie a planului lui Gauss

53. Spații cu vecinătăți 187
54. Noțiunile topologice fundamentale (în spații $\mathcal{U}$) 189
55. Spații compacte 195
56. Topologie în spații metrizabile 196
57. Reprezentări continue și homeomorfisme 199
58. Aplicații la continuitatea funcțiilor 201
59. Distanța între mulțimi 202
60. Conexiune. Continuuri și domenii 205
61. Componente 211
62. Curbe 214
63. Poligoane și domenii poligonale în C și $\bar{C}$ 224
64. Leme de separație 229
65. Domenii determinate de curbe simple 233

66. Conexiunea domeniilor 236
67. Domenii limitate de curbe simple închise 242
68. Invarianța topologică a mulțimilor deschise (în C sau $\bar{C}$) 243
69. Mulțimi convexe 246
70. Accesibilitate 250
Exemple 253

Cap. IV. **Teoria integrării în domeniul complex**

71. Drumuri și curbe în planul complex 255
72. Integrale Stieltjes 278
73. Integrale curbilinii în planul complex 283
74. Teorema fundamentală a lui Cauchy 292
75. Integrale nedefinite 301
76. Integrala lui Cauchy 305
77. Convergența uniformă și aplicațiile ei 307
Exerciții 327

Cap. V. **Dezvoltări în serie Taylor și Laurent**

78. Serii de funcții olomorfe 333
79. Serii de puteri 339
Exerciții 361
80. Calculul cu serii de puteri 370
81. Dezvoltarea în serie tayloriană a unei funcții olomorfe 373
82. Dezvoltări tayloriene ale funcțiilor elementare 376
83. Principiul maximului modulului 398
84. Seria lui Laurent 413
85. Teoremele lui Vitali și Montel 415

Cap. VI. **Punctele singulare ale funcțiilor uniforme. Reziduuri**

86. Generalități 419
87. Poli 425
88. Puncte singulare esențiale izolate. Funcții meromorfe 427
89. Metoda reziduurilor și aplicațiile ei 433
Exerciții 478
90. Polinoame speciale și funcții generatoare 514
91. Indicatorul logaritmic 528
92. Aplicații la transformarea domeniilor prin funcții de o variabilă complexă 532
93. Principiul variației argumentului 534
94. Proprietăți topologice ale reprezentării efectuate de o funcție meromorfă 548
95. Inversa locală a unei funcții meromorfe 552
96. Reprezentarea funcțiilor meromorfe prin serii de funcții raționale 563
97. Reprezentarea funcțiilor întregi prin produse infinite (canonice) 567
98. Funcția gamma 571
99. Funcția $\Gamma_{(z)}$ 574
ANEXĂ 579
Indice de materie 583
Indice de autori 587
Contents (Theory of Functions of a Complex Variable) 589

Introducere

În expunerea de față, presupunem cunoscute, în general, rezultatele mai importante de teoria funcțiilor de variabile reale.

Dacă se știe ce este o variabilă complexă $z = x + iy$, se înțelege ce poate fi o funcție de z, $w = f(z)$. Variabila complexă w fiind funcție de variabilele reale x, y, putem scrie:

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y).$$

Faptul că numerele complexe se supun aceloraşi reguli de calcul ca numerele reale, cu excepția relațiilor de ordonare, care însă se pot aplica modulilor, permite de a se transpune în cîmpul complex noțiunea de limită şi cele de continuitate şi derivată, cu aproape toate proprietățile lor din cîmpul real. Studiul funcției $f(z)$ devine însă într-adevăr interesant cînd i se impune să admită o derivată $f'(z)$. Studiul funcțiilor cu această proprietate a fost inițiat de Cauchy. El a arătat că în acest caz funcțiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ sînt foarte specializate: ele satisfac condițiile

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(necesare, dar nu suficiente). De unde rezultă (sub rezerva existenței şi permutabilității derivatelor de ordinul 2) că u şi v sînt soluții ale ecuației lui Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

sau, cum se zice, sînt funcții armonice. Aceste funcții ocupă un capitol important în teoria funcțiilor reale. În fond, studiul funcțiilor de o variabilă complexă se reduce la acela al perechilor de funcții armonice $u(x, y)$, $v(x, y)$ conjugate (adică legate prin condițiile lui Cauchy); şi acesta era punctul de vedere al lui Riemann. Totuşi, studiul acestor funcții în cîmpul complex are mari avantaje: beneficiază de analogia cu funcțiile reale (aşa cum am indicat mai sus) şi de o reprezentare geometrică comodă.

Mai mult, funcțiile finite, continue şi derivabile, cu un cuvînt *sinectice* (Cauchy) sau *olomorfe* (Briot şi Bouquet,) sînt identice

cu funcţiile analitice, adică dezvoltabile în serii de puteri convergente (serii Taylor),

$$a_0 + a_1(z - \alpha) + \ldots + a_n(z - \alpha)^n + \ldots;$$

o funcţie olomorfă este dezvoltabilă în serie Taylor în vecinătatea oricărui punct (unde e olomorfă) şi, reciproc, o serie de puteri convergentă reprezintă o funcţie olomorfă în domeniul de convergenţă. O asemenea serie, ca element al funcţiei analitice, determină complet funcţia, toate celelalte elemente deducîndu-se din cel dat printr-un procedeu simplu, numit «de prelungire analitică» aşa cum a arătat Weierstrass. O funcţie analitică apare astfel ca un tot perfect caracterizat de fiecare element al său, spre deosebire de cîmpul real unde nu există mijlocul de a lega între ele două funcţii definite prin serii de puteri convergente. Această legătură se poate face numai trecînd prin complex. Se vede de aici că, după cum numerele complexe aduc în teoria ecuaţiilor serviciile bine cunoscute, tot aşa teoria funcţiilor de variabile complexe aduce lumină în studiul funcţiilor analitice reale, care nu poate fi înţeles bine dacă nu se consideră cîmpul real ca o parte a celui complex.

După aceste explicaţii sumare putem circumscrie mai exact obiectul acestui volum: este studiul funcţiilor de variabile complexe, care se bucură de cele trei proprietăţi mai simple şi mai importante în analiza matematică: continuitate, derivabilitate, analiticitate.

Petru Caraman

Capitolul I

Variabila complexă. Funcţii. Limite. Continuitate. Serii şi produse infinite

Numere şi variabile complexe

§1. Definiţia numerelor complexe. Expresia carteziană

Definiţia logică a numerelor complexe este analogă cu aceea a numerelor raţionale, care, după cum se ştie, constă în a defini aceste numere ca nişte perechi de numere întregi, supuse la anumite reguli de calcul şi a identifica apoi o anumită clasă de numere raţionale cu clasa numerelor întregi, de la care s-a plecat. Aici se pleacă de la clasa numerelor reale. Desigur, şi în mulţimea perechilor ordonate de numere reale, egalitatea $(a, b) = (a', b')$ are loc numai cînd $a = a'$ şi $b = b'$.

Definiţie. *Se numesc numere complexe toate perechile ordonate* (a, b) *de numere reale, care sînt supuse la următoarele legi operative:*

legea adunării:

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b'); \tag{1}$$

legea înmulţirii:

$$(a, b).\ (a', b') = (aa' - bb',\ ab' + a'b). \tag{2}$$

Să considerăm clasa numerelor complexe de forma $(a, 0)$. Sumele şi produsele lor sînt în aceeaşi clasă şi sînt date de

$$(a, 0) + (a', 0) = (a + a', 0),\ (a, 0).(a', 0) = (aa', 0).$$

Se vede de aici că, dacă la un număr complex $(a, 0)$ facem să corespundă numărul real a, atunci la suma şi produsul a două numere complexe din clasa considerată corespund respectiv suma şi produsul numerelor reale corespunzătoare acelor numere complexe. Se zice, din acest motiv, că clasa de numere $(a, 0)$ şi clasa numerelor reale sînt izomorfe. Din punct de vedere operativ — singurul care interesează pe matematician — cele două clase de numere nu se deosebesc de loc şi, prin urmare, le putem identifica scriind

$$(a, 0) = a. \tag{3}$$

În particular, $(1, 0) = 1$. Numărul $(0, 1)$ este însă de altă natură, căci el satisface, după (2), relaţia

$$(0, 1)^2 = (-1, 0) = -1,$$

pe care n-o poate verifica nici un număr real. (0, 1) e un simbol nou, simbol «imaginar», și se notează

$$(0,1) = \mathrm{i}. \tag{4}$$

Putem acuma scrie, aplicînd (1) și (2),

$$(a, b) = (a, 0) + (0, 1)\ (b, 0)$$

sau

$$(a, b) = a + \mathrm{i}b. \tag{5}$$

Aceasta este expresia carteziană a numerelor complexe. Se mai notează, fiind dat numărul $\alpha = a + \mathrm{i}b$, partea reală cu $a = \mathrm{Re}\ \alpha$, iar partea imaginară cu $b = \mathrm{Im}\ \alpha$.

Un număr complex care nu este real ($\mathrm{Im}\alpha \neq 0$) se zice *imaginar*. Un număr complex a cărui parte reală e nulă ($\mathrm{Re}\alpha = 0$) se zice *pur imaginar;* el este de forma $\mathrm{i}b$.

Regulile (1) și (2) se scriu acum:

$$(a + \mathrm{i}b) + (a' + \mathrm{i}b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b'), \tag{1'}$$

$$(a + \mathrm{i}b) \cdot (a' + \mathrm{i}b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + a'b). \tag{2'}$$

Scăderea și împărțirea se definesc ca operații inverse adunării și înmulțirii. Se constată că ele sînt univoce, cu o excepție pentru împărțire.

Scăderea

$$(a + \mathrm{i}b) - (a' + \mathrm{i}b) = a'' + \mathrm{i}b''$$

este definită prin

$$a + \mathrm{i}b = (a' + \mathrm{i}b') + (a'' + \mathrm{i}b''),$$

ceea ce înseamnă

$$a = a' + a'',\ b = b' + b'',\ \text{deci}\ a'' = a - a',\ b'' = b - b';$$

așadar,

$$(a + \mathrm{i}b) - (a' + \mathrm{i}b') = (a - a') + \mathrm{i}(b - b'). \tag{6}$$

Împărțirea

$$\frac{a + \mathrm{i}b}{a' + \mathrm{i}b'} = a'' + \mathrm{i}b''$$

este definită prin

$$a + \mathrm{i}b = (a' + \mathrm{i}b') \cdot (a'' + \mathrm{i}b''),$$

adică

$$a = a'a'' - b'b'',\ b = b'a'' + a'b''.$$

Sistemul este compatibil și determinat dacă $a'^2 + b'^2 \neq 0$, ceea ce înseamnă: a', b' nu amîndouă nule, sau $a' + \mathrm{i}b' \neq 0$. Atunci

$$a'' = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2},\quad b'' = \frac{ba' - ab'}{a'^2 + b'^2}$$

şi, prin urmare,

$$\frac{a+ib}{a'+ib'}=\frac{aa'+bb'}{a'^2+b'^2}+i\frac{ba'-ab'}{a'^2+b'^2} \quad (a'+ib'\neq 0). \tag{7}$$

Rezultatul se poate obţine şi înmulţind termenii fracţiei cu $a'-ib'$, ceea ce însă presupune că univocitatea împărţirii a fost stabilită.

Se constată apoi că se verifică şi în cîmpul complex legile fundamentale:

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha, \qquad \alpha\beta=\beta\alpha \quad \text{(comutativitate)},$$

$$\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma, \quad \alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma \quad \text{(asociativitate)},$$

$$\alpha+0=\alpha, \qquad \alpha\cdot 1=\alpha,$$

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma \quad \text{(distributivitate)},$$

care, împreună cu univocitatea adunării şi înmulţirii, constituie bazele logice ale calculului cu numere reale, întrucît nu este vorba de relaţii de mărime (care în cîmpul complex nu sînt definite).

Se poate spune că cele patru operaţii cu numere complexe se efectuează aplicînd expresiilor imaginare regulile calculului algebric şi făcînd înlocuirile

$$i^2=-1,\ i^3=-i,\ i^4=1,\ i^5=i,\ \ldots \tag{8}$$

Să observăm în particular că $\alpha\beta=0$ atrage $\alpha=0$ sau $\beta=0$ din cauza univocităţii împărţirii.

Definiţie. *Se defineşte ca număr conjugat cu* $\alpha=a+ib$:

$$\bar{\alpha}=a-ib. \tag{9}$$

Avem

$$a=\frac{\alpha+\bar{\alpha}}{2}, \quad ib=\frac{\alpha-\bar{\alpha}}{2}; \tag{10}$$

deci $\bar{\alpha}=\alpha$ e condiţia pentru ca α să fie real, iar $\bar{\alpha}=-\alpha$ e condiţia pentru ca α să fie pur imaginar.

§ 2. Expresia trigonometrică a numerelor complexe

Definiţie. *Fiind dat numărul* $\alpha=a+ib$, *se numeşte norma lui:*

$$\mathcal{N}\alpha=a^2+b^2 \tag{11}$$

şi modulul lui:

$$|\alpha|=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{12}$$

$\mathcal{N}\alpha$ şi $|\alpha|$ *sînt numere reale* ≥ 0.

$\alpha=0$ este echivalent cu $\mathcal{N}\alpha=0$ sau cu $|\alpha|=0$.

Dacă α e real, $|\alpha|$ e valoarea sa absolută.

Avem

$$\mathcal{N}\alpha=\mathcal{N}\bar{\alpha}, \quad |\alpha|=|\bar{\alpha}|, \tag{13}$$

$$\alpha\bar{\alpha}=\mathcal{N}\alpha=|\alpha|^2. \tag{14}$$

Definiție. *Fiind dat* $\alpha = a + ib \neq 0$, *să punem* $r = |\alpha|$. *Relațiile*

$$a = r\cos\theta,\quad b = r\sin\theta, \tag{15}$$

compatibile fiindcă $\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \left(\frac{b}{r}\right)^2 = 1$, *definesc un unghi* θ *pînă la un multiplu de* 2π *(dacă unul din ele este* θ_0, *toate sînt cuprinse în* $\theta = \theta_0 + 2k\pi$, k *întreg oarecare). Acest unghi se numește argumentul sau amplitudinea lui* α *și se notează:*

$$\theta = \arg\ \alpha, \tag{16}$$

θ *fiind definit de* (15).

De obicei se consideră «valoarea principală» a argumentului: aceea pentru care $-\pi < \theta \leqslant \pi$.

Avem acum:

$$\alpha = r(\cos\ \theta + i\ \sin\ \theta), \tag{17}$$

care e expresia trigonometrică a numerelor complexe.

Aceasta se pretează mai bine ca cea cartezianã în operațiile de înmulțire și împărțire. Fie și numărul $\alpha' = r'\ (\cos\ \theta' + i\ \sin\ \theta')$. Avem

$$\alpha\alpha' = rr'\,[(\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta') + i\,(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')] =$$

$$= rr'\,[\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta')],$$

de unde rezultă

$$|\alpha\alpha'| = |\alpha| \cdot |\alpha'|,\ \arg\ (\alpha\alpha') = \arg\ \alpha + \arg\ \alpha' \tag{18}$$

și, în general (pentru un număr finit de factori),

$$|\alpha\alpha'\alpha''\ldots| = |\alpha|\,.\,|\alpha'|\,.\,|\alpha''|\ \ldots\ ,$$
$$\arg\ (\alpha\,\alpha'\,\alpha''\ \ldots) = \arg\ \alpha + \arg\ \alpha' + \arg\ \alpha'' + \ldots \tag{18'}$$

În cuvinte: *înmulțirea se face înmulțind modulii și adunînd argumentele.*

Cît despre împărțire, aceasta fiind inversa înmulțirii, putem scrie fără alt calcul:

$$\left|\frac{\alpha}{\alpha'}\right| = \frac{|\alpha|}{|\alpha'|},\quad \arg\frac{\alpha}{\alpha'} = \arg\ \alpha - \arg\ \alpha'. \tag{19}$$

Din (9) și (15) avem

$$\bar{\alpha} = r\ (\cos\ \theta - i\ \sin\ \theta), \tag{20}$$

deci

$$\arg\ \bar{\alpha} = -\arg\ \alpha. \tag{21}$$

Aplicînd (13), (21) în (18), (19) avem

$$\left|\frac{\bar{\alpha}}{\alpha}\right| = 1,\ \arg\ (\alpha\ \bar{\alpha}) = 0, \tag{22}$$

ceea ce rezultă din (14).

Din (18') urmează pentru n întreg $\geqslant 0$

$$|\alpha^n| = |\alpha|^n, \ \arg \alpha^n = n \arg \alpha, \tag{23}$$

unde $\alpha^\circ = 1$ este o definiție. De asemenea menținem definiția $\alpha^{-n} = \frac{1}{\alpha^n}$.

Cum $|1| = 1$ și $\arg 1 = 0$
(căci $1 = \cos 0 + i \sin 0$), avem

$$|\alpha^{-n}| = |\alpha|^{-n}, \ \arg \alpha^{-n} = -n \arg \alpha \tag{24}$$

și astfel formulele (23) sînt adevărate pentru n întreg oarecare. Ele se scriu în una singură:

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta).$$

Pentru $r = 1$ avem formula lui Moivre:

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n, \tag{25}$$

de unde prin identificarea celor doi membri:

$$\begin{aligned} \cos n\theta &= \cos^n \theta - \binom{n}{2}\cos^{n-2}\theta \sin^2\theta + \binom{n}{4}\cos^{n-4}\theta \sin^4\theta - \dots, \\ \sin n\theta &= \sin\theta\left\{\binom{n}{1}\cos^{n-1}\theta - \binom{n}{3}\cos^{n-3}\theta \sin^2\theta + \dots\right\}. \end{aligned} \tag{26}$$

Se vede că

$$\cos n\theta = P_n(\cos\theta), \ \sin n\theta = \sin\theta \cdot Q_{n-1}(\cos\theta), \tag{26'}$$

P_n și Q_{n-1} fiind polinoame de gradele n și $n-1$, bineînțeles după ce s-a făcut în prealabil substituția $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$.

Operația inversă ridicării la puterea n(întreg) e extragerea rădăcinii de indice n: $\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}}$. Dacă $\alpha^{\frac{1}{n}} = r'(\cos\theta' + i \sin\theta')$, trebuie să avem

$$r(\cos\theta + i \sin\theta) = r'^n(\cos n\theta' + i \sin n\theta'),$$

de unde

$$r = r'^n, \ \theta + 2k\pi = n\theta'.$$

Astfel,

$$\alpha^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right). \tag{27}$$

Așadar, $\alpha^{\frac{1}{n}}$ are n valori, care se obțin luînd în (27) pentru k un sistem complet de resturi mod n, cum sînt $k = 0, 1, \dots, n-1$ (căci două valori ale lui k ce diferă cu un multiplu de n dau aceeași valoare expresiei (27), pe cînd cele n valori considerate sînt diferite fiindcă argumentele lor nu diferă cu multipli de 2π).

Mai putem spune: numerele (27) sînt rădăcinile ecuației binoame $z^n = \alpha$.

Se vede că dacă α e real >0, deci $\theta = 0$, avem pentru n par două rădăcini reale, $\pm r^{\frac{1}{n}}$, corespunzătoare la $k = 0, \frac{n}{2}$; iar pentru n impar o singură rădăcină reală, $r^{\frac{1}{n}}$, corespunzătoare la $k = 0$. Dacă α e real <0, deci $\theta = \pi$, nu avem rădăcini reale cînd n e par, sau avem una, $-r^{\frac{1}{n}}$, corespunzătoare la $k = \frac{n-1}{2}$, cînd n e impar.

§ 3. Reprezentarea geometrică a numerelor complexe

Gauss şi, puţin înaintea lui, Wessel şi Argand, au reprezentat numerele complexe prin punctele unui plan referit la axe carteziene ortogonale (fig. 1). În acest scop se ia ca imagine a unui număr $\alpha = a + ib$ punctul de abscisă a şi ordonată b, pe care-l vom numi *afixa* lui α şi-l vom nota tot cu α. De obicei însă vom vorbi, mai scurt, despre «punctul α» pentru a indica, indiferent, şi numărul α şi afixa sa α.

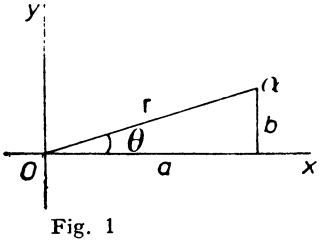

Fig. 1

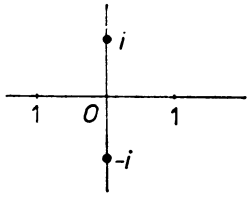

Fig. 2

Din (12), (15) şi triunghiul figurii 1 se vede că

$$|\alpha| = 0\alpha, \quad \arg \alpha = \widehat{xO\alpha},$$

unde distanţa $O\alpha$ e luată absolut, iar unghiul $\widehat{xO\alpha}$ e măsurat algebric (faţă de sensul de rotaţie direct ca sens pozitiv):

$r = |\alpha|$ şi $\theta = \arg \alpha$ sînt coordonate polare ale afixei α.

Numerele reale sînt pe axa Ox, care se numeşte *axa reală*, iar numerele pur imaginare, pe axa Oy — *axa imaginară*.

Reprezentarea pune, de exemplu, în evidenţă că numerele a, $-a$, ia, $-ia$ (a real $\neq 0$) au modulul a şi argumentele respectiv egale cu 0, π, $\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, (valori principale) (fig. 2).

Punctele α şi $-\alpha$ sînt simetrice faţă de O. Punctul O are argumentul complet nedeterminat.

Două numere complexe conjugate au afixele simetrice faţă de axa reală (fig. 3). Formulele (13), (21) sînt evidente geometric.

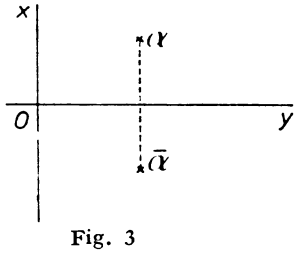

Fig. 3

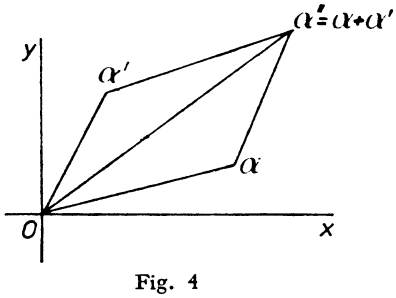

Fig. 4

Să interpretăm geometric cele patru operaţii.

Formula (1′) arată imediat că suma $\alpha + \alpha' = \alpha''$ se obţine construind vectorul $\overrightarrow{O\alpha''} = \overrightarrow{O\alpha} + \overrightarrow{O\alpha'}$ (fig. 4). Dacă punctele O, α, α' sînt coliniare, ceea ce se întîmplă cînd $\arg \alpha = \arg \alpha'$ sau $\arg \alpha = -\arg \alpha'$, $\overrightarrow{O\alpha''}$ se obţine adu-

nînd vectorii coliniari $\overrightarrow{O\alpha}$ şi $\overrightarrow{O\alpha'}$. În primul caz, α, α', α'' sînt de aceeaşi parte faţă de O şi $\arg \alpha = \arg \alpha' = \arg \alpha''$. În cazul al doilea, α şi α' sînt separaţi de O. Cînd $\arg \alpha \neq \pm \arg \alpha'$, α'' se construieşte ca al patrulea vîrf al paralelogramului de laturi $O\alpha$, $O\alpha'$, sau luînd $\overrightarrow{\alpha\alpha''}$ echipolent cu $\overrightarrow{O\alpha'}$ (sau viceversa).

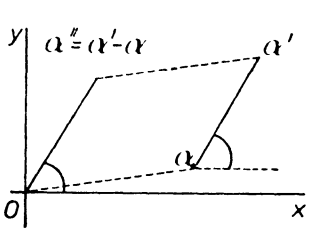

Fig. 5

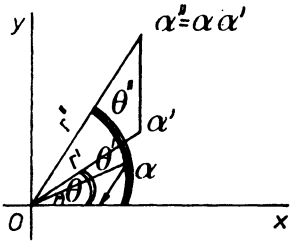

Fig. 6

Pentru a construi diferenţa $\alpha' - \alpha = \alpha''$ (fig. 5), vom lua vectorul $\overrightarrow{\alpha'\alpha''}$ echipolent cu $-\overrightarrow{O\alpha}$ (căci $\alpha'' = \alpha' + (-\alpha)$). Aceasta revine la a lua $\overrightarrow{0\alpha''}$ echipolent cu $\overrightarrow{\alpha\alpha'}$.

Rezultă observaţiile foarte utile: $|\alpha' - \alpha|$ este distanţa $\alpha\alpha'$; $\arg(\alpha' - \alpha)$ este unghiul vectorului $\overrightarrow{\alpha\alpha'}$ (sau al dreptei orientate $\alpha\alpha'$) cu axa reală.

Produsul $\alpha\alpha' = \alpha''$ se obţine construind triunghiul $O\alpha'\alpha''$ direct asemenea cu triunghiul $O1\alpha$ (fig. 6). Într-adevăr, figura 6 arată că α'' are coordonate polare $r'' = rr'$ (din asemănarea triunghiurilor) şi $\theta'' = \theta + \theta'$.

În sfîrşit $\frac{\alpha'}{\alpha} = \alpha''$ se obţine construind $O\alpha''\alpha'$ asemenea cu $O1\alpha$.

§ 4. Inegalităţi pentru moduli

Din construcţia sumei rezultă uşor importantele inegalităţi:

$$|\alpha + \alpha'| \leqslant |\alpha| + |\alpha'| \tag{28}$$

cu $=$ cînd $\arg \alpha = \arg \alpha' \left(\text{sau } \frac{\alpha'}{\alpha} \geqslant 0\right)$,

$$|\alpha + \alpha'| \geqslant ||\alpha| - |\alpha'|| \tag{29}$$

cu $=$ cînd $\arg \alpha = -\arg \alpha' \left(\text{sau } \frac{\alpha'}{\alpha} \leqslant 0\right)$ (reies din triunghiul $O\alpha\alpha''$, cu laturile $|\alpha|$, $|\alpha'|$, $|\alpha + \alpha'|$).

Demonstraţia algebrică a formulei (28). Să punem

$$r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2},\ r' = |\alpha'| = \sqrt{a'^2 + b'^2},$$

$$r''^2 = |\alpha + \alpha'|^2 = (a + a')^2 + (b + b')^2 = r^2 + r'^2 + 2(aa' + bb').$$

Din identitatea lui Lagrange,

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' + bb')^2 + (ab' - a'b)^2,$$

avem

$$r^2r'^2 \geqslant (aa' + bb')^2,\ rr' \geqslant aa' + bb';$$

deci,

$$r''^2 \leqslant r^2 + r'^2 + 2rr' = (r + r')^2 \text{ şi } r'' \leqslant r + r',$$

adică (28). Semnul = are loc cînd $ab' - a'b = 0$ şi $rr' = aa' + bb' \geqslant 0$, ceea ce înseamnă, după (7), că $\frac{\alpha'}{\alpha} \geqslant 0$.

Inegalitatea (29) se deduce din (28) astfel: avem

$$|\alpha + \beta| \leqslant |\alpha| + |\beta|.$$

Să punem aici $\beta = -(\alpha + \alpha')$; obţinem

$$|\alpha + \alpha'| \geqslant |\alpha'| - |\alpha|$$

şi, schimbînd α cu α',

$$|\alpha + \alpha'| \geqslant |\alpha| - |\alpha'|.$$

Aceste două inegalităţi echivalează cu (29).
Inegalitatea (28) se generalizează astfel:

(28′) $$|\alpha + \alpha' + \ldots + \alpha^{(n)}| \leqslant |\alpha| + |\alpha'| + \ldots + |\alpha^{(n)}|$$

cu = numai atunci cînd $\arg \alpha = \arg \alpha' = \ldots = \arg \alpha^{(n)}$; în care caz şi $\arg (\alpha + \ldots + \alpha^{(n)})$ este egal cu precedentele.

Demonstraţia se face prin inducţie. Cazul $n - 1$ fiind admis, avem, aplicînd (28),

$$|\alpha + \ldots + \alpha^{(n)}| \leqslant |\alpha + \ldots + \alpha^{(n-1)}| + |\alpha^{(n)}| \leqslant |\alpha| + \ldots + |\alpha^{(n-1)}| + |\alpha^{(n)}|.$$

Egalitatea în (28′) cere egalitate în aceste relaţii, deci

$$|\alpha + \ldots + \alpha^{(n-1)}| = |\alpha| + \ldots + |\alpha^{n-1}|,$$

ceea ce dă conform ipotezei de inducţie $\arg \alpha = \ldots = \arg \alpha^{(n-1)} = \arg (\alpha + \ldots + \alpha^{(n-1)})$; şi totodată prima egalitate cere $\arg \alpha^{(n)} = \arg (\alpha + \ldots + \alpha^{(n-1)}) = \arg (\alpha + \ldots + \alpha^{(n)})$. Astfel afirmaţia este demonstrată şi pentru indicele n.

Inegalităţile (28), (28′), (29) vor fi aplicate aproape la tot pasul.

Vom avea încă ocazia de a întrebuinţa observaţiile următoare:

Din

$$|\alpha - \beta| < \varepsilon,$$

urmează

$$|\beta| - \varepsilon < |\alpha| < |\beta| + \varepsilon$$

(nu şi invers!). Căci avem din (29):

$$|\beta| - |\alpha| \leqslant |\alpha - \beta| < \varepsilon,\ |\alpha| - |\beta| \leqslant |\alpha - \beta| < \varepsilon.$$

Geometric, inegalitatea dată spune că α se află în interiorul cercului de centru β şi rază ε (distanţa $\alpha\beta < \varepsilon$); de unde reies imediat inegalităţile de demonstrat.

Dacă β şi ε sînt fixe, inegalitatea de la dreapta arată că $|\alpha|$ este mărginit (fig. 7).

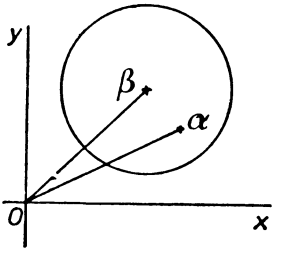

Fig. 7

Alte inegalităţi utile: Fie $z = x + iy$, $\alpha = a + ib$; avem

$$\left.\begin{array}{l} |x-a| \\ |y-b| \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}(|x-a|+|y-b|) \end{array}\right\} \leqq |z-\alpha| \leqq |x-a| + |y-b|. \tag{30}$$

Verificarea este imediată, ţinînd seama că $|z-\alpha| = \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2}$.

§ 5. Variabila complexă. Planul lui Gauss şi sfera lui Riemann

O variabilă complexă este un simbol capabil de a lua orice valoare complexă. Vom nota de obicei o variabilă complexă cu $z = x + iy$, sau $w = u + iv$. Geometric, o variabilă z este reprezentată de un punct variabil z, care poate descrie tot planul.

De cele mai multe ori libertatea de mişcare a variabilei este restrînsă la o mulţime de puncte A, care va fi aproape în toate cazurile un domeniu (regiune), sau un domeniu închis, sau chiar o curbă.

Dăm aici definiţia acestor mulţimi de puncte, asupra cărora vom reveni (capitolele III şi IV), reamintind cu această ocazie cîteva noţiuni elementare.

Definiţie. *Vom înţelege prin vecinătate a unui punct α, interiorul unui cerc oarecare de centru α. O notăm cu U_α, (sau V_α). O vecinătate U_α se poate reprezenta prin inegalitatea*

$$|z - \alpha| < \eta,$$

η fiind raza cercului care o închide.

Într-adevăr, am exprimat astfel că distanţa punctului z la α este $< \eta$ (§ 3). De altfel forma aleasă pentru vecinătăţi nu este esenţială; am fi putut defini ca vecinătăţi U_α de exemplu pătratele de centru α, cu laturile paralele axelor:

$$|x-a| < \delta, \; |y-b| < \delta,$$

sau altfel de vecinătăţi. Într-adevăr, proprietăţile în care sînt implicate vecinătăţi sînt astfel că, dacă o vecinătate U_α are o proprietate şi vecinătăţile conţinute în U_α o au. De unde rezultă că două familii de vecinătăţi $\{U_\alpha\}$ şi $\{U'_\alpha\}$ joacă acelaşi rol dacă o vecinătate U_α conţine o vecinătate U'_α şi viceversa, condiţie evident satisfăcută de cele două familii de mai sus (cercuri şi pătrate).

Definiţie. *Faţă de o mulţime de puncte A, un punct α se zice:*
interior cînd există o vecinătate $V_\alpha \subset A$ (citeşte: conţinută în A);
exterior cînd există o vecinătate V_α disjunctă de A (adică fără puncte comune cu A):

$$A \cap V_\alpha = 0;$$

punct frontieră cînd nu este nici interior, nici exterior, deci orice V_α conţine puncte din A şi totodată puncte care nu sînt în A.

Cele trei categorii de puncte formează trei mulţimi disjuncte: interiorul, exteriorul şi frontiera lui A, pe care le notăm cu int A, ext A, fr A.

În sfîrşit, numim punct limită un punct α cu proprietatea că orice U_α conţine puncte din A diferite de α: $A \cap (U_\alpha - \alpha) \neq 0$.

Evident, un punct limită nu poate fi decît interior sau punct frontieră şi reciproc, acestea sînt puncte limită dacă nu sînt izolate. Punctele limită constituie mulţimea *derivată* A'.

Închiderea (aderenţă) unei mulţimi A se numeşte mulţimea formată din punctele din A şi punctele limită (care pot să nu fie în A); se notează cu $\bar{A}$. Avem deci $\bar{A} = A \cup A'$.

Cum punctele lui A, ca şi punctele limită, nu pot fi decît puncte interioare sau puncte frontieră, avem şi $\bar{A} = \text{int } A \cup \text{fr } A$, sau $\bar{A} = A \cup \text{fr } A$.

Să mai notăm că un punct α din A care nu este punct limită are o vecinătate U_α care nu conţine alt punct din A decît α: $A \cap U_\alpha = \alpha$; un asemenea punct se zice *izolat*. El este evident punct frontieră.

Un punct aderent al unei mulţimi A este sau un punct limită sau un punct izolat pentru A. Mulţimea lor formează, evident, aderenţa lui A.

O mulţime A se numeşte *deschisă* dacă toate punctele ei sînt interioare: $A = \text{int } A$; se numeşte *închisă* dacă conţine şi frontiera sa: $A \supset \text{fr } A$; sau ceea ce este tot una; dacă coincide cu aderenţa ei: $A = \bar{A}$; sau încă dacă conţine toate punctele limită: $A \supset A'$.

Definiţie. *Se numeşte domeniu sau regiune o mulţime care este:*
1° *deschisă şi*
2° *conexă (dintr-o singură bucată), adică nu se poate descompune în două mulţimi deschise şi disjuncte* (nevide).
Domeniu închis se numeşte aderenţa unui domeniu, adică se obţine adăugînd unui domeniu frontiera sa.

Definiţie. *Vom înţelege prin arc simplu o mulţime de puncte care se poate reprezenta prin ecuaţii de forma*

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

sau la un loc:

$$z = z(t)$$

astfel că:

1° *parametrul r e a l t descrie un interval închis,*

2° *funcțiile reale $x(t)$, $y(t)$ sînt continue în acel interval și*

3° *la valori t diferite corespund puncte z diferite (intervalul și curba sînt în corespondență biunivocă).*

Mai general, vom numi curbă o reuniune de asemenea mulțimi (arce simple de curbă) avînd extremitățile consecutive comune. Dacă $z(t)$ verifică numai condițiile 1° și 2° mulțimea corespunzătoare se numește d r u m (aceasta este imaginea continuă a unui segment).

O mulțime de puncte este *mărginită* dacă poate fi cuprinsă în interiorul unui cerc, al cărui centru se poate lua în O.

După o teoremă fundamentală a lui Weierstrass, o mulțime mărginită și conținînd o infinitate de puncte are întotdeauna cel puțin un punct limită. Nu tot astfel sînt mulțimile nemărginite.

De exemplu, un șir de puncte $z_0, \ldots, z_n, \ldots$, unde modulii $|z_0|, \ldots, |z_n|, \ldots$ cresc nemărginit, nu are nici un punct limită în planul euclidean (căci punctele șirului sînt izolate, iar celelalte sînt exterioare).

Pentru a înlătura aceste excepții și pentru a interpreta geometric în mod unitar situații în care o variabilă crește nemărginit în modul, s-au introdus pe dreapta reală două puncte ideale, $+\infty$ și $-\infty$, iar în geometria proiectivă (și pentru alte motive) dreapta de la infinit. În teoria funcțiilor de o variabilă complexă, sîntem conduși să reprezentăm infinitul printr-un singur punct $z = \infty$. Planul real completat cu acest punct se va numi *planul lui Gauss*. În acesta, teorema lui Weierstrass este adevărată pentru orice mulțime infinită. Pentru acest motiv se zice că planul lui Gauss este compact.

Odată cu introducerea punctului ∞ vom defini vecinătățile lui: o vecinătate U_∞ este exteriorul unui cerc oarecare, de obicei cu centrul în 0. Prin aceasta punctul ∞ capătă o individualitate topologică: el apare ca punct limită al tuturor mulțimilor nemărginite, ca punct exterior pentru mulțimile mărginite. În primul caz, el poate fi punct interior sau punct frontieră. În particular, toate dreptele trebuie considerate ca trecînd prin punctul ∞; nu însă cercurile (vom vedea că dreptele trebuie privite ca cercuri ce trec prin ∞). Astfel geometria planului lui Gauss se deosebește de aceea a planului euclidean. Vom vedea mai tîrziu că planul lui Gauss este guvernat de alt grup de transformări decît planul lui Euclid: grupul conform al lui Möbius.

Analitic vorbind, nu este însă permis să atribuim simbolului rangul de număr, pentru că, după cum ne va arăta teoria limitelor, nu se pot defini operații cu acest simbol care să concorde cu legile generale ale calculului limitelor; așa că asemenea definiții n-ar avea interes și chiar ar putea duce la confuzii. În analiză infinitul nu este actual, ci indică numai o trecere la limită, uneori posibilă, alteori imposibilă. Aceasta însă nu ne împiedecă să întrebuințăm — pentru motive de uniformitate — același limbaj ca pentru numerele adevărate; limbaj în dosul căruia se va găsi întotdeauna o noțiune de limită. Astfel, prin „comportarea unei funcții în punctul ∞" se înțelege comportarea în exteriorul unui cerc oricît de mare; prin expresia: $f(z)$ are valoarea ∞ în punctul α se înțelege că limita lui $f(z)$ în α este ∞: etc.

Revenind la planul lui Gauss, să mai observăm un caracter, de natură topologică, al lui. Anume acest plan este o suprafață închisă (adică fără frontieră) de natura sferei, sau întrebuințînd un termen din topologie: o suprafață

homeomorfă cu o sferă. Ceea ce înseamnă că putem reprezenta biunivoc și bicontinuu planul lui Gauss pe o sferă. Această reprezentare se poate face în modul cel mai simplu prin *proiecția stereografică* a lui Ptolemeu (fig. 8). Luîndu-se o sferă de centru O și rază 1, din polul sud S se proiectează fiecare punct z al planului lui Gauss într-un punct Z al sferei. Originea O se proiectează în polul nord N. Pentru punctul ∞ proiectanta devine paralelă cu planul, deci corespunzătorul acestui punct este polul sud S. Corespondența este evident biunivocă și bicontinuă (în sensul că la punctele limită ale unei mulțimi din plan corespund punctele limită ale mulțimii din proiecție). Proiecția stereografică păstrează unghiurile (este o corespondență conformă) și duce cercuri în cercuri, după cum se va vedea. Astfel, la o vecinătate circulară a unui punct din plan corespunde o vecinătate tot circulară pe sferă; ceea ce se vede imediat în cazul punctelor 0 și ∞.

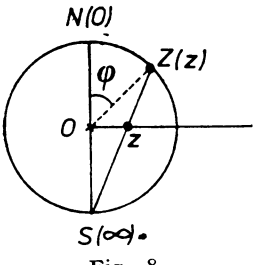

Fig. 8

Punctul ∞ încetează, pe sferă, de a mai fi un punct ideal: este un punct propriu-zis. O mulțime nemărginită în plan apare mărginită pe sferă. Aceasta face ca sfera lui Riemann să fie de preferat planului lui Gauss cînd este vorba de studiat vecinătatea punctului ∞.

Să reprezentăm corespondența prin formule. Dacă fixăm pe Z prin coordonatele lui pe sferă, longitudinea ω măsurată de la planul meridian xON și colatitudinea φ măsurată pe meridian de la N, avem imediat:

$$\omega = \theta, \quad r = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

(vezi triunghiul OSz din fig. 8) θ și r fiind argumentul și modulul lui z. Trecînd la coordonatele carteziene $z(x, y, O)$, $Z(x', y', z')$, avem:

$$x' = \sin\varphi \cos\theta, \quad y' = \sin\varphi \sin\theta, \quad z' = \cos\varphi$$

sau

$$x' = \frac{2r}{1+r^2}\cos\theta, \quad y' = \frac{2r}{1+r^2}\sin\theta, \quad z' = \frac{1-r^2}{1+r^2}$$

sau

$$x' = \frac{2x}{1+x^2+y^2}, \quad y' = \frac{2y}{1+x^2+y^2}, \quad z' = \frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}.$$

Cu ajutorul acestor formule se vede ușor că cercurile și dreptele din planul lui Gauss sînt transformate în cercuri ale sferei lui Riemann (dreptele în cercuri prin S). Aceasta rezultă și din faptul că corespondența stereografică este subordonată unei inversiuni. (Anume, inversiunea față de sfera de centru S, care trece prin cercul comun planului și sferei considerate, duce planul în această sferă pentru că păstrează cercul precedent). Două puncte z, Z fiind aliniate cu centrul de inversiune S se corespund în inversiune.

Tot de aici rezultă că proiecția stereografică este conformă (inversiunile fiind corespondențe conforme).

Exerciţii

1. *Punctul care împarte segmentul* $[\alpha, \beta]$ *în raportul* $\frac{m}{n}$ *este* $\frac{m\beta + n\alpha}{m+n}$, *unde* m *şi* n *sînt numere naturale.*

2. *Centrul de greutate al triunghiului* $\alpha\beta\gamma$ *este* $\frac{1}{3}(\alpha + \beta + \gamma)$.

3. *Să se figureze în planul complex rădăcinile ecuaţiei* $z^n = 1$.

4. *Ecuaţia* $\left|\frac{z-\alpha}{z-\beta}\right| = c > 0$ *reprezintă un cerc sau o dreaptă.*

R. Căci ea exprimă că raportul distanţelor lui z la punctele α şi β este constant. Analitic:

$$(x-a)^2 + (y-a')^2 = c^2[(x-b)^2 + (y-b')^2].$$

5. *Ecuaţia* $32z^5 = (z+1)^5$ *are patru rădăcini imaginare, dintre care cîte două în cvadrantele II şi III. Toate rădăcinile sînt pe un acelaşi cerc.*

R. Rădăcinile sînt date de $z_k = -1 + 2\omega^k z_k (k = 0, \ldots, 4)$ ω fiind una din rădăcinile imaginare ale unităţii, sau de $z_k = \frac{1}{2\omega^k - 1}$. Cum ω şi ω^4, ω^2 şi ω^3 sînt conjugate pentru că au produsul real, z şi z_4, z_2 şi z_3 sînt conjugate.

Dacă ω are argumentul $\frac{2\pi}{5}$, se vede că $2\omega - 1$ şi $2\omega^2 - 1$ se află în cvadrantul II, de unde se deduce că z_1 şi z_2 se află în cvadrantul III. Conjugatele lor, z_3 şi z_4 vor fi în cvadrantul II. Toate rădăcinile sînt pe cercul $\left|\frac{z+1}{z}\right| = 2$.

6. *Să se demonstreze:*

$$|\alpha + \beta|^2 + |\alpha - \beta|^2 = 2(|\alpha|^2 + |\beta|)^2,$$

să se interpreteze geometric

7. *n fiind un întreg pozitiv, avem*

$$z^{2n} - a^{2n} = (z^2 - a^2) \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2az \cos \frac{k\pi}{n} + a^2\right),$$

$$z^{2n} - 2a^n z^n \cos\theta + a^{2n} = \prod_{k=1}^{n-1} \left(z^2 - 2az \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + a^2\right),$$

R. Se aplică identitatea

$$[z - a(\cos\theta + i \sin\theta)][z - a(\cos\theta - i \sin\theta)] = z^2 - 2az\cos\theta + a^2.$$

8. *Dacă* $a + \frac{1}{a} = 2\cos\theta$, *avem* $a^n + \frac{1}{a^n} = 2\cos n\theta$.

9. *Să se verifice că următoarele ecuaţii (unde t ia toate valorile reale) reprezintă curbele scrise în dreptul lor.*

$\lvert z-\alpha\rvert = r$,	*cerc de centru α şi rază r*
$\lvert z-\alpha\rvert = \lvert z-\beta\rvert$ $(\alpha \neq \beta)$	*perpendiculara pe mijlocul segmentului (α, β),*
$\arg(z-\alpha) = a$ (real),	*semidreaptă de origine α şi înclinare a;*
$\mathrm{Re}(\alpha z + \beta) = 0$ $(\alpha \neq 0)$,	*dreaptă;*
$\mathrm{Im}\frac{1}{z} = c$ (real),	*cerc dacă $c \neq 0$;*
$\lvert z^2 - 1\rvert = 1$,	*lemniscata lui Bernoulli;*
$z = \alpha + \beta t$,	*dreapta prin α, paralelă cu vectorul β,*
$z = \alpha + r(\cos t + i \sin t)(r > 0)$,	*cercul de centru α şi rază r;*
$z = z_0 + e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(a, b$ *reali*$)$,	*spirala logaritmică;*

$2z = \left(a + \frac{1}{a}\right)\cos t + i\left(a - \frac{1}{a}\right)\sin t$ sau $|z \pm \sqrt{z^2 - 1}| = a \neq \pm 1$, *elipsă de focare* $z = \pm 1$ (*dacă* $a \neq \pm 1$).

10. *Dacă* $F(\xi, \eta, \zeta) = 0$ *este ecuația tangențială omogenă a unei curbe (condiția ca dreapta* $\xi x + \eta y + \zeta = 0$ *să-i fie tangentă), focarele reale ale curbei sînt rădăcinile ecuației* $F(1, i, -z) = 0$.

R. Focarele reale sînt punctele reale ale tangentelor izotrope ale curbei, $X - x \pm i(Y - y) = 0$; dacă $z = x + iy$ este un focar, ecuația tangențială este verificată de $\xi = 1$, $\eta = \pm i$, $\zeta = -(x \pm iy)$.

11. *Pentru ca* α *să fie un număr complex de modul 1, este necesar și suficient ca* $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2$ *să fie un număr negativ sau* $a = \pm 1$.

R. Dacă $|\alpha| = 1$, $\alpha = \cos\theta + i\sin\theta$ și $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 = -\operatorname{ctg}^2\frac{\theta}{2}$. Invers, dacă $\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)^2 = -k^2$ (k real), urmează $\alpha = \frac{k^2 - 1 \pm 2ki}{k^2 + 1}$, de unde $|\alpha| = 1$.

Funcții. Limite. Continuitate

§ 6. Noțiunea de funcție de variabile complexe (în sens larg)

Definiție. *Se zice că o variabilă complexă* $w = u + iv$ *este funcție de o variabilă complexă* $z = x + iy$ *în mulțimea D, dacă la fiecare punct* $z \in D$ *corespunde (în virtutea unei prescripții anumite) una sau mai multe valori (în număr finit sau enumerabile) ale variabilei w. În primul caz funcția este numită uniformă, în cazul al doilea multiformă. Se scrie* $w = f(z)$.

Trebuie bine înțeles că în definiția unei funcții intră două elemente:

1°. Mulțimea D, numită și domeniu de definiție al funcției, care de obicei va fi un domeniu sau închiderea unui domeniu; ceea ce se va specifica cînd această restricție va fi necesară pentru valabilitatea rezultatelor. Punctele $w = f(z)$ formează și ele o mulțime E, în planul unde este reprezentată variabila w (fig. 9).

2°. Corespondența $z \to w$ este reprezentată prin simbolul sau «operatorul» f. De cele mai multe ori această corespondență este rezultatul unui șir de operații aritmetice sau operații de trecere la limită. În acest caz domeniul de definiție este format din punctele z unde operațiile în chestiune au sens (se pot efectua). Așa funcția $\frac{1}{z^2+1}$ nu este definită prin această expresie în punctele $z = \pm i$.

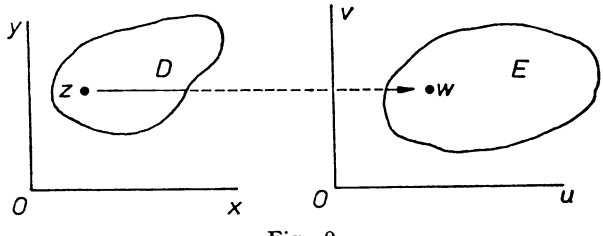

Fig. 9

Același lucru se petrece în real. Este însă de observat că unele funcții definite prin expresii analitice care nu au sens în real pot căpăta sens în complex. Astfel, $f(x) = \sqrt{|x|}$ în real nu e definită pentru $x < 0$. În complex avem însă,

pentru $x < 0$, $f(x) = \pm i\sqrt{|x|}$, funcția reală înglobîndu-se în funcție de variabilă complexă $f(x) = \sqrt{z}$.

Fiind dată o funcție $w = f(z)$, sînt evident definite, în același domeniu D, funcțiile reale u și v de x și y:

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

sau

$$\text{Re } f(z) = u(x, y), \quad \text{Im} f(z) = v(x, y).$$

Natural, putem considera aceste funcții în locul funcției $f(z)$, făcînd apel la cunoștințele din analiza reală. Dar nu vom urma această cale decît în foarte puține cazuri; studiul direct în complex fiind aproape întotdeauna mai simplu și mai elegant, atît ca metodă, cît și în ce privește formularea rezultatelor — ceea ce este de așteptat, căci în loc de a vorbi de două funcții de două variabile este mai simplu să vorbim de o singură funcție de o variabilă.

O funcție de mai multe variabile complexe se definește în același mod și se notează: $w = f(z_1, z_2, ..., z_n)$. În acest caz fiecare variabilă $z_1, z_2, ..., z_n$ descrie o mulțime $D_1, ..., D_n$ și funcția este definită pentru toate grupele de valori $(z_1, ..., z_n)$ luate respectiv din $D_1, ..., D_n$ (fig. 10), Pentru unificarea limbajului vom numi punct (abstract) un asemenea grup de valori. Totalitatea acestor puncte (abstracte) formează o mulțime (abstractă) D, care se numește *produsul cartezian* al mulțimilor $D_1, D_2, ..., D_n$ și se notează:

$$D = D_1 \times D_2 \times ... \times D_n.$$

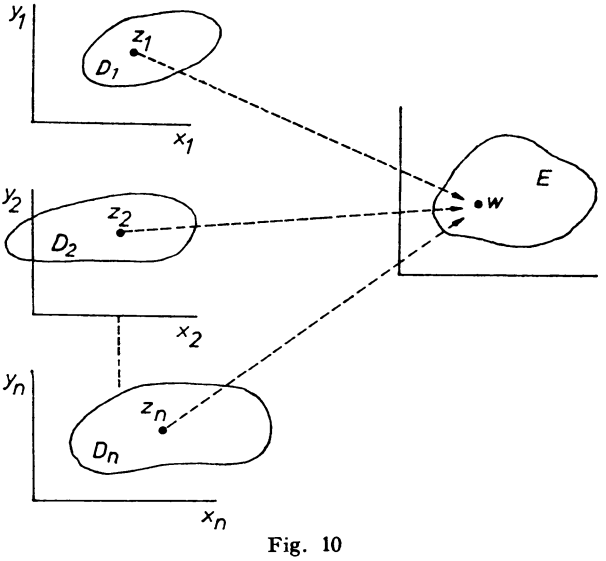

Fig. 10

Această mulțime este domeniul de definiție al funcției. Ea se găsește într-un spațiu abstract cu 2 n dimensiuni, care e produsul cartezian al planelor $(z_1), ..., (z_n)$ unde am reprezentat variabilele $z_1, ..., z_n$.

Cele mai simple funcții uniforme se obțin aplicînd variabilelor și unor constante numai operații de adunare și înmulțire: *polinoamele*. Un polinom $P(z_1, ..., z_n)$ este o sumă de monoame:

$$P(z) = \sum a z_1^{m_1} ... z_n^{m_n}$$

unde coeficienții a sînt constanți (sau nu depind de variabilele $z_1, \ldots, z_n$) și exponenții $m_1, \ldots, m_n$ sînt numere întregi $\geqq 0$. Suma acestora, $m_1 + \ldots + m_n$ este gradul monomului și gradul cel mai mare al monoamelor ce constituie polinomul este gradul polinomului.

Un polinom de o variabilă de grad m se scrie

$$P(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \ldots + a_m.$$

Împărțirea polinoamelor se face în complex ca și în real. După cum se știe, pentru ca polinomul $P(z)$ să admită rădăcina α, este necesar și suficient ca el să se dividă cu $(z - \alpha)$. Avem atunci

$$P(z) = (z - \alpha)^{\mu} P_1(z), \qquad \mu \geqq 1,$$

și dacă $P_1(\alpha) \neq 0$, μ este multiplicitatea rădăcinii α. Întrebuințînd terminologia specială a teoriei funcțiilor, se mai zice că α este un zero de ordin μ al lui $P(z)$.

Vom demonstra mai tîrziu și «teorema fundamentală a algebrei»: Un polinom $P(z)$ de grad m are m rădăcini, dacă fiecare rădăcină este socotită cu multiplicitatea ei. De unde rezultă descompunerea bine cunoscută

$$P(z) = a_0(z - \alpha_1) \ldots (z - \alpha_m)$$

(factorii putînd fi egali), relațiile dintre rădăcini și coeficienți etc. Cînd variabilele sînt implicate și în operații de împărțire obținem funcții *raționale*.

O funcție rațională este totdeauna reductibilă la un cît de polinoame, $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ (în cazul unei variabile). Se va presupune că factorii comuni polinoamelor au fost îndepărtați. Funcția nu este definită în punctele pentru care numitorul $Q = 0$.

Cele mai simple funcții multiforme sînt acelea în care, pe lîngă operațiile precedente, variabilele sînt supuse și la extrageri de rădăcini. Astfel,

$$z^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \ldots, n-1,$$

este o funcție cu n valori (am pus $z = r(\cos\theta + i \sin\theta)$). Asemenea funcții se numesc *iraționale*. Ele fac parte din categoria mai vastă a funcțiilor *algebrice* care sînt funcțiile definite implicit prin ecuații algebrice:

$$F(z_1, \ldots, z_n; w) = 0.$$

O asemenea funcție e rațională sau are un număr finit (>1) de valori (egal cu gradul lui F în variabila w).

Funcțiile care nu sînt algebrice (deci nici raționale și nici iraționale) se numesc *transcendente*. Așa este e^z, care va fi definit printr-o serie convergentă ca în real:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots,$$

care este o funcție uniformă, sau inversa lui e^z, care după cum se va vedea are expresia

$$\log z = \log|z| + i \arg z$$

și deci are valori diferind între ele prin multipli de $2\pi i$.

Deocamdată ne vom ocupa numai de funcţii uniforme. Primul pas va fi extinderea în complex a noţiunii fundamentale de limită şi a celorlalte noţiuni bazate pe aceasta: continuitate, convergenţă, derivată. Se vor obţine rezultate în cea mai mare parte analoge cu cele din real; abia atunci cînd vom pune funcţiilor de care ne ocupăm condiţia de a avea o derivată vom intra în domeniul propriu teoriei funcţiilor de variabilă complexă.

§ 7. Noţiunile de limită şi continuitate

Definiţie. *Fie $w = f(z)$ o funcţie uniformă definită în D şi α un punct limită al acestei mulţimi. Zicem că $f(z)$ are limita (tinde la) λ pentru z tinzînd la α (în punctul α) dacă: la orice vecinătate V_λ din planul variabilei w corespunde, în planul variabilei z, o vecinătate U_α astfel ca valorile funcţiei în toate punctele din $U_\alpha - \alpha$ să fie cuprinse în V_λ:*

$$f(z) \in V_\lambda \text{ pentru } z \in U_\alpha,\ z \neq \alpha. \tag{31}$$

Se scrie atunci

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$$

sau încă

$$f(z) \to \lambda \text{ pentru } z \to \alpha \text{ (fig. 11).}$$

Natural, punctele din U_α despre care este vorba în definiţie sînt numai cele unde funcţia este definită, adică punctele intersecţiei $D \cap (U_\alpha - \alpha)$. Aceasta se va subînţelege în toate cazurile analoge.

De asemenea nu vom mai scrie $z \neq \alpha$, această condiţie rămînînd subînţeleasă în toate chestiunile relative la limite.

Din definiţie urmează că λ este punct aderent pentru mulţimea E descrisă de w.

Dată o vecinătate V_λ, vecinătatea corespunzătoare U_α nu este unică; deoarece $U'_\alpha \subset U_\alpha$ satisface de asemenea condiţia (31). Dar printre toate vecinătăţile punctului α, care au această proprietate, există una maximă $\mathcal{U}_\alpha$, care le conţine pe toate; aceasta corespunde univoc lui V_λ. Cînd $\alpha \neq \infty$

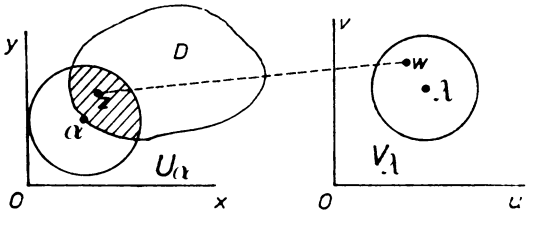

Fig. 11

(α finit), $\mathcal{U}_\alpha$ este cercul de rază egală cu marginea superioară a razelor vecinătăţilor U_α considerate. Cînd $\alpha = \infty$ (şi cînd considerăm ca vecinătăţi U_∞ exterioarele cercurilor de centru O), vecinătatea maximă $\mathcal{U}_\infty$ este exteriorul cercului de centru O şi rază egală cu marginea inferioară a razelor vecinătăţilor U_∞ care satisfac (31).

Să mai observăm că (31) nu înseamnă că orice $w \in V_\lambda$ este o valoare a funcției pentru un $z \in U_\alpha$; la mulțimea $D \cap U_\alpha$, f face să corespundă în general numai o parte a vecinătății V_λ, chiar și atunci cînd U_α este vecinătatea maximă relativă la V_λ.

Definiția limitei rămîne aceeași și pentru funcții de mai multe variabile complexe, după cum urmează:

Definiție. *Numim vecinătate a unui punct abstract* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, *produsul cartezian*

$$U_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)} = U_{\alpha_1} \times U_{\alpha_2} \times \ldots \times U_{\alpha_n}$$

al unor vecinătăți arbitrare ale punctelor $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$[1]. *Definim așadar relația*

$$\lim_{z_1 \to \alpha_1, \ldots, z_n \to \alpha_n} f(z_1, \ldots, z_n) = \lambda,$$

prin condiția: la orice V_λ *să corespundă o vecinătate* $U_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$ *astfel ca:*

(31′) $\qquad f(z_1, \ldots, z_n) \in V_\lambda$ *pentru* $(z_1, \ldots, z_n) \in U_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$

[*adică* $z_1 \in U_{\alpha_1}, \ldots, z_n \in U_{\alpha_n}$].

Pentru a nu complica în mod inutil scrierea vom formula propozițiile care urmează numai pentru funcții de o variabilă z. Ele sînt însă valabile și pentru funcții de mai multe variabile $z_1, \ldots, z_n$. Pentru a face această generalizare nu avem decît să înlocuim în enunțuri ca și în demonstrații punctele z, α, etc., vecinătățile U_α, mulțimile D din planul variabilei independente, prin puncte abstracte $(z_1, \ldots, z_n)$, $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, vecinătăți abstracte $U_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)}$, domenii de definiție abstracte. În puținele cazuri cînd va fi vorba numai de funcții de o variabilă vom menționa explicit aceasta.

Definiția limitei se mai poate formula reprezentînd vecinătățile prin inegalități. O vecinătate U_α se reprezintă cînd $\alpha \neq \infty$ prin

$$|z - \alpha| < \eta,$$

iar cînd $\alpha = \infty$ prin

$$|z| > M,$$

η și M fiind razele cercurilor care limitează vecinătățile U_α, U_∞.

Avem astfel, pentru o funcție $f(z)$ de o variabilă, patru cazuri:

1. $\alpha \neq \infty$, $\lambda \neq \infty$. La orice $\varepsilon > 0$ corespunde un $\eta > 0$ astfel că $0 < |z - \alpha| < \eta$ atrage $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

2. $\alpha = \infty$, $\lambda \neq \infty$. La orice $\varepsilon > 0$ corespunde un $M > 0$ astfel că $|z| > M$ atrage $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$.

3. $\alpha \neq \infty$, $\lambda = \infty$. La orice $N > 0$ corespunde un $\eta > 0$ astfel că $|z| < \eta$ atrage $|f(z)| > N$.

4. $\alpha = \infty$, $\lambda = \infty$. La orice $N > 0$ corespunde un $M > 0$ astfel că $|z| > M$ atrage $|f(z)| > N$.

La funcțiile de mai multe variabile vom formula numai cazul analog cu 1 (celelalte sînt în număr mare și se vor trata la fel): $\alpha_1 \neq \infty, \ldots, \alpha_n \neq \infty$, $\lambda \neq \infty$. La orice $\varepsilon > 0$ corespunde un $\eta > 0$ așa că $0 < |z - \alpha_1| < \eta, \ldots$ $\ldots, |z - \alpha_n| < \eta$ atrag împreună $|f(z_1, \ldots, z_n) - \lambda| < \varepsilon$.

---

[1] Avînd în vedere ceea ce am spus cu privire la echivalența vecinătăților, vom putea lua pentru $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$ cercuri egale.

Putem de asemenea reprezenta prin inegalități numai unele dintre vecinătățile despre care este vorba în definiție, astfel, cînd $\lambda \neq \infty$ putem exprima condiția (31) astfel:

La orice $\varepsilon > 0$ corespunde o vecinătate U_α așa fel ca să avem

$$|f(z) - \lambda| < \varepsilon \text{ în } U_\alpha. \tag{32}$$

Următoarea teoremă are o însemnătate principială:

Teorema 1. *Dacă limita funcției $f(z)$ pentru $z \to \alpha$ există, ea este unică.*

Căci să presupunem că ar exista două limite, $\lambda \neq \lambda'$, și să luăm vecinătăți V_λ, $V_{\lambda'}$ disjuncte. Le vor corespunde vecinătății U_α, U'_α astfel că în punctele comune acestor vecinătăți $f(z)$ ia valori conținute atît în V_λ cît și în $V_{\lambda'}$, ceea ce este imposibil.

Noțiunea de continuitate este legată de aceea de limită.

Definiție. *Fiind dată funcția $f(z)$ în D, se zice că ea este continuă în punctul $\alpha \in D$, dacă*

$$\lim_{z \to \alpha} f(z) = f(\alpha). \tag{33}$$

$f(z)$ este continuă în D dacă este continuă în fiecare punct din D.

Așadar continuitatea într-un punct α cere trei condiții: 1° funcția este definită în α, punct limită al lui D; 2° ea are limită în α și 3° limita și valoarea funcției sînt egale. Nu se poate vorbi de continuitate în punctele unde funcția nu este definită, chiar dacă în acele puncte ea are limită.

Un punct α unde $f(z)$ este definită ($\alpha \in D$) se zice *punct de discontinuitate* dacă $\lim_{z \to \alpha} f(z)$ nu există sau dacă această limită există dar este diferită de $f(\alpha)$.

Vom studia teoria continuității paralel cu aceea a limitelor, făcînd să urmeze după fiecare propoziție relativă la limite consecințele ei pentru teoria continuității.

§ 8. Cîteva teoreme referitoare la domeniul de definiție al funcției

Teorema 1. *Noțiunile de limită și de continuitate într-un punct sînt noțiuni locale (infinitesimale).*

Prin aceasta se înțelege că aceste noțiuni implică numai valorile funcției într-o vecinătate arbitrar de mică a punctului considerat. Într-adevăr, dacă restrîngem funcția la o vecinătate arbitrară U^0_α, condiția (31) care definește $\lim_{z \to \alpha} f(z)$ rămîne satisfăcută luînd $U_\alpha \subset U^0_\alpha$, ceea ce este permis, după cum am observat mai sus. Astfel nu intervin decît valorile funcției în U^0_α și limita nu se schimbă dacă modificăm funcția în afara acestei vecinătăți. Tot așa și continuitatea în α.

Din contră, proprietatea unei funcții de a fi continuă într-o mulțime D este de natură *globală*: ea depinde de întreaga mulțime D.

Teorema 2. *Dacă funcția $f(z)$, definită în D, are limită într-un punct α, și dacă $D_1 \subset D$ are de asemenea punctul limită α, atunci $f(z)$ considerată în D_1 are aceeași limită în α.*

Căci λ fiind limita relativă la mulțimea D, asigurată de condiția (31), aceeași condiție este verificată și de valorile funcției în D_1; deci λ este și limită relativă D_1.

Teorema precedentă este un caz particular al acesteia.

Astfel, α fiind un punct interior pentru D, dacă $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lambda$ și $z = x + iy$, $\alpha = a + ib$, avem

$$\lim_{x\to a} f(x + ib) = \lambda, \quad \lim_{y\to b} f(iy + a) = \lambda,$$

limitele în direcțiile axelor există și sînt egale cu λ (fig. 12).

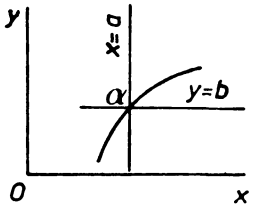

Fig. 12

Mai general, aceasta este adevărat pentru limita într-o direcție oarecare. Mai precis, să considerăm o curbă prin α

$$x = x(t), \quad y = y(t) \qquad \text{(funcții reale)},$$

punctul α corespunzînd la $t = t_0$. Admițînd că în orice U_α se află pe curbă puncte din D diferite de α, avem

$$\lim_{t\to t_0} f(x(t) + iy(t)) = \lambda.$$

Cînd vom voi să indicăm că funcția $f(z)$ este considerată într-o anumită mulțime D (care face parte din domeniul ei de definiție), vom întrebuința notația f_D. Cu această notație teorema precedentă se scrie:

$$\lim_{z\to\alpha} f_D = \lim_{z\to\alpha} f_{D_1} \quad (\alpha \in D,\ \alpha \in D_1,\ D_1 \subset D). \tag{34}$$

De multe ori inexistența limitei unei funcții $f(z)$ se va putea conchide din inexistența limitei într-o direcție, sau din neegalitatea limitelor în două direcții.

Exemple. $\frac{\bar{z}}{z}$ *nu are limită pentru* $z \to 0$. Căci $\frac{x - iy}{x + iy}$ are limite diferite în direcțiile axelor (1 și -1).

La fel $\frac{z}{|z|}$ *pentru* $z \to 0$. Funcția care-i egală cu $\cos\theta + i \sin\theta$ are limite diferite în direcțiile $\theta = \text{const.}$ ($\theta = \arg z$).

$f = \frac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}$ *nu are limită pentru* $z_1 \to 0$, $z_2 \to 0$. Căci pentru $z_2 = 0$, $f \to 1$, iar pentru $z_1 = 0$, $f \to -1$.

$f = e^z$ *nu are limită pentru* $z \to \infty$. Pentru că pe axa reală avem $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ și $\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Tot așa $e^{\frac{1}{z}}$ pentru $z = 0$.

Invers, faptul că limitele în mai multe direcții există și sînt egale nu asigură existența limitei pentru $z \to \alpha$ în complex.

Exemple. $f = \dfrac{z^4}{|z|^4} = \dfrac{(x+iy)^4}{(x^2+y^2)^2}$ are pentru $z \to 0$, *limite egale (cu* 1*) în direcțiile axelor. Dar limita în complex nu există pentru că* $f = \cos 4\theta + i \sin 4\theta$ *are limite* $\neq 1$ *în alte direcții.* La fel $\left(\dfrac{z_1 - z_2}{z_1 + z_2}\right)^2$ pentru $z_1 \to 0$, $z_2 \to 0$.

Ca consecință a teoremei precedente avem

Teorema 3. *Dacă o funcție* $f(z)$ *definită în* D *este continuă în punctul* $\alpha \in D$, *ea rămîne continuă și atunci cînd o considerăm într-o mulțime* $D_1 \subset D$ *care conține punctul* α.

De exemplu pe o curbă prin α.

Observațiile de mai sus se pot repeta și privitor la continuitate.

Teorema 4. *Dacă funcțiile* $f_1(z)$ *și* $f_2(z)$ *sînt continuie în domeniile sau domeniile închise* D_1, D_2 *respectiv, iar în* $D_1 \cap D_2$ *avem* $f_1(z) = f_2(z)$, *atunci funcția*

$$f(z) = \begin{cases} f_1(z) & \text{în } D_1, \\ f_2(z) & \text{în } D_2 \end{cases}$$

este continuă în $D = D_1 \cup D_2$.

Funcția $f(z)$ este uniformă în D. Este de văzut numai că, în orice punct $\alpha \in D$, limitele (despre care se poate vorbi) ale funcțiilor f_D, f_{D_1}, f_{D_2} sînt egale, știindu-se că ultimele două există (nu este deci cazul de a aplica teorema penultimă). Să considerăm întîi cazul cînd D_1 și D_2 sînt domenii închise. Dacă (de exemplu) $\alpha \in D_1$, dar $\alpha \notin D_2$, există o vecinătate U_α disjunctă de D_2 și $\lim\limits_{z\to\alpha} f_D = \lim\limits_{z\to\alpha} f_{D_1}$ pentru că aceste limite se pot considera în U_α, unde $f_D = f_{D_1}$. Iar dacă $\alpha \in D_1$ și $\alpha \in D_2$, condiția (34) este satisfăcută de f_{D_1} într-o vecinătate U_α^1 și de f_{D_2} într-o vecinătate U_α^2, cu $\lambda = f(\alpha)$; acea condiție e deci satisfăcută de f_D într-o vecinătate $U_\alpha \subset U_\alpha^1 \cap U_\alpha^2$ și astfel $\lim\limits_{z\to\alpha} f_{D_1} = \lim\limits_{z\to\alpha} f_{D_2} = \lim\limits_{z\to\alpha} f_D = \lambda$.

Și acum să considerăm cazul cînd D_1 și D_2 sînt domenii și să presupunem (de exemplu) $\alpha \in D_1$. Atunci condiția (31) este satisfăcută de f_{D_1} într-o vecinătate $U_\alpha^1 \subset D_1 \subset D$ cu $\lambda = f(\alpha)$, independent dacă există sau nu puncte de-ale lui D_2 în U_α^1, căci în astfel de puncte $f_1(z) = f_2(z)$; așadar $\lim\limits_{z\to\alpha} f_{D_1} = \lim\limits_{z\to\alpha} f_D = \lambda$.

Facem observația că ipoteza ca D_1 și D_2 să fie ambele domenii sau ambele domenii închise este justificată de faptul că dacă de exemplu D_1 ar fi un domeniu închis, iar D_2 un domeniu, teorema n-ar mai fi în general adevărată. Așa de exemplu, dacă D_1 este discul unitate $|z| \leqslant 1$, iar D_2 coroana circulară $1 < |z| < 2$ și $f_{D_1} = 0$, $f_{D_2} = 1$, atunci f_D (definită ca mai sus) nu mai este continuă pe $|z| = 1$.

§ 9. Criteriul lui Cauchy

Noțiunea de limită în complex se poate reduce la aceea de limită în real prin

Teorema 1. *Fie, în mulțimea* D,

$$f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y),$$

și $\alpha = a + ib$ *un punct limită al mulțimii D. Pentru ca să existe* $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ *finită, este necesar și suficient să existe* $\lim_{x\to a,\, y\to b} u(x, y)$ *și* $\lim_{x\to a,\, y\to b} v(x, y)$ *finite.*

Avem atunci

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lim_{x\to a,\, y\to b} u(x, y) + i \lim_{x\to a,\, y\to b} v(x, y) \tag{35}$$

sau

$$\lim_{z\to\alpha} \operatorname{Re} f = \operatorname{Re} \lim_{z\to\alpha} f, \quad \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Im} f = \operatorname{Im} \lim_{z\to\alpha} f.$$

Să presupunem că există $\lim_{z\to\alpha} f(z) = l + im = \lambda$ finită. Atunci la un $\varepsilon > 0$ corespunde un $\eta > 0$ așa că

$$|z - \alpha| < \eta$$

implică

$$|f(z) - \lambda| < \varepsilon.$$

După inegalitățile (30),

$$\begin{cases} |x - a| < \eta/2 \\ |y - b| < \eta/2 \end{cases} \text{ implică } |z - \alpha| < \eta,$$

$$|f(z) - \lambda| < \varepsilon \text{ implică } \begin{cases} |u(x, y) - l| < \varepsilon, \\ |v(x, y) - m| < \varepsilon. \end{cases}$$

Astfel

$$\begin{cases} |x - a| < \eta/2, \\ |y - b| < \eta/2 \end{cases} \text{ implică } \begin{cases} |v(x, y) - l| < \varepsilon, \\ |v(x, y) - m| < \varepsilon, \end{cases}$$

ceea ce spune că $\lim_{x\to a, y\to b} u(x, y) = l$, $\lim_{x\to a,\, y\to b} v(x, y) = m$ și (35) este demonstrată. La fel reciproca. Demonstrația se face rapid considerînd vecinătăți pătrate.

Teorema se aplică și în cazul $\alpha = \infty$ ($\lim_{z\to\alpha} f(z)$ fiind finită) dacă adoptăm în real aceeași concepție a infinitului ca în complex. Anume, avînd în vedere echivalența cercurilor și pătratelor ca vecinătăți, definim ca vecinătate a punctului ∞ în planul punctelor (x, y) exteriorul unui pătrat de centru $(0, 0)$:

$$|x| > M, \quad |y| > M.$$

Cu această definiție $\lim_{x\to\infty,\, y\to\infty} u(x, y)$ capătă un sens precis și demonstrația teoremei se poate face la fel și în cazul $\alpha = \infty$.

Corolar. *Pentru ca* $f(z)$ *să fie continuă în* $\alpha = a + ib$ *și finită, e necesar și suficient ca funcțiile* $u(x, y) = \operatorname{Re} f$ *și* $v(x, y) = \operatorname{Im} f$ *să fie continue și finite în punctul* (a, b).

Ne vom servi de această teoremă spre a extinde în complex criteriul de convergență al lui Cauchy:

Teorema 2. *Pentru ca să existe* $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ *finită, este necesar și suficient ca: la orice* $\varepsilon > 0$ *să corespundă o vecinătate* U_α *astfel ca*

$$|f(z) - f(z')| < \varepsilon \tag{36}$$

în U_α *(adică (36) are loc pentru orice pereche de punzte* z,z' *din* U_α*).*

Condiția (36) este necesară. Dacă există $\lim_{z\to\alpha} f(z) = \lambda \neq \infty$, avem (32) unde vom lua $\varepsilon/2$ în loc de ε:

$$|f(z) - \lambda| < \varepsilon/2,\ |f(z') - \lambda| < \varepsilon/2 \text{ în } U_\alpha.$$

Dar

$$|f(z) - f(z')| = |[f(z) - \lambda] - [f(z)' - \lambda]| \leqq |f(z) - \lambda| + |f(z') - \lambda|,$$

de unde (36).

Condiția (36) este suficientă. Ea implică, după inegalitățile (30),

$$|u(x, y) - u(x', y')| < \varepsilon,$$

în U_α,

$$|v(x, y) - v(x', y')| < \varepsilon,$$

(U_α putînd fi și o vecinătate pătrată, conținută în acea circulară). Deci, după criteriul Cauchy pentru funcții de variabile reale, există $\lim_{x\to a,\ y\to b} u(x, y)$ și $\lim_{x\to a,\ y\to b} v(x, y)$ finite, adică conform teoremei precedente, există $\lim_{z-\alpha} f(z)$ finită.

Definiție. *Cînd o funcție are limită finită într-un punct* α*, se zice că ea este convergentă în acel punct; cînd are limita* ∞ *se zice că este divergentă.*

Criteriul (36) este așadar o condiție necesară și suficientă de convergență.

§ 10. Limita unui șir infinit

Noțiunea de limită, așa cum a fost prezentată, cuprinde ca un caz particular pe aceea de *limită a unui șir* infinit de numere $S_n (n = 0, 1, 2, ...)$. S_n este într-adevăr o funcție de variabilă n, definită în mulțimea numerelor întregi $\geqq 0$. Această mulțime are un singur punct limită: $n = \infty$ și deci avem de considerat $\lim_{n\to\infty} S_n$. O vecinătate a punctului $n = \infty$ este formată din toate numerele $n > \nu$, ν fiind un întreg $\geqq 0$ (sînt punctele n de pe axa reală, exterioare unui cerc de centru 0). Astfel definiția generală devine în cazul nostru:

$\lim S_n = S \neq \infty$ dacă la orice $\varepsilon > 0$ corespunde un întreg $\nu > 0$ astfel că

$$|S_n - S| < \varepsilon \qquad \text{(convergență)}$$

pentru $n > \nu$;

$\lim S_n = \infty$ dacă la orice $M > 0$ corespunde un ν așa că

$$|S_n| > M \text{ (divergenta)}$$

pentru $n > \nu$.

Se regăsește, așadar, definiția cunoscută, cu deosebirea de care am mai vorbit în cazul divergenței, cînd numerele șirului sînt complexe.

În cazul șirurilor infinite criteriul lui Cauchy se exprimă:

$$|S_{n+p} - S_n| < \varepsilon \tag{37}$$

pentru $n > \nu$ (corespunzînd la ε), p arbitrar $\geqslant 0$.

Într-adevăr, n, $n + p$ este o pereche oarecare din vecinătatea $n > \nu$ a punctului ∞.

Să mai observăm că, deoarece limita funcției S_n de n nu se schimbă cînd restrîngem domeniul de definiție la o vecinătate a punctului ∞ deducem:

Teorema 1. *Natura și limita unui șir infinit nu sînt influențate cînd suprimăm din șir sau îi adăugăm sau modificăm un număr finit de termeni.*

Apoi teorema 2 §8, aplicată la șiruri infinite ne dă:

Teorema 2. *Un șir infinit extras dintr-un alt șir (convergent sau divergent) are aceeași natură ca acesta și (dacă e cazul) aceeași limită.*

Toate acestea se extind la șiruri multiple, $S_{n,n',\ldots}$ unde indicii $n, n', \ldots$ parcurg, fiecare în parte, șirul numerelor întregi $\geqslant 0$. Cu alte cuvinte, avem funcție de variabilele $n, n', \ldots$ al cărui domeniu de definiție este o putere cartezieană a mulțimii numerelor întregi $\geqslant 0$. Singurul punct limită (abstract) este ∞ și vecinătățile lui se pot lua de forma $n > \nu$, $n' > \nu, \ldots$

Convergența $S_{n,n';\ldots} \to S$ (finit) se exprimă așadar prin condiția

$$|S_{n,n',\ldots} - S| < \varepsilon$$

pentru $n > \nu$, $n' > \nu$, ..., (ν corespunzînd la ε).

Criteriul de convergență (36) se poate scrie

$$|S_{n+p,n'+p',\ldots} - S_{n,n',\ldots}| < \varepsilon \tag{38}$$

pentru $n > \nu$, $n' > \nu$, ..., $p, p', \ldots$ arbitrari $\geqq 0$.

Într-adevăr, criteriul (36) este în acest caz

$$|S_{n_1,n'_1,\ldots} - S_{n',\ldots}| < \varepsilon \tag{38'}$$

pentru $n_1 > \nu$, $n'_1 > \nu, \ldots; n > \nu$, $n' > \nu, \ldots$.

El atrage condiția (38). Invers, avem, luînd pentru simplitate doi indici,

$$|S_{n_1,n'_1} - S_{n,n'}| \leqslant |S_{n_1,n'_1} - S_{n,n'_1}| + |S_{n,n'_1} - S_{n,n'}|$$

și cum cei doi termeni din membrul al doilea sînt de forma (38), ei pot fi făcuți $< \varepsilon/2$ luînd n, n_1, n', n'_1 mai mari decît un ν corespunzînd la ε; avem astfel (38').

Un șir multiplu poate fi ordonat în o infinitate de moduri ca șir simplu. Fiind dat, de exemplu, un șir dublu, să așezăm termenii lui într-un tablou pe linii și coloane:

$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	$\ldots S_{0,n'} \ldots$
$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	$\ldots S_{1,n'} \ldots$
$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	$\ldots S_{n,n'} \ldots$

Putem ordona șirul «după diagonale»;

$$\underbrace{S_{0,0}}_{0},\ \underbrace{S_{0,1},\ S_{1,0}}_{1},\ \underbrace{S_{0,2},\ S_{1,1},\ S_{2,0},\ \ldots}_{2}$$

unde, de exemplu, $S_{0,2}$, $S_{1,1}$, $S_{2,0}$ reprezintă diagonala de rang 2.

Mai putem să-l ordonăm «după pătrate»:

$$\underbrace{S_{0,0}}_{0},\ \underbrace{S_{0,1},\ S_{1,1},\ S_{1,0}}_{1},\ \underbrace{S_{0,2},\ S_{1,2},\ S_{2,2},\ S_{2,1},\ S_{2,0},\ \ldots}_{2},$$

unde, de exemplu, $S_{0,1}$, $S_{1,1}$, $S_{1,0}$ formează împreună cu elementul precedent $S_{0,0}$ un pătrat de rang 1, după cum se vede din tabloul de mai sus.

Un şir simplu îşi păstrează natura şi limita cînd i se permută termenii. Într-adevăr, dacă şirul $S_n \to S$ finit, avem pentru $\varepsilon > 0$ un ν aşa că $|S_n - S| < \varepsilon$ pentru $n > \nu$, adică cu excepţia termenilor $S_0, \ldots, S_\nu$. În şirul S'_m ce se obţine prin permutarea făcută, aceşti termeni vor avea un rang maxim $\mu \geqq \nu$. Deci $|S'_m - S| < \varepsilon$ pentru $m > \mu$, ceea ce probează că $S'_m \to S$. Tot aşa cînd $S_n \to \infty$. Apoi, deoarece S_n se obţine prin permutare din S'_m, dacă S_n nu are limită nici S'_m nu poate avea.

Acelaşi lucru nu se poate spune în general despre şirurile multiple. Căci condiţia pentru ca $S_{n,n'} \to S$ are loc cu excepţia unei infinităţi de termeni (în fig. 13, aceşti termeni ocupă o porţiune de felul celei haşurate) şi putem imagina o permutare astfel ca ei să aibă în noul şir un indice n sau n' oricît de mare; raţionamentul de mai sus nu mai este deci aplicabil.

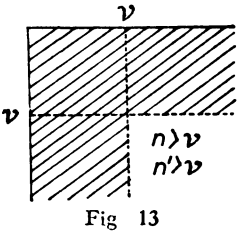

Fig 13

Şirurile simple provenite dintr-un şir multiplu au toate aceeaşi natură şi (eventual) aceeaşi limită, întrucît se deduc unul din altul prin permutări. Această limită însă nu este totdeauna aceeaşi ca a şirului multiplu, căci ar urma ca limita şirului multiplu să nu fie influenţată de permutarea termenilor (şirul obţinut prin permutare dînd evident aceleaşi şiruri simple).

Exemplu. Fie $S_{n,n'} = \dfrac{1}{n+n'}$ *pentru* $n, n' \neq 0$ *şi* $S_{n,n'} = 1$ *pentru* $n = 0$ *sau* $n' = 0$.
Evident, $S_{n,n'} \to 0$, pe cînd şirul obţinut prin ordonarea după diagonale nu e convergent.

§ 11. Calculul cu limite pentru modul şi argument

Mai întîi cîteva teoreme privitoare la moduli:

Teorema 1. *Pentru ca* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$,

este necesar şi suficient ca $\lim_{z \to \alpha} |f(z)| = \begin{cases} 0^{2)} \\ \infty \end{cases}$,

---

2) Atragem atenţia că enunţurile cu acolade ca în teorema 1 reprezintă de fapt două enunţuri: primul enunţ se obţine citind numai cazul superior din acolade, iar al doilea cazul inferior.

Rezultă imediat din definiție.

În particular $z \to \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ dacă $|z| \to \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$ $\left(\text{nu dacă } x \to \begin{matrix} 0 \\ \infty \end{matrix}\right)$.

Teorema 2. *Dacă există* $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$, *avem*

$$|\lim_{z \to \alpha} f(z)| = \lim_{z \to \alpha} |f(z)|. \tag{39}$$

Cazul $\lambda = \infty$ face parte din teorema precedentă. Dacă $\lambda \neq \infty$, la orice $\varepsilon > 0$ corespunde o vecinătate U_α în care $|f(z) - \lambda| < \varepsilon$. Dar, după inegalitatea (29) avem

$$||f| - |\lambda|| \leqq |f - \lambda|.$$

Deci

$$||f| - |\lambda|| < \varepsilon \text{ în } U_\alpha,$$

ceea ce probează că $\lim\limits_{z \to \alpha} |f| = |\lambda|$.

Reciproc, din faptul că există $\lim |f| \neq 0, \infty$, nu urmează că există și $\lim f$.

Exemplu. $f = \dfrac{z}{|z|}$ *pentru* $z \to 0$. Aici $|f| \to 1$, dar f n-are limită.

Teorema 3. *Dacă* $f(z)$ *este continuă în* α *și* $|f(z)|$ *este continuă în* α. Consecință a teoremei precedente.

Teorema 4. *Fie* $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$. *Dacă* $\lambda \neq \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases}$, *fiind dat un număr* $\begin{cases} 0 < m < |\lambda| \\ M > |\lambda| \end{cases}$ *există o vecinătate* U_α *în care*

$$|f(z)| \begin{cases} > m \\ < M \end{cases}.$$

Să demonstrăm cazul inferior al teoremei. Există o vecinătate U_α în care

$$|f(z) - \lambda| < \varepsilon = M - |\lambda|,$$

(căci $M - |\lambda| > 0$) ceea ce atrage (vezi § 4)

$$|f(z)| < |\lambda| + \varepsilon = M.$$

Geometric rezultatul se obține restrîngînd pe $w = f(z)$ într-o vecinătate V_λ destul de mică pentru ca să se afle în discul de rază M cu centrul în 0 (în care $|w| < M$); ceea ce se va obține luînd pe z într-o anumită vecinătate U_α (vezi fig. 14).

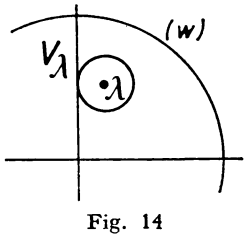

Fig. 14

Demonstrație analoagă în cazul superior.

Dacă convenim să spunem că o funcție este *mărginită într-un punct* α cînd există o vecinătate U_α în care funcția este mărginită (ceea ce înseamnă că modulul funcției e mărginit în U_α), cazul inferior al teoremei se enunță:

O funcție care are limită finită într-un punct α, și în particular o funcție continuă și finită în punctul α, este mărginită în acel punct.

Bineînțeles, teorema se aplică la o funcție $f(z)$ continuă în α, luîndu-se $f(\alpha)$ în locul lui λ.

Încă o observație: dacă $|f| < |g|$ sau $|f| \leqslant |g|$ și funcțiile f, g au limite pentru $z \to \alpha$, putem conchide în ambele cazuri

$$|\lim f| \leqslant |\lim g|$$

pentru că după teorema 2 aceasta revine la

$$\lim |f| \leqslant \lim |g|.$$

În particular, din $|f| \leqslant c$ (const.) urmează, cînd $\lim f$ există, $|\lim f| \leqslant c$. În general, inegalitățile între moduli persistă la limită dacă se adaogă și semnul $=$, și dacă funcțiile angajate sub bare au limite.

Iată acuma teoreme referitoare la argumente:

Teorema 5. *Dacă* $\lim\limits_{z \to \alpha} f = \lambda \neq 0, \infty$, *atunci*

$$\lim (\arg f) = \arg (\lim f) \tag{40}$$

sub condiția ca toate argumentele lui f să fie restrînse (cel puțin într-o vecinătate U_α*) la un interval semiînchis de amplitudine* 2π, *conținînd în interior* $\arg (\lim f)$.

Într-adevăr, cum $\lambda \neq 0, \infty$, $\arg \lambda$ este complet determinat prin condiția de a se afla în interiorul unui asemenea interval și tot așa $\arg f$, într-o vecinătate U_α unde $f \neq 0, \infty$. Dacă, de exemplu λ nu este un număr negativ, putem lua intervalul $(-\pi, \pi]$ (închis la extremitatea a doua, deschis la cea dintîi), iar dacă λ este un număr negativ putem lua intervalul $[0, 2\pi)$. Avem prin ipoteză

$$|f| \{\cos (\arg f) + i \sin (\arg f)\} \to |\lambda| \{\cos (\arg \lambda) + i \sin (\arg \lambda)\}.$$

Cum

$$\operatorname{Re} f \to \operatorname{Re} \lambda, \quad \operatorname{Im} f \to \operatorname{Im} \lambda, \quad |f| \to |\lambda| \neq 0, \infty$$

urmează (teorema 2) după împărțirea cu $|f|$.

$\cos (\arg f) \to \cos(\arg \lambda)$, $\sin(\arg f) \to \sin(\arg \lambda)$ de unde decurge (40) mulțumită alegerii argumentelor.

Din teorema aceasta și teorema 2 rezultă imediat:

Teorema 6. *Pentru ca* $\lim\limits_{z \to \alpha} f = \lambda \neq 0, \infty$, *este necesar și suficient ca*

$$\lim |f| = |\lambda| \neq 0, \infty \text{ și } \lim (\arg f) = \arg \lambda,$$

determinările argumentelor fiind alese ca în teorema precedentă în cazul condiției necesare.

Suficiența rezultă imediat din continuitatea funcțiilor $\cos x$, $\sin x$ și nu pretinde nici o precauțiune cu privire la argumente.

În cazurile $\lambda = 0$ și $\lambda = \infty$, avem numai condiția necesară și suficientă dată de prima teoremă. Atunci $\arg \lambda$ este complet nedeterminat și tot așa poate fi $\lim (\arg f)$.

Corolar. *Pentru ca* $f(z)$ *să fie continuă, finită și* $\neq 0$ *în* α, *e necesar și suficient ca funcțiile de z:* $|f|$ *și* $\arg f$ *(determinat ca mai sus) să fie continue și finite, iar prima* $\neq 0$, *în* α.

§ 12. Calculul cu limite pentru mai multe funcţii şi aplicaţii la continuitate

Teorema 1. *Fie $f(z)$, $g(z)$, ... funcţii în număr finit posedînd limite în punctul α (în vecinătatea căruia funcţiile sînt definite); în cazul cînd aceste limite sînt finite, atunci în α există;*

1. $\lim (f+g+\ldots) = \lim f + \lim g + \ldots$,
2. $\lim (f \cdot g \ldots) = \lim f \cdot \lim g' \ldots$,
3. $\lim \frac{1}{g} = \frac{1}{\lim g}$ *sub condiţia suplimentară* $\lim g \neq 0$,
4. $\lim f^n = (\lim f)^n$, *n întreg* $\geqq 0$;

iar în unele din cazurile exceptate;

5. *dacă* $\lim f = \infty$ *şi* g *e mărginit în* α *avem* $\lim (f+g) = \infty$;
6. *dacă* $\lim f = \infty$ *şi* $|g| > N > 0$ *într-o vecinătate* U_α^0, *avem* $\lim fg = \infty$,
7. *dacă* $\lim f = 0$ *şi* g *e mărginit în* α, *avem* $\lim fg = 0$,
8. *dacă* $\lim g = \infty$, *avem* $\lim \frac{1}{g} = 0$,
9. *dacă* $\lim g = 0$, *avem* $\lim \frac{1}{g} = \infty$.

În primele patru cazuri demonstraţiile sînt aceleaşi ca în real (sau reducem teorema la cea din real cu ajutorul primei teoreme din § 9).

În celelalte cazuri avem după cum urmează:

5) Prin ipoteza $|g| < N$ (fix) într-o vecinătate U_α^0, iar la un $M > N$ corespunde o vecinătate $U_\alpha \subset U_\alpha^0$ astfel că $|f| > M + N$. Deci $|f+g| \geqq |f| - |g| > (M+N) - N = M$ în U_α.

6) $|f| > \frac{M}{N}$ într-o vecinătate $U_\alpha \subset U_\alpha^0$. Deci $|fg| > \frac{M}{N} \cdot N = M$ în U_α.

7) Prin ipoteză, $|g| < N$ (fix) într-o vecinătate U_α^0, iar la un $\varepsilon > 0$ corespunde o vecinătate $U_\alpha \subset U_\alpha^0$ astfel că $|f| < \frac{\varepsilon}{N}$ în U_α. Deci $|fg| < \frac{\varepsilon}{N} \cdot N = \varepsilon$ în U_α.

8) Prin ipoteză, la $\varepsilon > 0$ corespunde o vecinătate U_α în care $|g| > \frac{1}{\varepsilon}$. Deci $\left|\frac{1}{g}\right| < \varepsilon$ în U_α.

9) Prin ipoteză, la $M > 0$ corespunde U_α în care $|g| < \frac{1}{M}$. Deci $\frac{1}{g} > M$ în U_α.

În cazurile 5 şi 7 condiţia este satisfăcută cînd există $\lim g \neq \infty$, iar în cazul 6 cînd există $\lim g \neq 0$ (teorema 4, § 11).

Atunci cînd nu se poate aplica nici una din regulile precedente nu se poate afirma nimic în general.

Exemple. a. *Pentru sume*: 1. $f = z$, $g = z$, $z \to \infty$; $f \to \infty$, $g \to \infty$ $f + g \to \infty$.

2. $f = z$, $g = -z$, $z \to \infty$; $f \to \infty$, $g \to \infty$, $f + g \to 0$.

b. Pentru produse 1. $f = z^{-1}$, $g = z$, $z \to 0$; $f \to \infty$, $g \to 0$, $fg \to 1$.

2. $f = z^2$, $g = \dfrac{1}{z}$, $z \to \infty$; $f \to \infty$, $g \to 0$, $fg \to \infty$.

3. $f = \bar{z}$, $g = \dfrac{1}{z}$, $z \to 0$; $f \to 0$, $g \to \infty$, *fg nu are limită.*

4. $f = z - \alpha$, $g = e^{\frac{1}{z-\alpha}}$, $z \to \alpha$; $f \to 0$, g nu *este mărginit în* α, *fg nu are limită.*

5. $f = z$, $g = \dfrac{z}{\bar{z}}$, $z \to 0$; $f \to 0$, *g nu are limită dar e mărginit în* 0, $fg \to 0$.

6. $f = z^{-1}$, $g = \bar{z}$, $z \to 0$; $f \to \infty$, $g \to 0$ *deci nu există un* $M > 0$ *așa ca* $|g| > M$ *într-o vecinătate* V_0, fg *nu are limită.*

Observație. Se constată oarecare deosebiri față de regulele cunoscute în real. Acolo $\lim \dfrac{1}{g}$ poate să nu existe cînd $\lim g = 0$. Exemplu $\dfrac{1}{x}$ nu are limită pentru $x \to 0$ (ci numai limite la dreapta și la stînga); în complex însă $\dfrac{1}{z} \to \infty$. În real, $f + g \to +\infty$ cînd $f \to +\infty$ și $g \to +\infty$; în complex nu există o regulă asemănătoare (vezi exemplele de mai sus). Aceste deosebiri se explică prin concepțiile diferite asupra infinitului.

Regulele precedente, aplicate la funcții continue, conduc la

Teorema 2. *Fie* $f(z)$, $g(z)$, ... *funcții în număr finit, continue și finite în punctul* α. *Sînt continue în acest punct funcțiile;*

1. $f + g + \ldots$,
2. $f \cdot g \ldots$,
3. $\dfrac{1}{g}$ *sub condiția suplimentară* $g(\alpha) \neq 0$,
4. f^n n *întreg* > 0.

5. *De asemenea, fg este continuă în* α *cînd f este continuă în* α, $f(\alpha) = 0$ *și g e mărginită în* α.

În celelalte cazuri (care de altfel prezintă un interes redus), funcțiile $f + g$, fg, $\dfrac{1}{g}$ nu sînt definite în α prin aceste expresii, chiar dacă f și g sînt definite pentru că simboli ca $\infty + g(\alpha)$, $\infty \cdot g(\alpha)$, $\dfrac{1}{\infty}$, $\dfrac{1}{0}$ nu au sens); aceste funcții vor deveni continue numai dacă le vom defini egale cu limitele lor în α.

Teorema 3. *(Limita unei funcții compuse). Fie* $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$, *funcții definite în mulțimile* D_1, ..., D_n *avînd punctul limită comun* α; *fie* $\lim\limits_{z\to\alpha} f_1 = \lambda_1$,... ..., $\lim\limits_{z\to\alpha} f_n = \lambda_n$ *finite. Fie* $F(w_1, \ldots, w_n)$ *o funcție definită în vecinătatea punctului* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *continuă în* $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ *și așa fel încît* $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \mu$. *Atunci*

$$\lim_{z\to\alpha} F(f_1(z), \ldots, f_n(z)) = \mu. \tag{41}$$

Demonstrația e simplă. Prin ipoteză, dîndu-se o vecinătate V_μ, există niște vecinătăți $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_n}$ (în planele $(w_1), \ldots, (w_n)$) astfel că $w_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots, w_n \in V_{\lambda_n}$ atrag $F \subset V_\mu$. Apoi există niște vecinătăți $U_\alpha^1, \ldots, U_\alpha^n$ astfel că $z \in U_\alpha^1, \ldots, U_\alpha^n$ atrage $w_1 \in V_{\lambda_1}, \ldots, w_n \in V_{\lambda_n}$. Dacă U_α este o vecinătate comună vecinătăților $U_\alpha^1, \ldots, U_\alpha^n$, $z \in U_\alpha$ atrage $F \in V_\mu$, ceea ce arată că avem (41).

Observația 1. Regulile 1—4 privitoare la limite se pot deduce ușor din teorema aceasta luînd funcții F potrivite. De exemplu: $F = w_1 + w_2$ pentru $w_1 \to \lambda_1$, $w_2 \to \lambda_2$ finite are limita $\lambda_1 + \lambda_2$ (se vede imediat). Deci $\lim\limits_{z \to \alpha} (f_1 + f_2) = \lim\limits_{z \to \alpha} f_1 + \lim\limits_{z \to \alpha} f_2$ etc.

Observația 2. De multe ori căutarea unei limite este ușurată printr-o schimbare de variabilă. Fie $f(z)$ o funcție continuă în α și așa fel încît $f(\alpha) = \lambda$. Să facem schimbarea de variabilă $z = z(z')$, obținînd funcția $f(z(z'))$. Dacă $\lim\limits_{z' \to \alpha'} z(z') = \alpha$ ($f(z)$ fiind definită într-o vecinătate a punctului α) avem, în virtutea teoremei, $\lim\limits_{z' \to \alpha'} f(z(z') = \lambda$.

Reciproc, existența pentru $\lim\limits_{z \to \alpha} f(z)$ este asigurată dacă $f(z(z')$ este continuă în α' și dacă ecuația $z(z') = z$ are în vecinătatea lui α o singură soluție $z' = z'(z)$ astfel că $\lim\limits_{z \to \alpha} z'(z) = \alpha'$ (se aplică teorema funcției compuse, $f(z(z'(z))) = f(z)$).

De exemplu, $z = \dfrac{1}{z'} \to \infty$ pentru $z' \to 0$, deci

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \lim_{z \to 0} f\left(\frac{1}{z}\right)$$

dacă $f\left(\dfrac{1}{z}\right)$ este continuă în 0 sau $f(z)$ la ∞. Transformarea $z = \dfrac{1}{z'}$ va fi întrebuințată deseori spre a aduce punctul ∞ la distanță finită.

Din teorema demonstrată urmează

Teorema 4. *(Continuitatea funcțiilor compuse). Dacă $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sînt continue în punctul α (comun domeniilor de definiție) și funcția $F(w_1, \ldots, w_n)$ e continuă în punctul $(w_1 = f_1(\alpha), \ldots, w_n = f_n(\alpha))$, fiind definită într-o vecinătate a acestui punct, atunci funcția compusă $F(f_1(z), \ldots, f_n(z))$ este continuă în α.*

Din teorema 2 urmează:

Teorema 5. *Un polinom este continuu peste tot (unde este definit, adică la distanță finită).*

O funcție rațională este continuă peste tot unde este definită, adică cu excepția punctului de la ∞ și a celor care anulează numitorul.

Într-adevăr, z este evident o funcție continuă, deci și z^n (n întreg > 0); deci și un monom; deci și o sumă de monoame, adică un polinom; și un cît de polinoame, adică o funcție rațională.

§ 13. Continuitate uniformă

Vom aminti întîi următoarea teoremă din analiza reală:

Teorema 1 *(Weierstrass). O funcție de variabile reale, continuă într-o mulțime închisă și mărginită, are în aceea mulțime un maxim absolut și un minim absolut.*

(Se zice că $f(x, y, ...)$ are un *maxim absolut* în D dacă există un punct $(\xi, \eta, ...)$ în D astfel că $f(\xi, \eta, ...) \geqq f(x, y, ...)$ în D, adică este vorba de o noţiunea globală. Se zice că f are un *maxim relativ* în punctul $(\xi, \eta, ...)$ dacă există o vecinătate a acestuia unde $f(\xi, \eta, ...) \geqq f(x, y, ...)$ adică este vorba de o noţiune locală). Pentru noi e importantă următoarea consecinţă.

Teorema 2. *Dacă $f(z)$ este continuă în domeniul închis D, modulul $|f(z)|$ are în D un maxim absolut şi un minim absolut.*

Căci $|f(z)|$ este o funcţie continuă de x, y în D. Nu este necesar să presupunem că domeniul este mărginit (în planul (z)), căci ne putem referi la sfera lui Riemann, unde orice domeniu apare mărginit şi $|f(z)|$ devine o funcţie continuă de punctul Z al sferei.

Maximul este ∞ numai atunci cînd $f(z)$ ia această valoare în D. Deci:

Corolarul 1. *O funcţie continuă şi finită într-un domeniu închis este mărginită în acel domeniu.*

Pentru un motiv analog:

Corolarul 2. *Dacă $f(z)$ este continuă şi $\neq 0$ într-un domeniu închis $\bar{D}$, există un $m > 0$ astfel că $|f(z)| > m$ în $\bar{D}$.*

Trebuie să atragem atenţia că, în teorema precedentă, cele două condiţii relative la f şi domeniu sînt indispensabile.

Exemplu. $f = \frac{1}{z}$ este definită în tot planul lui Gauss, cu excepţia punctelor 0 şi ∞, şi este continuă, domeniul de definiţie nu e închis. Funcţia $|f(z)|$ nu are nici maxim nici minim. Dar dacă definim $f(0) = \infty, f(\infty) = 0$, obţinem o funcţie continuă în tot planul lui Gauss, şi care are maximu ∞ şi minimul zero.. Iar dacă definim $f(0) = \alpha \neq \infty$, $f(\infty) = \beta \neq 0$ obţinem o funcţie discontinuă şi $|f|$ iarăşi nu are maxim nici minim.

Teorema 3. *(Heine). Dacă funcţia $f(z)$ este continuă şi finită în domeniul închis şi mărginit $\bar{D}$, la orice $\varepsilon > 0$ corespunde un $\delta > 0$ astfel că $|z - z'| < \delta$ atrage $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$ în $\bar{D}$.*

Această proprietate se numeşte *continuitate uniformă.*

Fiind dat un punct $\alpha \in \bar{D}$, există un $\eta > 0$ astfel că $|z - \alpha| < \eta$ atrage $|f(z) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Urmează că în cercul $U_\alpha(\eta)$ avem

$$(A) \qquad |f(z) - f(z')| < \varepsilon$$

căci $|f(z) - f(z')| = |[f(z) - f(\alpha)] - [f(z') - f(\alpha)]| \leqq |f(z) - f(\alpha)| + |f(z') - f(\alpha)|$.

Fie η raza maximă a cercurilor U_α cu această proprietate; η este o funcţie de punctul α: $\eta = \eta(\alpha)$, pozitivă în D: $\eta(\alpha) > 0$.

Vom arăta că această funcţie este continuă. Fie z un punct în cercul U_α de rază maximă $\eta(\alpha)$ (fig. 15). În discul de centru z, tangent interior la U_α şi deci de rază $\eta(\alpha) - |z - \alpha|$, proprietatea A are loc. Deci ($\eta(z)$ fiind raza maximă a discurilor de centru z unde are loc proprietatea A), avem

$$\eta(z) \geqq \eta(\alpha) - |z - \alpha|$$

și aceasta rămîne adevărat chiar dacă z nu este în interiorul lui U_α (membrul doi fiind atunci $\leqslant 0$). Schimbînd α cu z avem și

$$\eta(\alpha) \geqq \eta(z) - |z - \alpha|.$$

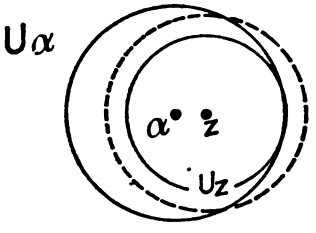

Fig. 15

Așadar

$$-|z - \alpha| \leqq \eta(z) - \eta(\alpha) \leqq |z - \alpha|$$

sau

$$|\eta(z) - \eta(\alpha)| \leqq |z - \alpha|.$$

De aici rezultă continuitatea funcției η în α. Vom avea $|\eta(z) - \eta(\alpha)| < \varepsilon'$ luînd $|z - \alpha| < \varepsilon'$.

Cum $\eta(z)$ este continuă și > 0 în $\bar{D}$ închis și mărginit, există un $\delta > 0$ astfel că $\eta(z) > \delta$ în $\bar{D}$. Atunci, dacă $|z - z'| < \delta$, z' este în cercul U_z de rază $\eta(z)$ și $|f(z) - f(z')| < \varepsilon$.

Observația 1. Condiția ca $\bar{D}$ să fie mărginit nu a intervenit explicit în demonstrație. Ea este cerută de enunțul însăși al teoremei: Dacă $\bar{D}$ n-ar fi mărginit, ar conține punctul ∞ (fiind închis) și distanța $|z - z'|$ nu ar avea sens pentru $z = \infty$.

Tot așa condiția ca f să fie finită.

Exemplu. $f = \dfrac{1}{z}$ *în discul* $|z| \leq 1$ *minus punctul* 0. f este continuă, D nu e închis. Fiind dat $\varepsilon > 0$, există puncte z, z' astfel că, oricare ar fi $\delta > 0$, $|z - z'| < \delta$ și $|f(z) - f(z')| > \varepsilon$ în același timp. De exemplu, luînd $z = \dfrac{\delta}{2^n}$, $z' = -\dfrac{\delta}{2^n}$ avem $|z - z'| = \dfrac{\delta}{2^{n-1}} < \delta$ $(n > 1)$ și $|f(z) - f(z')| = \dfrac{2^{n+1}}{\delta} > \varepsilon$ cu n destul de mare. Continuitatea nu este deci uniformă.

Observația 2. Rezultă că, dacă o funcție este continuă și finită într-un domeniu mărginit D, continuitatea uniformă a funcției nu este sigură decît într-un domeniu închis $\bar{D}_1 \subset D$.

Teorema lui Heine se aplică și funcțiilor de mai multe variabile, de exemplu $f(z, z')$ continuă și finită într-un domeniu închis și mărginit $\bar{D} \times \bar{D}'$. Demonstrația se face la fel.

Teorema este un caz particular al teoremei generale relativă la reprezentări continue a unei mulțimi compacte dintr-un spațiu metrizabil în alt spațiu metrizabil.

Exerciţii

1. *$P(z)$ fiind un polinom,* $\lim_{z\to\infty} P(z) = \infty$.

R. Se scrie $P(z) = z^n\left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}\right)$.

2. *Se consideră funcţia raţională* $R(z) = \frac{a_0 z^m + \ldots + a_m}{b_0 z^n + \ldots + b_n}$. *Avem*

$$\lim_{z\to\infty} R(z) = \begin{cases} \infty & m > n, \\ a_0/b_0 & m = n, \\ 0 & m < n. \end{cases}$$

R. Se scrie $R(z) = z^{m-n}\dfrac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_m}{z^m}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_n}{z^n}}$.

3. *Fiind dat şirul* $w_n \to 0$ *se formează şirul*

$$w'_n = a_{n0}w_0 + a_{n1}w_1 + \ldots + a_{nn}w_n,$$

unde coeficienţii $a_{np}(n = 0, 1, \ldots;\ p = 0, \ldots n)$ *satisfac condiţiile*

A. *Pentru fiecare* $p \geqq 0$, $a_{n,p} \to 0$ *cînd* $n \to \infty$.

B. *Există o constantă* M *astfel că*

$$|a_{n,0}| + |a_{n,1}| + \ldots + |a_{n,n}| < M$$

pentru orice n. *Atunci*

$$w'_n \to 0. \quad (Töplitz).$$

R. Pentru $\varepsilon > 0$ există un μ aşa că $|w_n| < \frac{\varepsilon}{2M}$ pentru $n > \mu$, şi urmează

$$|w'_n| < |a_{n,0}w_0 + \ldots + a_{n,\mu}w_\mu| + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pentru } n > \mu.$$

Cum $a_{n,0} \to 0, \ldots, a_{n,\mu} \to 0$, deci $a_{n,0}w_0 + \ldots + a_{n,\mu}w_\mu \to 0$, există un $\nu > \mu$ astfel că, $|a_{n,0}w_0 + \ldots + a_{n,\mu}w_\mu| < \frac{\varepsilon}{2}$, $n > \nu$ şi deci $|w'_n| < \varepsilon$, $n > \nu$.

4. *Dacă* $w_n \to \lambda$ şi $w'_n = a_{n,0}w_0 + \ldots + a_{n,n}w_n$, *unde coeficienţii* a_{np} *satisfac condiţiile A, B şi*

C. $$a_{n,0} + a_{n,1} + \ldots + a_{n,n} \to 1,$$

atunci $w_{n'} \to \lambda$. *(Töplitz)*

R. Urmează din $w_n = (a_{n,0} + \ldots + a_{n,n})\lambda + [a_{n,0}(w_0 - \lambda) + \ldots + a_{n,n}(w_n - \lambda)]$ aplicînd părţii a doua prima teoremă a lui Töplitz.

5. *Dacă* $w_n \to \lambda$, $\dfrac{w_0 + \ldots + w_n}{n+1} \to \lambda$.

R. Urmează din exerciţiul 4 luînd $a_{n,p} = \dfrac{1}{n+1}$.

6. *Fiind date şirurile* $\alpha_n \neq 0$ şi β_n, *dacă*

1° $\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \to \infty$ *şi*

2° *există un număr* M *aşa că* $\dfrac{|\alpha_0| + \ldots + |\alpha_n|}{|\alpha_0 + \ldots + \alpha_n|} < M$, *avem*

$\dfrac{\beta_0 + \ldots + \beta_n}{\alpha_0 + \ldots + \alpha_n} \to \lambda$ *dacă* $\dfrac{\beta_n}{\alpha_n} \to \lambda$. *(Jensen)*

R. Se ia în exemplu 4 $w_n = \dfrac{\beta_n}{\alpha_n}$, $a_{n,\,p} = \dfrac{\alpha_p}{\alpha_0 + \ldots + \alpha_n}$

În locul condiției 2° se poate presupune $\alpha_n > 0$.

7. $\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} \to \dfrac{1}{p+1}$, p *întreg* $\geqq 0$.

R. Se ia în exercițiul 6, $\beta_n = n^p$, $\alpha_n = n^{p+1} - (n-1)^{p+1}$ $(n > 0)$, $\alpha_0 = 0$ și se observă că

$$\frac{\beta_n}{\alpha_n} = \frac{n^p}{n^{p+1} - (n-1)^{p+1}} = \frac{n^p}{(p+1)\,n^p + \ldots} \to \frac{1}{p+1}.$$

8. $\dfrac{\log n!}{\log n^n} \to 1$

R. Se ia în exercițiul 6, $\beta_n = \log n$, $\alpha_n = n\log n - (n-1)\log(n-1)$ și se observă că

$$\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} = \frac{\log(n+1)}{\log\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n + \log(n+1)} \to 1 \text{ deoarece } \log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to 1.$$

9. $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha^n = \begin{cases} 0 \text{ } \textit{cînd} \text{ } |\alpha| < 1, \\ \infty \text{ } \textit{cînd} \text{ } |\alpha| > 1, \\ \textit{nu există cînd } |\alpha| = 1 \textit{ și } \alpha \neq 1, \\ 1 \text{ } \textit{cînd} \text{ } \alpha = 1. \end{cases}$

10. *Dacă* $x \to 0$,

$$\frac{x}{\log(1-x)} \to -1.$$

11. *Dacă polinomul* $P(z)$ *are gradul mai mare decît al polinomului* $Q(z)$, *avem* $|P(z)| > |Q(z)|$ *pentru* $|z|$ *destul de mare.*

R. Deoarece $\dfrac{P(z)}{Q(z)} \to$ cu ∞ $z \to \infty$.

12. *Se consideră domeniile determinate de o iperbolă. În care din ele se află punctul de la* ∞ ?

R. În nici unul pentru că nu conține o vecinătate a acestui punct. El se află însă pe fiecare ramură a iperbolei.

Convergența seriilor și produselor infinite

§ 14. Serii (generalități)

Definiție. *Fiind dat un șir simplu sau multiplu* $w_{n_1, \ldots, n_k}$, *simbolul*

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{n_k=0}^{\infty} w_{n_1, \ldots, n_k},$$

numit serie (simplă, dublă, ...), reprezintă șirul numerelor

$$S_{n_1, \ldots n_k} = \sum_{0}^{n_1} \cdots \sum_{0}^{n_k} w_{n_1, \ldots, n_k}$$

numite sumele parțiale ale seriei. Numerele $w_{n_1, \ldots n_k}$ *se numesc* termenii *seriei. Dacă există*

$$\lim_{n_1\to\infty, \ldots, n_k\to\infty} S_{n_1, \ldots, n_k} = S,$$

aceasta se numeşte s u m a s e r i e i *şi se scrie atunci*

$$S = \sum_0^\infty \cdots \sum_0^\infty w_{n_1, \ldots, n_k}.$$

În acest caz, seria se zice, ca şi şirul $S_{n_1, \ldots, n_k}$, c o n v e r g e n t ă cînd $S \neq \infty$, d i v e r g e n t ă *cînd* $S = \infty$ (în real, cînd $S = \pm\infty$) . Dacă limita considerată nu există, seria se zice o s c i l a t o a r e.

Cu toate că se vorbeşte de suma unei serii, o serie nu este o sumă, pentru că nu are proprietăţile unei sume (finite) în general.

În locul simbolului condensat de sumaţie, putem scrie în cazul unei serii simple:

$$\sum_0^\infty w_n = w_0 + w_1 \ldots + w_n + \ldots$$

O serie dublă poate fi reprezentată printr-o schemă ca un şir:

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty w_{n,n'} = \begin{array}{|l|l|} \hline w_{0,0} + w_{0,1} + \ldots + w_{0,n'} & + \ldots \\ + w_{1,0} + w_{1,1} + \ldots + w_{1,n'} & + \ldots \\ \hline + w_{n,0} + w_{n,1} + \ldots + w_{n,n'} & + \ldots \\ \hline \end{array} \qquad (42)$$

o sumă parţială $S_{n,n'}$ a seriei este suma termenilor dintr-un dreptunghiu. Termenii ei pot fi aşezaţi în serie simplă, după diagonale sau pătrate etc... În aceste serii putem grupa termenii din diagonale respectiv din pătrate, formînd astfel seriile

$$w_{0,0} + (w_{0,1} + w_{1,0}) + (w_{0,2} + w_{1,1} + w_{2,0}) + \ldots \qquad (43)$$

$$w_{0,0} + (w_{0,1} + w_{1,1} + w_{1,0}) + (w_{0,2} + w_{1,2} + w_{2,2} + w_{2,1} + w_{2,0}) + \ldots \qquad (44)$$

În (43) termenul de indice p este suma termenilor $w_{n,n'}$ cu $n + n' = p$; zicem că seria dublă este astfel sumată *după diagonale.*

În (44) termenul de indice p este suma termenilor $w_{n,n'}$ cu un indice (cel puţin) egal cu p ,iar celălalt indice $\leqslant p$; zicem că această serie sumează seria dublă *după pătrate.* În general nu e nici o legătură între natura sau suma seriei duble şi aceea a seriilor simple deduse din ea; cu excepţia seriei (44).

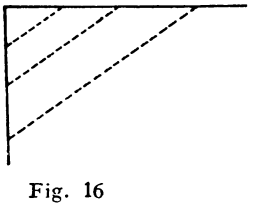

Fig. 16

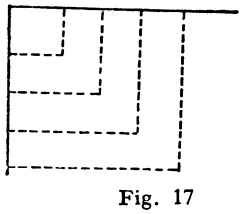

Fig. 17

Seria (44) avînd sumele parţiale $S_{n,n'}$, urmează:

Teorema 1. *Dacă se sumează o serie dublă după pătrate, seria simplă astfel obţinută are aceeaşi sumă ca şi cea dublă, cînd aceasta este convergentă*

sau divergentă, şi în general aceasta este adevărat pentru orice serie multiplă cînd e sumată „după cuburi".

Reciproca nu este adevărată (exemplul 3).

Seria dublă (42) conţine încă seriile simple *orizontale* $\sum_{n'=0} w_{n,n'}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *şi verticale* $\sum_{n=0} w_{n,n'} (n' = 0, 1, \ldots)$.

Teorema 2. *Cînd (de exemplu) seriile orizontale ale unei serii duble sînt convergente, sumele lor* $S_n = \sum_{n'=0}^{\infty} w_{n,n'}$ *formează la rîndul lor o serie convergentă,* $\sum_{0}^{\infty} S_n = S$, *a cărei sumă este egală cu aceea a seriei duble. Se zice că aceasta a fost sumată după orizontale. La fel, o serie dublă poate fi (uneori) sumată după verticale (vezi exemplul 2).*

Toate acestea se extind uşor la serii multiple oarecare.

Demonstraţia e simplă. Fiind dat $\varepsilon > 0$, avem $|S_{n,n'} - S| < \varepsilon$ pentru $n > \nu$, $n' > \nu$. Făcînd $n' \to \infty$ urmează $\left|\sum_{0}^{n} S_k - S\right| \leqq \varepsilon$ pentru $n > \nu$, cee ce arată că $\sum S_n$ converge la S.

Într-o serie putem exclude de la sumaţie un număr finit de valori ale indicilor sau grupuri de valori (cînd seria e multiplă); aceasta revine la a considera nuli termenii excluşi. Astfel putem începe o serie simplă cu termenul de rang $1: \sum_{1}^{\infty} w_n$, ceea ce revine la a pune $w_0 = 0$ etc.

Teorema 3. *Natura unei serii nu se schimbă dacă se neglijează (adaugă) un număr finit de termeni sau chiar, în cazul unei serii duble, un număr finit de serii orizontale ori verticale convergente etc. Dacă seria dată converge la o sumă s şi suma termenilor (seriilor) ce am neglijat (adăugat) este S, suma seriei rămase este s-S (respectiv s + S).*

Să luăm cazul unei serii duble, în care neglijăm un număr finit de termeni. Seria rămasă se poate obţine înlocuind cu 0 aceşti termeni şi sumele ei parţiale sînt $\bar{s}_{n,n'} = s_{nn'} - S$, dacă n, n' sînt destul de mari pentru ca $s_{nn'}$ să cuprindă termenii neglijaţi. Rezultă că $\lim s_{nn'}$ şi $\lim \bar{s}_{n,n'}$ există în acelaşi timp sau nu, şi că în cazul cînd există, $\bar{s} = s - S$.

Să presupunem apoi că neglijăm o serie orizontală, $\sum_{0}^{\infty} w_{0,n'} = S_0$, convergentă. Notînd cu $W_{0,n'}$ sumele parţiale ale acesteia, avem $\bar{s}_{n,n'} = s_{n,n'} - W_{0,n'}$ şi cum $W_{0,n} \to S_0$, aceeaşi concluzie subsistă la limită, şi în caz de convergenţă $\bar{s} = s - S_0$. Neglijînd apoi o altă serie orizontală, vom avea la fel $\bar{s} = s - S_0 - S_1$ etc.

Exemple. 1. *Seria geometrică* $\sum_{0}^{\infty} \alpha^n$ *are sumele parţiale* $S_n = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$, *deci ea este:*

convergentă pentru $|\alpha| < 1$, *avînd suma* $\frac{1}{1-\alpha}$,

divergentă pentru $|\alpha| > 1$ *sau* $\alpha = 1$,

oscilatoare pentru $|\alpha| = 1$ *şi* $\alpha \neq 1$.

2. *Seria geometrică dublă* $\sum_{0}^{\infty}\sum_{0}^{\infty} \alpha^n \beta^{n'}$ *are sumele parţiale* $S_{nn'} = \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \frac{1-\beta^{n'}}{1-\beta}$ *(cum se vede sumînd după linii). Ea este convergentă şi are suma* $\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)}$ *numai*

cînd $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1$, *atunci putem suma după linii orizontale:* $S_n = \frac{\alpha^n}{1-\beta}$, $\sum_0^\infty S_n =$

$$= \frac{1}{1-\beta}\sum_0^\infty \alpha^n = \frac{1}{1-\alpha}\cdot\frac{1}{1-\beta} = S.$$

În general o serie geometrică multiplă, $\sum_0^\infty\sum_0^\infty \ldots \alpha^n \beta^{n'} \ldots$ *este convergentă numai pentru* $|\alpha| < 1$, $|\beta| < 1, \ldots$ *și are suma* $\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)\ldots}$.

3. $\sum_0^\infty\sum_0^\infty (n' - n)$ *are sume parțiale oricît de mari sau oricît de mici, deci e oscilatoare. Dar sumată după pătrate sau după diagonale obținem serii care au toți termenii și deci suma* 0. *De asemenea, ordonînd seria după pătrate sau diagonale se obțin serii oscilatoare.*

Fiind dat un șir infinit, există totdeauna o serie pentru care el este șirul sumelor parțiale, astfel că, în caz de convergență sau divergență, limita șirului este egală cu suma seriei corespunzătoare. Pentru un șir simplu S_n, această serie este evident

$$S_0 + (S_1 - S_0) + \ldots + (S_{n+1} - S_n) + \ldots = S_0 + \sum_0^\infty (S_{n+1} - S_n).$$

Pentru un șir dublu $S_{nn'}$, seria corespunzătoare este

$$S_{0,0} + (S_{0,1} - S_{0,0}) + (S_{0,2} - S_{0,1}) + \ldots + (S_{1,0} - S_{0,0}) +$$

$$+\begin{cases} S_{1,1} - S_{0,1} \\ -S_{1,0} + S_{0,0} \end{cases} + \begin{cases} S_{1,2} - S_{0,2} \\ -S_{1,1} + S_{0,1} \end{cases} + \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

sau

$$S_{0,0} + \sum_0^\infty (S_{0,n'+1} - S_{0,n'}) + \sum_0^\infty (S_{n+1,0} - S_{n,0}) +$$

$$+\sum_0^\infty\sum_0^\infty (S_{n+1,n'+1} - S_{n,n'+1} - S_{n+1,n'} + S_{n,n'})$$

etc.

Această observație permite să scriem serii cu sume cunoscute sau să sumăm unele serii (vezi și exemplul 1).

4. *Avem* $\frac{1}{n!} \to 0$, *deci* $0 = 1 + \sum_0^\infty \left(\frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!}\right)$

sau

$$\sum_0^\infty \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

5. *Fie seria* $\sum_2^\infty \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$. *Observăm că* $\log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \log\frac{n+1}{n} - \log\frac{n}{n-1}$, *deci*

$$S_n = \log\frac{n+1}{n} - \log 2 \to -\log 2.$$

Astfel

$$\sum_{2}^{\infty} \log\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = -\log 2.$$

6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+p+n)} = \frac{1}{p}\left(\frac{1}{\alpha+1} + \cdots + \frac{1}{\alpha+p}\right)$ *unde* p *întreg* > 0 *și* α *nu e întreg* < 0 *(Mac Laurin).*

Într-adevăr,

$$S_n = \frac{1}{p}\sum_{1}^{n}\left(\frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{\alpha+p+k}\right) = \frac{1}{p}\sum_{1}^{p}\frac{1}{\alpha+k} + \frac{1}{p}\sum_{p+1}^{n}\frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{p}\sum_{p+1}^{p+n}\frac{1}{\alpha+k} =$$

$$= \frac{1}{p}\sum_{1}^{p}\frac{1}{\alpha+k} - \frac{1}{p}\sum_{n+1}^{p+n}\frac{1}{\alpha+k} \quad (n > p).$$

Ultima sumă, avînd un număr finit de termeni ($=p$), tinde la 0.

Cazuri particulare:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n(p+n)} = \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{p}\right).$$

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha} \quad (\alpha \neq 0, -1, -2, \ldots).$$

7. *Avem* $\frac{1}{n+n'} \to 0$ *pentru* $n \to \infty$, $n' \to \infty$; *deci*

$$0 = 1 + 2\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right) + \sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{n+n'+2} - \frac{2}{n+n'+1} + \frac{1}{n+n'}\right)$$

sau

$$\sum_{1}^{\infty}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(n+n')(n+n'+1)(n+n'+2)} = \frac{1}{2}.$$

§ 15. Operații cu serii

Cu privire la operațiile ce se pot face asupra seriilor, putem spune deocamdată următoarele:

Teorema 1. *Seriile convergente și divergente posedă proprietatea asociativă, în sensul că, dacă se sumează termeni consecutivi în număr finit, seria astfel obținută are aceeași sumă ca cea dată.*

De exemplu, dacă în seria convergentă sau divergentă $\sum_{0}^{\infty} w_n = S$ sumăm cîte doi termeni consecutivi, obținem

$$(w_0 + w_1) + (w_2 + w_3) + \ldots + (w_{2p} + w_{2p+1}) + \ldots = S.$$

Afirmația reiese din faptul că sumele parțiale ale seriei a doua sînt și sume parțiale ale seriei date; se aplică teorema 2, § 10.

Dacă avem dreptul de a introduce paranteze într-o serie fără a-i schimba natura și suma, nu avem tot așa dreptul de a desface parantezele.

Exemplul 1. *Fie seria convergentă* $\sum_0^\infty w_n = S$; *putem scrie* $\sum_0^\infty [(w_n - 1) + 1] = S$. *Dacă desfacem parantezele obținem seria*

$$(w_0 - 1) + 1 + (w_1 - 1) + \ldots + 1 + (w_n - 1) + \ldots + .$$

care e oscilatoare. Căci sumele ei sînt $\bar{S}_{2n} = S_n$, $S_{2n+1} = \bar{S}_{n+1} - 1$ deci $\bar{S}_{2n} \to S$, iar $\bar{S}_{2n+1} \to S - 1$.

Iată două cazuri în care desfacerea parantezelelor nu schimbă convergența și suma unei serii simple.

Teorema 2. *Desfacerea parantezelor nu schimbă convergența și suma unei serii cînd toți termenii din paranteze sînt pozitivi (sau toți negativi).*

Căci seria dată avînd sumele parțiale crescătoare și mărginite, tot așa sînt sumele parțiale ale seriei obținute prin desfacerea parantezelor. Astfel această serie este convergentă și se aplică teorema precedentă.

Teorema 3. *Seria obținută prin desfacerea parantezelor are aceeași sumă ca cea dată dacă termenii ei tind la zero, și numărul termenilor din paranteze nu întrece un număr fix* k.

Într-adevăr, fie $\sum_0^\infty w_n = S$ seria dată și $\sum_0^\infty w'_p$ seria obținută. Prin ipoteză fiecare w_n este o sumă de cel mult k termeni w'_p și $\lim_{p\to\infty} w'_p = 0$.

O sumă parțială S'_p relativă la a doua serie este de forma

$$S'_p = S_n + w^*_{n+1},$$

unde n depinde de p și w^*_{n+1} este suma unei părți din termenii w'_p ce formează paranteza w_{n+1}, în număr $< k$. Avem

$$\lim_{p\to\infty} S_n = S$$

pentru că $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ și $\lim_{p\to\infty} n = \infty$ $\left(\text{căci evident } n \geqq \frac{p}{k} - 1\right)$.

Apoi

$$\lim_{p\to\infty} w^*_{n+1} = 0.$$

Într-adevăr, w^*_{n+1} conține cel mult termenii $a_{p-k+1}, \ldots, a_p$ și prin ipoteză, dat $\varepsilon > 0$, există $\nu > 0$, așa ca $|a_p| < \frac{\varepsilon}{k}$ pentru $p > \nu$ deci

$$|w^*_{n+1}| < k\,\frac{\varepsilon}{k} = \varepsilon$$

pentru $p > \nu + k$, ceea ce probează ultima afirmație. Rezultă acum $\lim S'_p = S$.

Nici comutativitatea nu este valabilă pentru serii, decît în cazuri speciale pe care le vom preciza.

Exemplul 2. (Dirichlet). Să plecăm de la seria convergentă (exemplul 1, § 16)

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

unde de altfel $s = \log 2$(aplicația 1 la teorema 2, § 89). Avem, aplicînd teoremele 1 și 4,

$$S = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6}\right) + \cdots$$

$$\frac{S}{2} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots$$

$$S = \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \cdots$$

și adunînd (vezi teorema 5)

$$\frac{3S}{2} = \left(1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}\right) + \cdots$$

$$= 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots$$

(aplicînd teorema precedentă). Or, ultima serie rezultă din permutarea termenilor în seria inițială; ea are altă sumă.

Teorema 4. *Dacă se înmulțesc termenii unei serii a cărei sumă este s, cu un același număr k, se obține o serie a cărei sumă este ks.*

Căci a doua serie are sumele parțiale $ks_n \to ks$.

Teorema 5. *Date fiind seriile convergente*

$$\sum_0^\infty w_n = S \text{ și } \sum_0^\infty w'_n = S',$$

avem

$$\sum_0^\infty (w_n + w'_n) = S + S';$$

și la fel se pot aduna două serii multiple convergente. Dacă o serie este convergentă și a doua divergentă, seria astfel definită e divergentă.

Rezultă imediat din relația dintre sumele parțiale ale celor trei serii, $S_n + S'_n = S''_n$, prin trecere la limită.

Înmulțirea seriilor va fi studiată mai departe.

§ 16. Natura unei serii

Problema fundamentală de care ne vom ocupa în această secțiune este: Fiind dată o serie, să se recunoască natura ei (convergentă, divergentă sau oscilatoare).

Chestiunea se poate reduce întotdeauna la aceea relativă la serii cu termeni reali:

Teorema 1. *Pentru ca o serie să fie convergentă, este necesar și suficient ca seriile formate de părțile reale și cele imaginare ale termenilor ei să fie convergente; dacă acestea au sumele q și r, seria dată are suma* $q + ir$.

Fie, de exemplu, $\sum_0^\infty w_n$, unde $w_n = u_n = + iv_n$ și $S_n = q_n + ir_n$, $q_n = \sum_0^n u_n$, $r_n = \sum_0^n v_n$. Pentru ca $S_n \to q + ir$ (finit) este necesar și suficient ca $q_n \to q$, $r_n \to r$ (§ 9, teorema 1), adică $\sum_0^\infty u_n = q$, $\sum_0^\infty v_n = r$.

De multe ori însă este mai avantajos să tratăm chestiunea convergenței direct în complex.

Sînt cunoscute o mare mulțime de criterii de convergență, unele necesare, altele suficiente și — pentru serii oarecari — unul singur necesar și suficient totodată: acesta este criteriul lui Cauchy, același ca la șiruri (§ 10).

Teorema 2. (*Cauchy*). *Pentru ca* $\sum_0^\infty \cdots \sum_0^\infty w_{n_1, \ldots, n_k}$ *să fie convergentă, este necesar și suficient ca la orice* $\varepsilon > 0$ *să corespundă un* $\nu > 0$ *așa ca*:

$$|S_{n_1+p_1, \ldots, n_k+p_k} - S_{n_1, \ldots, n_k}| < \varepsilon \tag{45}$$

pentru $n_1 > \nu, \ldots, n_k > \nu$; $p_1, \ldots, p_k$ *arbitrari* $\geqq 0$.

Acest criteriu, de importanță teoretică fundamentală, este arareori aplicabil în practică.

Exemple 1. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *este convergentă.* Avem

$$|S_{n+p} - S_n| = \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right) + \ldots > 0,$$

expresiile din paranteze fiind pozitive și termenul rămas în cazul p impar de asemenea pozitiv Urmează

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} - \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) - \ldots < \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

pentru $n > \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$ și p arbitrar.

2. $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ *(seria armonică) este divergentă.*

$$|S_{n+p} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{n+p} > \frac{p}{n+p}.$$

Condiția lui Cauchy nu este satisfăcută, căci luînd $p = n$, avem

$$|S_{n+p} - S_n| > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

pentru $n > \nu$ oarecare.

Deci seria nu e convergentă și fiind cu termeni pozitivi e divergentă.

Pentru clase particulare de serii pot exista criterii necesare și suficiente speciale. Așa se cunoaște din analiza reală:

Teorema 3. *Pentru ca o serie simplă cu termeni pozitivi să fie* $\begin{cases} \textit{convergentă} \\ \textit{divergentă} \end{cases}$ *este neecesar și suficient ca sumele parțiale să fie* $\begin{cases} \textit{mărginite} \\ \textit{nemărginite.} \end{cases}$

Este criteriul de convergență pentru șiruri monotone, aplicat la șirul sumelor parțiale.

Și acesta e greu de aplicat în practică.

Exemplul 3. $\sum_0^\infty \frac{1}{n!}$ *e convergentă.*

$$S_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} =$$

$$= 1 + \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} < 3.$$

§ 17. Condiții necesare

Aceste condiții exprimă proprietăți ale termenilor unei serii convergente. Ele pot servi indirect spre a stabili neconvergența unei serii.

Teorema 1. *Termenul general al unei serii convergente tinde la* 0.

De exemplu, pentru o serie dublă $\sum_0^\infty \sum_0^\infty w_{n,n'} = S$, avem

$$w_{n,n'} = S_{n,n'} - S_{n,n'-1} - S_{n-1,n'} + S_{n-1,n'-1} \to S - S - S + S = 0.$$

Reciproca nu este adevărată.

Exemplul 1. *Seria armonică.*

Teorema 2. *Dacă* $\sum_0^\infty w_n$ *este convergentă, iar* k_n *un șir de numere* > 0 *nedescrescătoare și care* $\to +\infty$, *avem*

$$\frac{1}{k_n}(k_0 w_0 + \ldots + k_n w_n) \to 0 \qquad \text{(46)} \qquad \textit{(Kronecker)}$$

Fie $\varepsilon > 0$. După criteriul lui Cauchy, există un $\mu > 0$ astfel că

$$|w_{\mu+1} + \ldots + w_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru $n > \mu$. Notînd K_n expresia (46), avem

$$|K_n| \leqq \frac{k_\mu}{k_n}(|w_0| + \ldots + |w_\mu|) + |w_{\mu+1} + \ldots + w_n|$$

și există un $\nu > \mu$ astfel că prima parte din membrul II să fie $< \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n > \nu$. Vom avea deci $|K_n| < \varepsilon$ pentru $n > \nu$.

Teorema 3. *Dacă seria* $\sum_0^\infty u_n$ *cu termeni pozitivi necrescători, este convergentă,*

(47) $$nu_n \to 0 \qquad \textit{(Olivier)}.$$

Căci $k_n = \dfrac{1}{u_n}$ este un şir de numere > 0 nedescrescătoare şi $k_n \to +\infty$; astfel (47) se obţine aplicînd (46) seriei $\sum_1^\infty u_n$.

Nici ultimele două teoreme nu se pot inversa.

Exemplul 2. *Seria* $\sum_2^\infty \dfrac{1}{n \log n}$ *este divergentă* (vezi exemplul 2, § 18) deşi $nw_n \to 0$.

3. $\sum_1^\infty \dfrac{1}{n}$ *este divergentă pentru că* $nw_n \to 1 \neq 0$. *Din acelaşi motiv e divergentă seria iperarmonică* $\sum_1^\infty \dfrac{1}{n^\alpha}$ *pentru* $\alpha \leqq 1$.

4. *Cum* $\sum_0^\infty |\alpha|^n$ *este convergentă pentru* $|\alpha| < 1$, *avem* $n\alpha^n \to 0$, *pentru* $|\alpha| < 1$.

Altă aplicaţie:

Teorema 4. (Cauchy). *Dacă* $\sum_0^\infty w_n = S$ (*sau dacă* $S_n \to S$), *avem*

(46′) $$\frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_n}{n+1} \to S.$$

Luînd în (46) $k_0 = 1$, $k_1 = 2, \ldots, k_n = n+1$, avem într-adevăr

$$S_{n+1} - \frac{w_0 + 2w_1 + \ldots + (n+1)w_n}{n+1} \to S$$

şi înlocuind aici $w_0 = s_0$, $w_1 = s_1 - s_0, \ldots, w_n = S_n - S_{n-1}$ obţinem (46′).

În legătură cu aceasta vom mai face următoarea aplicaţie:

Teorema 5. *Dacă* $S_n \to S$ şi $S'_n \to S'$, *avem*

$$\frac{S_0S'_n + S_1S'_{n-1} + \ldots + S_nS'_0}{n+1} \to SS'.$$

Căci putem scrie

$$\frac{1}{n+1}(S_0S'_n + \ldots + S_nS'_0) = \frac{1}{n+1}[(S_0 - S)S'_n + (S_1 - S)S'_{n-1} + \ldots] +$$

$$+ \frac{1}{n+1} S(S'_0 + \ldots + S'_n).$$

Partea a doua $\to SS'$ după teorema 4, iar partea întîia $\to 0$. Într-adevăr, cum $|S'_n| < M$ (fix), modulul părţii întîia este $< M\dfrac{|S_0 - S| + \ldots + |S_n - S|}{n+1} \to 0$ (deoarece $S_n - S \to 0$).

§ 18. Criterii de convergență sau divergență, pentru serii simple cu termeni pozitivi

Deși serille cu termeni pozitivi ies din cadrul acestui curs, vom trece în revistă criteriile de convergență sau divergență referitoare la aceste serii, pentru că vom avea deseori ocazia să le aplicăm și în cîmpul complex.

Aproape toate seriile cu termeni pozitivi ce se prezintă în practică au termenii monoton descrescători. La ele se referă următoarele trei criterii, care au o mare rază de acțiune.

Teorema 1. *(Criteriul de condensare Cauchy-Schlömilch). Fie* $\sum_0^\infty u_n$ *o serie cu termeni* > 0 *monoton descrescători; și fie* ν_k *un șir de numere întregi* $\geqq 0$ *crescătoare, astfel că (începînd de la o valoare a lui* k*)*

$$\nu_{k+1} - \nu_k \leqq M(\nu_k - \nu_{k-1}) \qquad (k > k_0),$$

M fiind un număr fix > 0*. Atunci seriile* $\sum_0^\infty u_n$ *și* $\sum_0^\infty (\nu_{0+1} - \nu_\kappa)\, u_{\nu_k}$ *au aceeași natură.*

Putem presupune condiția satisfăcută chiar începînd cu $k = 0$ căci putem neglija termenii cu $k < k_0$.

Fie $n < \nu_k$. Notînd cu $U = S_{\nu_0 - 1}$, avem

$$S_n < S_{\nu_k} \leqq U + (u_{\nu_0} + \ldots + u_{\nu_1 - 1}) + \ldots + (u_{\nu_k} + \ldots + u_{\nu_{k+1} - 1}) <$$
$$< U + (\nu_1 - \nu_0)\, u_{\nu_0} + \ldots + (\nu_{k+1} - \nu_k)\, u_{\nu_k},$$

adică între sumele parțiale ale celor două serii avem relația

$$S_n < U + t_k \qquad (n < \nu_k),$$

de unde se vede că dacă seria a doua este convergentă, și întîia este.

Fie de altă parte $n > \nu_k$; atunci

$$S_n > S_{\nu_k} \geqq (u_{\nu_0 + 1} + \ldots + u_{\nu_1}) + \ldots + (u_{\nu_{k-1}+1} + \ldots + u_{\nu_k}) >$$
$$> (\nu_1 - \nu_0)\, u_{\nu_1} + \ldots + (\nu_k - \nu_{k-1})\, u_{\nu_k},$$

de unde, ținînd socoteală de condiția enunțului,

$$MS_n > (\nu_2 - \nu_1)\, u_{\nu_1} + \ldots + (\nu_{k+1} - \nu_k)\, u_{\nu_k},$$

adică

$$MS_n > t_k - t_0,$$

de unde se vede că dacă seria întîia este convergentă, este și a doua. Astfel seriile converg simultan și deci diverg simultan.

În aplicații se poate lua, de exemplu $\nu_k = m^k$ (m întreg > 1), atunci condițiile teoremei sînt împlinite cu $M = m$; sau $\nu_k = k^p$ (p întreg > 1), atunci $\dfrac{\nu_{k+1} - \nu_k}{\nu_k - \nu_{k-1}} = \dfrac{(k+1)^p - k^p}{k^p - (k-1)^p} \to 1$ și pentru k destul de mare ($k > k_0$) vom putea satisface condițiile cu $M = 2$.

Teorema precedentă este remarcabilă prin aceea că face să depindă natura unei serii numai de o parte din termeni, neglijînd chiar o infinitate

de termeni. De exemplu, pentru $\nu_k = 2^k$, natura seriei date este hotărîtă numai de seria $\sum_0^\infty 2^k u_{2^k} = u_0 + 2u_2 + 4u_4 + 8u_8 + \ldots$ (acesta este cazul găsit de Cauchy).

Exemple. 1. $\sum_1^\infty \frac{1}{n^a}$ *este* $\begin{cases} \text{convergentă pentru } a > 1 \\ \text{divergentă pentru } a \leqslant 1 \end{cases}$ *(seria hiperarmonică), deoarece are aceeași natură ca* $\sum \frac{2^{k+1}-2^k}{(2^k)^a} = \sum \frac{1}{(2^{a-1})^k}$, *care este o serie geometrică convergentă pentru* $\frac{1}{2^{a-1}} < 1$ *sau* $a > 1$, *divergentă în cazul contrar.*

2. $\sum_2^\infty \frac{1}{n(\log n)^a}$ *este* $\begin{cases} \text{convergentă pentru } a > 1 \\ \text{divergentă pentru } a \leqq 1 \end{cases}$ *(Abel), deoarece este la fel ca seria* $\sum_2^\infty \frac{3^{k+1}-3^k}{3^k(\log 3^k)^a} = \frac{2}{(\log 3)^a} \sum_2^\infty \frac{1}{k^a}$, *deci ca seria hiperarmonică.*

Teorema 2. *(Criteriul integral al lui Cauchy). Fie* $\sum_{n_0}^\infty u_n$ *o serie cu termeni* > 0 *și monoton descrescători; fie* $f(x)$ *o funcție reală, care, pentru* $x > n_0$, *este monoton descrescătoare și ia valorile* $f(n) = u_n$. *Atunci seria dată și integrala improprie*

$$J = \int_{n_0}^{+\infty} f(x)\,dx$$

sînt convergente sau divergente în același timp.

Evident, putem presupune $n_0 = 0$. Avem

$$\int_n^{n+1} f\,dx \leqslant u_n \leqslant \int_{n-1}^{n} f\,dx \qquad (n \geqq 1) \tag{48}$$

pentru că în intervalul $(n, n+1)$ avem $f(x) \leqslant f(n) = u_n$, iar în $(n-1, n)$ avem $f(x) \geqslant f(n) = u_n$ (din cauza monotoniei). Sumînd cu începere de la $n = 1$:

$$\int_1^{n+1} f\,dx \leqq S_n - u_0 \leqq \int_0^n f\,dx. \tag{49}$$

Prima inegalitate arată că dacă integrala diverge, și seria diverge, iar a doua inegalitate spune că dacă integrala converge și seria face la fel.

Observația 1. În aplicații se va putea face uz de criteriile de convergență pentru integrale improprii cu limita superioară $+\infty$. Cel mai simplu este:

Dacă există $\lim_{x \to +\infty} x^a f(x) \neq 0, \infty$, *integrala converge, cînd* $a > 1$, *diverge cînd* $a \leqslant 1$.

Observația 2. Notînd $J_n = \int_{n_0}^{n} f(x)\,dx$, avem din (48), (49),

$$S_n - J_n \leqslant u_{n_0}, \quad S_n - J_n \geqslant \int_n^{n+1} f\,dx + (u_{n_0} - J_{n_0+1}) > 0,$$

$$(S_n - J_n) - (S_{n+1} - J_{n+1}) = \int_n^{n+1} f\,dx - u_{n+1} \geqslant 0.$$

Acestea dovedesc că șirul $S_n - J_n$ e monoton descrescător și tinde la o limită cuprinsă între 0 și u_{n_0}. În cazul unei serii divergente avem astfel o aproximare asimptotică a sumelor ei.

Observația 3. Pentru o serie convergentă se poate obține la fel o aproximare a *resturilor* $R_n = S - S_n$. Din (48).

$$\int_{n+1}^{n+p+1} f\,dx \leqslant S_{n+p} - S_n \leqslant \int_n^{n+p} f\,dx,$$

de unde, făcînd $p \to \infty$,

$$J - J_{n+1} \leqq R_n \leqq J - J_n.$$

Exemple. 3. *Se regăsește rezultatul relativ la seria hiperarmonică (exemplul 1)*:

$\int^{+\infty} \frac{dx}{x^a}$ *este convergentă pentru* $a > 1$, *divergentă pentru* $a \leqslant 1$.

4. $$\sum^{\infty} \frac{1}{n \log n \cdot \log_2 n \ldots \log_{p-1} n \cdot (\log_p n)^a}$$

este

convergentă, pentru $a > 1$, *divergentă pentru* $a \leqslant 1$.

(*aici* $\log_2 = \log \log, \ldots, \log_p = \log \log_{p-1}$). Pentru a evalua pe J observăm că

$$\frac{d}{dx} \log_p x = \frac{d}{dx} \log (\log_{p-1} x) = \frac{1}{\log_{p-1} x} \frac{d}{dx} \log_{p-1} x,$$

de unde se deduce

$$\frac{d}{dx} \log_p x = \frac{1}{x \cdot \log x \ldots \log_{p-1} x}.$$

Se găsește apoi

$$\int \frac{dx}{x \cdot \log x \ldots \log_{p-1} x\,(\log_p x)^a} = \begin{cases} \dfrac{1}{(1-a)\,(\log_p x)\,S^{a-1}} & a \neq 1, \\ \log_{p+1} x & a = 1, \end{cases}$$

de unde reiese că J este convergentă pentru $a > 1$, divergentă pentru $a \leqslant 1$.

5. *Șirul*

$$1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n$$

este pozitiv, descrescător și are o limită C *cuprinsă între* 0 *și* 1 ($C = 0{,}577\ldots$ *se numește constanta lui Mascheroni sau a lui Euler*). Este o aplicație a observației 2 la $\sum_0^{\infty} \frac{1}{n}$ ($n_0 = 1$, $J_n = \log n$).

6. *Pentru seria hiperarmonică* $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^a}$ $(a > 1)$ *avem*

$$J - J_n = \int_n^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = -\frac{n^{1-a}}{1-a},$$

deci

$$\frac{(n+1)^{1-a}}{a-1} < R_n < \frac{n^{1-a}}{a-1}.$$

Teorema 3. *(Criteriul lui Ermakoff). Fie seria* $\sum_{n}^{\infty} u_n$ *cu* $u_n > 0$ *şi monoton descrescători; fie* $f(x)$ *o funcţie reală care satisface condiţiile teoremei precedente pentru* $x > n_0$; *şi* $\varphi(x)$ *o funcţie care, pentru* $x > n_0$, *este monoton crescătoare, are derivată continuă şi este* $> x$. *Atunci seria dată este*

$$\begin{cases} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{cases} \quad \text{dacă} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} \begin{cases} \leqq K < 1 \\ \geqq 1 \end{cases} \quad (x > n_0).$$

În cazul inegalităţii superioare

$$\int_{\varphi(n_0)}^{\varphi(x)} f\,dx = \int_{n_0}^{x} \varphi'(x) f(\varphi(x))\,dx \leqq K \int_{n_0}^{x} f(x)\,dx,$$

de unde, pentru $x \geqq \varphi(n_0)$,

$$(1-K)\int_{\varphi(n_0)}^{\varphi(x)} f\,dx \leqq K\left(\int_{n_0}^{x} f\,dx - \int_{\varphi(n_0)}^{\varphi(x)} f\,dx\right) = K\left(\int_{n_0}^{\varphi(n_0)} f\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_{x}^{\varphi(x)} f\,dx\right) < \int_{n_0}^{\varphi(n_0)} f\,dx.$$

Astfel $\int_{\varphi(n_0)}^{\varphi(x)} f\,dx$ este mărginită superior şi tot aşa este $\int_{n_0}^{x} f\,dx$; seria este convergentă în virtutea criteriului precedent.

În cazul inegalităţii inferioare avem la fel

$$\int_{\varphi(n_0)}^{\varphi(x)} f\,dx \geqq \int_{n_0}^{x} f\,dx,$$

de unde, pentru $x \geqq \varphi(n_0)$,

$$\int_{\varphi(n_0)}^{\varphi(x)} f\,dx - \int_{n_0}^{x} f\,dx = \int_{x}^{\varphi(x)} f\,dx - \int_{n_0}^{\varphi(n_0)} f\,dx \geqq 0$$

$$\int_{x}^{\varphi(x)} f\,dx \geqq \int_{n_0}^{\varphi(n_0)} f\,dx = H > 0 \quad (\text{căci } \varphi(n_0) > n_0 \text{ şi } f > 0).$$

De aici se deduce $J = +\infty$. Căci dînd lui x valorile $x_0 = n_0$, $x_1 = \varphi(n_0)$, $x_2 = \varphi(x_1)$, ... , $x_m = \varphi(x_{m-1})$, obţinem

$$J > \int_{n_0}^{x_m} f\,dx \geqq mH$$

(număr ce poate fi oricît de mare). Seria este deci divergentă.

Observaţie. Dacă există $\lim_{x \to +\infty} \frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = l$, putem enunţa criteriul:

Seria este

$$\begin{cases} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{cases} \quad \text{cînd} \begin{cases} l < 1, \\ l > 1. \end{cases}$$

Exemplul 7. Pentru a studia cu ajutorul acestui criteriu natura seriei de la exemplul 4, vom lua $\varphi(x) = e^x$. Atunci $\log_p e^x = \log_{p-1} x$ și avem

$$\frac{\varphi'(x) f(\varphi(x))}{f(x)} = e^x \frac{1}{e^x \, x \log x \ldots (\log_{p-1} x)^a} \, x \log x \ldots . (\log_p x^a) =$$

$$= \frac{(\log_p x)^a}{(\log_{p-1} x)^{a-1}} = \frac{(\log X)^a}{X^{a-1}} \to \begin{cases} 0 & a > 1, \\ +\infty & a \leqslant 1. \end{cases}$$

(am pus $X = \log_{p-1} x \to +\infty$). Astfel am obținut din nou rezultatul din exemplul 4.

§ 19. Criterii de comparație

Cele mai multe criterii suficiente pentru convergența sau divergența seriilor cu termeni $\geqslant 0$, rezultă din compararea cu serii a căror natură este cunoscută; ele se numesc criterii de comparație.

Determinarea naturii unei serii prin comparație se bazează pe următoarele teoreme simple:

Teorema 1. *Fiind date seriile* $\sum u_n$ *și* $\sum v_n$:

1°. *Dacă raportul* $\frac{u_n}{v_n}$ *e mărginit superior, convergența seriei a doua atrage convergența celei dintîi.*

2°. *Dacă* $\frac{u_n}{v_n}$ *este mărginit inferior de un număr pozitiv, divergența seriei a doua atrage divergența celei dintîi.*

3°. *Dacă există două numere pozitive* m *și* M *astfel că*

$$0 < m \leqslant \frac{u_n}{v_n} \leqq M$$

pentru $n \geqslant n_0$, *cele două serii au aceeași natură.*

În cazul 1° $u_n < M v_n$ (M fix) deci $S_n < M S'_n$; sumele S_n sînt astfel mărginite ca și S'_n.

În cazul 2° $u_n \geqslant m v_n$ ($m > 0$, fix), deci $S_n \geqslant m S'_n$; sumele S_n sînt nemărginite ca și S'_n. Cazul 3° întrunește cazurile 1° și 2°.

Urmează imediat

Teorema 2. *Dacă există* $\lim \frac{u_n}{v_n} = l$, *putem conchide convergența prin comparație cînd* $l \neq +\infty$, *divergența cînd* $l \neq 0$ *și identitatea de natură a seriilor cînd* $l \neq 0, \infty$.

Caz particular. Să notăm cu $\sum c_n$ o serie convergentă cu termeni pozitivi cunoscută, cu $\sum d_n$ o serie divergentă. Avem atunci pentru o serie $\sum u_n$:

Dacă $u_n \leqslant c_n$ ($n \geqslant n_0$): convergență,

dacă $u_n \geqslant d_n$ ($n \geqslant n_0$): divergență.

Luînd diverse serii de comparație se obțin criterii particulare, care se numesc criterii de specia I.

Altă categorie de criterii de comparație, numite de specia a II-a, decurg din

Teorema 3. *Fiind dată seria* $\sum u_n$, *ea este:*

convergentă dacă $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \frac{c_{n+1}}{c_n}$ $(n \geqslant n_0)$,

divergentă dacă $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{d_{n+1}}{d_n}$ $(n \geqslant n_0)$.

Într-adevăr, în primul caz $\frac{u_{n+1}}{c_{n+1}} \leqslant \frac{u_n}{c_n} \leqslant \ldots \frac{u_{n_0}}{c_{n_0}}$ și se aplică teorema 1, iar în al doilea caz $\frac{u_{n+1}}{d_{n+1}} \geqslant \frac{u_n}{d_n} \geqslant \ldots \geqslant \frac{u_{n_0}}{d_{n_0}} > 0$.

Observația 1. După cum se vede, această teoremă de comparație revine la cea dintîi. În cazul convergenței, $\lim \frac{u_n}{c_n} = l \neq \infty$ și deci pentru $n > n_1$, avem $u_n < Mc_n$ (cu $M > l$), sau $u_n < c'_n$. La fel în cazul divergenței. Prin urmare, un criteriu de specia I este eficace întotdeauna cînd este aplicabil criteriul de specia a II-a dat de aceeași serie de comparație: nu și invers. Criteriile de specia a II-a sînt cu alte cuvinte mai slabe decît cele de specia I (corespunzătoare); ceea ce nu înseamnă că sînt inutile: ele pot fi uneori aplicate mai ușor.

Observația 2. Un criteriu de specia I (și prin urmare și criteriul de specia a II-a corespunzător) nu poate fi eficace decît pentru seriile care converg sau diverg cel puțin tot atît de repede ca seria de comparație. Altfel zis, un criteriu de comparație este cu atît mai puternic cu cît seria de comparație converge sau diverge mai încet.

Noțiunea aceasta se definește precis în felul următor:

Definiție. *Seria* $\sum c'_n$ *converge cel puțin tot atît de repede ca* $\sum c_n$ *dacă,* R'_n *și* R_n *fiind resturile acestor serii, există un* $M > 0$ *astfel că* $\frac{R'_n}{R_n} < M$; *cînd* $\lim \frac{R'_n}{R_n} = 0$ *se zice că* $\sum c'_n$ *converge mai repede decît* $\sum c_n$; *iar cînd* $\lim \frac{R'_n}{R_n} \neq 0, \infty$ *sau* $0 < m < \frac{R'_n}{R_n} < M$, *se zice că seriile converg la fel de repede.*

Seria $\sum d'_n$ *diverge cel puțin tot atît de repede ca* $\sum d_n$ *dacă,* S'_n *și* S_n *fiind sumele parțiale ale acestor serii, există un* $m > 0$ *astfel că* $\frac{S'_n}{S_n} > m$; *cînd* $\lim \frac{S'_n}{S_n} = +\infty$ *se zice că* $\sum d'_n$ *diverge mai repede decît* $\sum d_n$; *iar cînd* $\lim \frac{S'_n}{S} \neq 0, \infty$ *sau* $0 < m < \frac{S'_n}{S_n} < M$, *se zice că seriile diverg la fel de repede.*

Aceste definiții se aplică în general seriilor cu termeni reali.

Este ușor de văzut că aceste noțiuni sînt transitive: dacă o serie converge mai repede decît alta și aceasta decît o a treia, atunci prima converge mai repede decît a treia etc.

În cazul seriilor cu termeni pozitiv, aprecierea rapidității convergenței sau divergenței se poate face la fel, considerînd în locul rapoartelor $\frac{R'_n}{R_n}$ sau $\frac{S'_n}{S_n}$, raportul termenilor generali ai seriilor, $\frac{c'_n}{c_n}$ sau $\frac{d'_n}{d_n}$. Căci, de exemplu, $\lim\frac{c'_n}{c_n} = 0$ atrage $\lim\frac{R'_n}{R_n} = \lim\frac{c'_{n+1}+\cdots}{c_{n+1}+\cdots} = 0$; într-adevăr, avem $c'_n < \varepsilon c_n$ pentru $n > \nu$ (corespunzînd lui ε), deci $\frac{c'_{n+1}+\cdots}{c_{n+1}+\cdots} < \varepsilon$ pentru $n > \nu$. La fel în celelalte cazuri.

Or, prima teoremă de comparație afirmă convergența seriei $\sum u_n$, atunci cînd $\frac{u_n}{c_n} \leqslant M$ (fix), deci atunci cînd $\sum u_n$ converge cel puțin tot atît de repede ca $\sum c_n$; și afirmă divergența atunci cînd $0 < m \leqslant \frac{u_n}{d_n}$, adică atunci cînd $\sum u_n$ diverge cel puțin tot atît de repede ca $\sum d_n$.

Observația 3. Nici un criteriu de comparație nu poate fi aplicabil în toate cazurile, pentru că orice serie de comparație s-ar lua, există alta care converge sau diverge mai încet (după cum a observat Prinsgheim). Astfel:

Exemple. 1. *Σc_n este convergentă și R_n sînt resturile ei, seria $\Sigma c'_n = \Sigma\left(\sqrt{R_{n-1}} - \sqrt{R_n}\right)$ converge mai încet fiindcă* $\frac{c_n}{c'_n} = \frac{c_n\left(\sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n}\right)}{R_{n-1} - R_n} = \sqrt{R_{n-1}} + \sqrt{R_n} \to 0$ *(seria este convergentă deoarece $S'_n = \sqrt{R_0} - \sqrt{R_n} \to \sqrt{R_0}$). (Hadamard).*

2. *Dacă Σd_n este divergentă și S_n sînt sumele ei, seria $\Sigma\frac{d_n}{S_n} = \Sigma d'_n$ diverge mai încet.* Mai întîi $\frac{d_{n+1}}{S_{n+1}} + \cdots + \frac{d_{n+p}}{S_{n+p}} \geqslant \frac{d_{n+1}+\cdots+d_{n+p}}{S_{n+p}} = 1 - \frac{S_n}{S_{n+p}}$, de unde, făcînd $p \to \infty$, deci $S_{n+p} \to \infty$:

$$R'_n \geqslant 1,$$

ceea ce probează divergența seriei $\Sigma d'_n$ (Abel). Avem apoi $\frac{d_n}{d'_n} = S_n \to +\infty$ ceea ce demonstrează că această serie diverge mai încet decît cea dată.

Iată o scară de serii care converg din ce în ce mai repede.

$$\cdots \sum \frac{1}{n \log n \ldots \log_{p-1} n (\log_p n)^a}, \ldots, \sum \frac{1}{n \log n (\log_2 n)^a},$$

$$(50) \qquad \sum \frac{1}{n(\log n)^a}, \ \sum \frac{1}{n^a}, \ \sum \frac{1}{q^n}, \ \sum \frac{1}{n!}, \ \sum \frac{1}{n!\,n^r}, \ \sum \frac{1}{n^n},$$

$$\frac{1}{n^{nq}}, \ \frac{1}{n^{nn}}, \ldots$$

$$a > 1, \quad p \text{ întreg} \geqslant 2, \quad q > 1, \quad r > 0.$$

De asemenea, o scară de serii din ce în ce mai divergente:

$$(50') \qquad \cdots \sum \frac{1}{n \log n \ldots (\log_p n)^a}, \ldots, \sum \frac{1}{n(\log n)^a}, \sum \frac{1}{n^a}, \sum q^n, \ldots$$

$$a \leqslant 1, \quad p \text{ întreg} \geqslant 1, \quad q \geqslant 1.$$

În prima scară rapiditatea convergenței crește pentru fiecare tip de serie odată cu a, q și r.

În a doua scară rapiditatea divergenței crește cînd a descrește sau q crește.

Seria geometrică conduce la criteriile cele mai simple. Cum în practica seriilor au însemnătate numai acele care converg repede, aceste criterii sînt și cele mai utilizate. Ele sînt bine cunoscute:

Teorema 4. *(Criteriul lui Cauchy — de specia I). Seria* $\sum u_n$ *este*

$$\begin{cases} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{cases} \text{dacă, } \sqrt[n]{u_n} \begin{cases} \leqslant q < 1 \\ \geqslant 1 \end{cases} \quad (n > n_0) \quad \text{sau dacă } \lim \sqrt[n]{u_n} \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases}.$$

Teorema 5. *(Criteriul lui D'Alembert — de specia II). Seria* $\sum u_n$ *este*

$$\begin{cases} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{cases} \text{dacă } \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} \leqslant q < 1 \\ \geqslant 1 \end{cases} \quad (n > n_0) \quad \text{sau dacă } \lim \frac{u_{n+1}}{u_n} \begin{cases} < 1 \\ > 1 \end{cases}.$$

Sînt încă foarte întrebuințate criteriile de comparație cu seria hiperarmonică $\frac{1}{n^a}$, care au o putere mai mare. Criteriul hiperarmonic de specia I se scrie:

$$\begin{cases} \text{convergență} \\ \text{divergență dacă } u_n \end{cases} \quad (n > n_0) \qquad \begin{cases} \leqslant \frac{1}{n^a} & a > 1, \\ \geqslant \frac{1}{n^a} & a \leqslant 1, \end{cases}$$

sau, luînd logaritmii:

Teorema 6. $\sum u_n$ *este*

$$\begin{cases} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{cases} \text{dacă } \frac{\log u_n}{\log n} \begin{cases} \leqslant -a < -1, \\ \geqslant -1, \end{cases} \quad (n > n_0) \quad \text{sau dacă } \lim \frac{\log u_n}{\log n} \begin{cases} < -1, \\ > -1. \end{cases}$$

Criteriul hiperaramonic de specia a II-a se scrie:

$$(51) \qquad \begin{cases} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{cases} \text{dacă} \frac{u_{n+1}}{u_n} \quad (n > n_0) \qquad \begin{cases} \leqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^a & a > 1, \\ \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right)^a & a \leqslant 1 \end{cases}$$

(am luat pentru mai multă simplitate $v_n = \frac{1}{(n-1)^a}$, $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^a = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^a$.

Dacă observăm că $\left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^a - 1\right] n \to -a$, și că $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) n$ este în cele două cazuri $\left\{\begin{matrix} \leqslant \\ \geqslant \end{matrix}\right. \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right)^a - 1\right] n$, putem prezenta aceste criterii sub forma:

Teorema 7. (*Raabe*). $\sum u_n$ *este*

$$\left\{\begin{matrix} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{matrix}\right. \text{dacă} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) n \left\{\begin{matrix} \leqslant -a < -1 \\ \geqslant -1 \end{matrix}\right. \quad (n > n_0)$$

$$\text{sau dacă } \lim \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) n \left\{\begin{matrix} < -1, \\ > -1. \end{matrix}\right.$$

Dacă însă scriem (51) sub forma

$$n \log \frac{u_{n+1}}{u_n} \left\{\begin{matrix} \leqslant \\ \geqslant \end{matrix}\right. a n \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left\{\begin{matrix} a > 1, \\ a \leqslant 1 \end{matrix}\right.$$

și observăm că $n \log \left(1 - \frac{1}{n}\right) \to -1$, criteriul capătă forma:

Teorema 8. (*Schlömilch*). $\sum u_n$ *este*

$$\left\{\begin{matrix} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{matrix}\right. \text{dacă } n \log \frac{u_{n+1}}{u_n} \left\{\begin{matrix} \leqslant -a < -1 \\ \geqslant -1 \end{matrix}\right. (n > n_0) \text{ sau dacă}$$

$$\lim n \log \frac{u_{n+1}}{u_n} \left\{\begin{matrix} < -1 \\ > -1 \end{matrix}\right. .$$

Vom mai considera criteriul de specia a II-a dat de seria imediat precedentă în scara (50):

$$\left\{\begin{matrix} \text{convergență} \\ \text{divergență} \end{matrix}\right. \text{dacă} \frac{u_{n+1}}{u_n} \left\{\begin{matrix} \leqslant \\ \geqslant \end{matrix}\right. \frac{(n-1)(\log(n-1))^a}{n(\log n)^a} \left\{\begin{matrix} a > 1 \\ a \leqslant 1 \end{matrix}\right. (n > n_0)$$

Să scriem

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{(n-1)(\log(n-1))^a}{n(\log n)} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\log n}\right]^a .$$

Deoarece $\log \left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{\theta_n}{n}$ cu $\theta_n \to 1$ și $(1+y)^a = 1 + ay\theta'$ cu $\theta' \to 1$ pentru $y \to 0$, avem

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[1 - \frac{\theta_n}{n \log n}\right]^a = \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{a\theta_n\theta_n'}{n \log n}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{n} - \frac{a\theta_n''}{n \log n} \text{ cu } \theta_n'' \to 1.$$

Să punem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\alpha_n}{n \log n}.$$

Criteriul se scrie acum

$$\begin{cases} \text{convergență} \\ \text{divergență} \end{cases} \text{dacă} \begin{cases} \alpha_n \geqslant a\theta_n'' & a > 1, \\ \alpha_n \leqslant a\theta_n'' & a \leqslant 1 \end{cases} \quad (n > n_0).$$

Avînd în vedere că $a\theta_n'' \to a$, aceste condiții sînt echivalente cu $\alpha_n \geqslant a' > 1$, respectiv $\alpha_n \leqslant a' < 1$, pentru n destul de mare $(n > n_1)$. Așadar

Teorema 9. *Dacă punem*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{1}{n} - \frac{\alpha_n}{n \log n}, \tag{52}$$

seria $\sum u_n$ *este*

$$\begin{cases} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{cases} \text{cînd} \begin{cases} \alpha_n \geqslant a > 1 \\ \alpha_n \leqslant a < 1 \end{cases} \text{sau cînd}$$

$$\lim \alpha_n \begin{cases} > 1 \\ < 1 \end{cases}.$$

De aici se deduce următorul criteriu mai slab, dar mai ușor de aplicat uneori:

Teorema 10. *(Criteriul lui Gauss). Dacă putem pune*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} - \frac{\gamma_n}{n^{\lambda}} \tag{53}$$

cu β *constant,* γ_n *mărginiți și* $\lambda > 1$, *atunci* $\sum u_n$ *este convergentă cînd* $\beta > 1$, *divergentă cînd* $\beta \leqslant 1$.

Cînd $\beta \neq 1$ avem

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) n = -\beta - \frac{\gamma_n}{n^{-1+\lambda}} \to -\beta$$

(căci $-1 + \lambda > 0$), și ajunge să aplicăm criteriul lui Raabe. Cînd $\beta = 1$, $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ este de forma (52) cu

$$\alpha_n = \frac{\gamma_n \log n}{n^{-1+\lambda}}.$$

Cum $\alpha_n \to 0$ (pentru că γ_n este mărginit și $-1 + \lambda > 0$), avem divergență.

Exemple. 3. $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^n}$ *converge pentru că* $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{n} \to 0 < 1$.

4. $\sum_1^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ *converge:* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e} < 1$.

Sau pentru că $u_n = \frac{1}{n} \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \leqslant \frac{2}{n^2}$ $(n > 2)$.

5. $\sum_1^\infty \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$ *diverge* pentru că $\frac{1}{n} : u_n = \sqrt[n]{n} \to 1 \,(\neq 0, \infty)$.

6. $\sum_1^\infty \left(\frac{1}{n} - \log\frac{n+1}{n}\right)$ *converge*. Căci $u_n = \frac{\theta}{n^2}$ cu $\theta \to 1$.

7. $\sum_0^\infty (-1)^n \binom{\alpha}{n} \begin{cases} \text{converge pentru } \alpha \geqslant 0 \\ \text{diverge pentru } \alpha < 0 \end{cases}$. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{\alpha - n}{n+1} > 0$ pentru $n > \alpha$, deci u_n au același semn pentru $n > \alpha$ și îi putem presupune > 0. Apoi $\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) n = -(\alpha + 1)\frac{n}{n+1} \to -(\alpha + 1)$. Se aplică criteriul lui Raabe, iar în cazul $\alpha = 0$ (cînd criteriul nu se aplică) seria se reduce la $u_0 = 1$.

8. $\sum_1^\infty \left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)}\right)^\alpha \begin{cases} \text{converge pentru } & \alpha > 2 \\ \text{diverge pentru } & \alpha \leqslant 2 \end{cases}$. Avem $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^\alpha = \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{\theta}{n^2}\right)\right]^\alpha = \left(1 - \frac{1}{2n} + \frac{\theta'}{n^2}\right)^\alpha = 1 - \frac{\alpha}{2n} + \frac{\gamma}{n^2}$ cu θ, θ', γ mărginiți. Se aplică criteriul lui Gauss.

9. $\sum_{n_0}^\infty \frac{P(n)}{Q(n)}$, *unde P, Q sînt polinoame de grade p, q și n_0 este mai mare decît rădăcinile întregi ale lui Q, este convergentă cînd $q > p + 1$, divergent cînd $q < p + 1$.* Căci $u_n : \frac{1}{n^{q-p}}$ are o limită $\neq 0, \infty$.

10. *Dacă* $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n^p + a_1 n^{p-1} + \ldots + a_p}{n^p + b_1 n^{p-1} + \ldots + b_p}$, *seria* Σu_n *este* $\begin{cases} \text{convergentă} \\ \text{divergentă} \end{cases}$ *cînd* $\begin{cases} b_1 - a_1 > 1 \\ b_1 - a_1 \leqslant 1 \end{cases}$ (*Gauss*).

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{a_1}{n} + \frac{\theta}{n^2}\right)\left(1 - \frac{b_1}{n} - \frac{\theta'}{n^2}\right) = 1 + \frac{a_1 - b_1}{n} + \frac{\gamma}{n^2}$$

cu θ, θ', γ mărginiți și se aplică criteriul lui Gauss.

Seriile $\sum \frac{1}{n \cdot \log n \ldots (\log_p n)^a}$ din (50) și (50′) ne dau o scară de criterii din ce în ce mai puternice, cu cît p crește. Ele se numesc criterii logaritmice. Importanța lor practică este însă mică, iar cea teoretică este redusă prin faptul că aceste criterii, oricît de mare ar fi p (și de altfel nici o altă scară asemănătoare de criterii), nu pot fi eficace în toate cazurile (vezi Knopp, Unendliche Reihen).

§ 20. Criteriul lui Kummer

Printre criteriile de convergență, cel care urmează are o situație excepțională, prin marea sa generalitate.

Teorema 1 *(Criteriul lui Kummer). Fie k_n un șir oarecare de numere > 0. Seria $\sum u_n$ e convergentă dacă există un număr $K > 0$ așa ca să avem pentru n destul de mare*

$$k_n - \frac{u_{n+1}}{u_n} k_{n+1} \geqslant K > 0 \qquad (n > n_0). \tag{54}$$

Într-adevăr, $k_n u_n - k_{n+1} u_{n+1} \geqslant K u_n > 0$ arată că şirul $k_n u_n$ este monoton descrescător şi că există $\lim k_n u_n = l \geqslant 0$. Rezultă că seria cu termeni pozitivi $\frac{1}{K} \sum_{n_0}^{\infty} (k_n u_n - k_{n+1} u_{n+1})$ este convergentă, deoarece $S_n = \frac{1}{K} (k_{n_0} u_{n_0} - k_n u_n) \to$ $\to \frac{1}{K} (u_{n_0} u_{n_0} - l)$. u_n are termenii cel mult egali cu ai acestei serii, deci este convergentă.

Observaţia 1. Se poate adăoga: seria $\sum u_n$ este divergentă dacă

$$k_n - \frac{u_{n+1}}{u_n} k_{n+1} \leqslant 0 \qquad (n > n_0)$$

şi $\sum \frac{1}{k_n}$ este o serie divergentă. Căci avem atunci

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{1}{k_{n+1}} : \frac{1}{k_n};$$

acesta nu este decît o altă formulare a teoremei 3 din § 19.

Observaţia 2. Din criteriul lui Kummer, ţinîndu-se seama de observaţia precedentă se pot deduce în mod simplu diverse criterii de specia a II-a.

Astfel criteriul lui D'Alembert se obţine luînd $k_n = 1$.

Criteriul lui Raabe se deduce punînd $k_n = n - 1$ $(n > 1)$ şi $a = K + 1$; mai general punînd $k_{n+1} = n \log n \ldots \log_p n$ se obţin toate criteriile logaritmice de specia a II-a.

De exemplu, în cazul $p = 1$ avem

$$k_n - \frac{u_{n+1}}{u_n} k_{n+1} = n \log n \left(\frac{n-1}{n} \frac{\log (n-1)}{\log n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) =$$

$$= n \log n \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{\log\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\log n} \right) - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right] =$$

$$= n \log n \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \log n} - \frac{u_{n+1}}{u_n} \right) + \varepsilon,$$

unde $\varepsilon \to 0$. Se obţine astfel:

$$\text{seria} \begin{cases} \text{converge} \\ \text{diverge} \end{cases} \text{dacă} \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \log n} \right) n \log n \begin{cases} \leqslant -a < 0 \\ \geqslant 0 \end{cases}.$$

Generalizarea la un p oarecare nu întîmpină dificultăţi.

Exemplul 1. Fie $k_n > 0$ *şi* $k_n \to +\infty$, $K > 0$. *Atunci seria* $\sum_{0}^{\infty} \frac{(k_0 - K) \ldots (k_{n-1} - K)}{k_0 \ldots k_n}$ *este convergentă.* Căci $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{k_n - K}{k_{n+1}}$ sau $k_n - \frac{u_{n+1}}{u_n} k_{n+1} = K > 0$ şi se aplică criteriul lui Kummer (Ipoteza $k_n \to +\infty$ face ca termenii să păstreze un semn constant începînd de la un rang destul de mare; în loc de aceasta era destul să presupunem $k_n > K > 0$).

§ 21. Criterii de convergență pentru serii multiple cu termeni pozitivi

Dacă seria $\sum_0^\infty \cdots \sum_0^\infty u_{n_1, \ldots, n_k}$ are termenii $\geqslant 0$, suma parțială $S_{n_1, \ldots, n_k}$ crește monoton cînd un indice crește, ceilalți rămînînd constanți. În sensul acesta se zice că $S_{n_1, \ldots, n_k}$ este o funcție monoton crescătoare de $n_1, \ldots, n_k$ sau un șir monoton crescător.

Pentru o funcție $f(x^1, \ldots, x^k)$ **monotonă într-o regiune** $A(x^1 > a^1, \ldots, x^k > a^k)$ — și în particular pentru un șir $S_{n_1, \ldots, n_k}$ monoton — rămîne adevărată aceiași teoremă **fundamentală ca pentru funcțiile** monotone de o variabilă:

Teorema 1. *Limita funcției* $f(x^1, \ldots, x^k)$ *pentru* $x^1 \to +\infty, \ldots, x^k \to +\infty$, *există și este egală cu marginea superioară sau inferioară a funcției, după cum ea este monoton crescătoare sau descrescătoare.*

Demonstrația e analoagă. Fie de exemplu, $f(x, x')$ monoton crescătoare: $f(x_1, x') \geqslant f(x, x')$ dacă $x_1 > x$ și $f(x, x_1') \geqslant f(x, x')$ dacă $x_1' > x'$; de unde și $f(x_1, x_1') \geqslant f(x, x')$ dacă $x_1 > x, x_1' > x'$ (căci avem atunci $f(x_1, x_1') \geqslant f(x_1, x') \geqslant f(x, x')$). Fie $L = \sup f(x, x')$, (care există în virtutea teoremei lui Bolzano); aceasta înseamnă: 1° $f(x, x') \leqslant L$ în A și 2° oricare ar fi $\varepsilon > 0$, există în A un punct (x_0, x_0') pentru care $f(x_0, x_0') > L - \varepsilon$, dacă $L \neq +\infty$; iar dacă $L = +\infty$, oricare ar fi $M > 0$ avem, într-un punct (x_0, x_0'), $f(x_0, x_0') > M$. În primul caz, η fiind cel mai mare dintre numerele x_0, x_0', vom avea

$$|L - f(x,x')| = L - f(x, x') < L - f(\eta, \eta) < L - f(x_0, x_0') < \varepsilon$$

pentru $x > \eta$, $x' > \eta$, iar în cazul al doilea

$$f(x, x') > f(\eta, \eta) > f(x_0, x_0') > M$$

pentru $x > \eta$, $x' > \eta$. Acestea probează că $L = \lim_{x \to +\infty,\, x' \to +\infty} f(x, x')$.

Reciproc, fie $L = \lim_{x \to +\infty,\, x' \to +\infty} f(x, x')$. Dacă $L < +\infty$, avem $f(x, x') \leqslant L$, căci altfel ar exista o valoare a funcției $f(x_1, x_1') = L' > L$ și s-ar conchide din $f(x, x') \geqslant L'$ pentru $x > x_1$, $x > x_1'$, că limita funcției este $\geqslant L'$ și deci $\geqslant L$. Pe de altă parte avem prin definiția limitei, pentru orice $\varepsilon > 0$, puncte (x_0, x_0') în care

$$|L - f(x_0, x_0')| = L - f(x_0, x_0') < \varepsilon \text{ sau } f(x_0, x_0') > L - \varepsilon.$$

Astfel $L = \sup f(x, x')$. La fel cazul $L = +\infty$. Urmează

Teorema 2. *O serie multiplă cu termeni pozitivi este convergentă sau divergentă și suma ei este* ***marginea superioară sumelor parțiale.***

Corolar. *Dacă o serie cu termeni pozitivi este convergentă, orice serie extrasă din ea (simplă sau multiplă) este de asemenea convergentă.*

De aici rezultă că teoremele 1 și 2 § 19 privitoare la compararea seriilor cu termeni pozitivi rămîn valabile și pentru seriile multiple.

Aceste teoreme conduc la criteriile de specia I. În ce privește teorema 3 § 19, din care decurg criteriile de specia a II-a, ea trebuie enunțată astfel:

Teorema 3. *Fiind dată seria* $\sum \ldots \sum u_{n_1, \ldots, n_k}$, *ea este:*

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{convergentă dacă} \\ \\ \textit{divergentă dacă} \end{array}\right. \quad \frac{u_{n_1+1, n_2, \ldots, n_k}}{u_{n_1, n_2, \ldots, n_k}} \left\{\begin{array}{l} \leqslant \dfrac{c_{n_1+1, n_2, \ldots, n_k}}{c_{n_1, n_2, \ldots, n_k}} \quad \text{și} \\ \\ \geqslant \dfrac{d_{n_1+1, n_2, \ldots, n_k}}{d_{n_1, n_2, \ldots, n_k}} \quad \text{sau} \end{array}\right.$$

$$\frac{u_{n_1, n_2+1, n_3, \ldots, n_k}}{u_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k}} \left\{\begin{array}{l} \leqslant \dfrac{c_{n_1, n_2+1, n_3, \ldots, n_k}}{c_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k}} \quad \text{și} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad , \ldots . \\ \geqslant \dfrac{d_{n_1, n_2+1, n_3, \ldots, n_k}}{d_{n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k}} \quad \text{sau} \end{array}\right.$$

$$(n_1 > n_1^0, \ldots, n_k > n_k).$$

Într-adevăr, luînd pentru simplitatea scrierii o serie dublă, avem în cazul superior:

$$\frac{u_{n, n'}}{c_{n, n'}} \leqslant \frac{u_{n-1, n'}}{c_{n-1, n'}} \leqslant \frac{u_{n-1, n'-1}}{c_{n-1, n'-1}} \leqslant \ldots \leqslant \frac{u_{\nu, \nu}}{c_{\nu, \nu}} = K > 0$$

pentru $n > \nu$, $n' > \nu$, deci $u_{n, n'} \leqslant K c_{n, n'}$, de unde urmează convergența. La fel cazul inferior.

Pentru a ne procura serii de comparație, ne putem servi de teorema următoare, valabilă pentru orice serie:

Teorema 4. *Seria* $\sum \ldots \sum W'_{n_1}, \ldots, W^{(k)}_{n_k}$ *este convergentă dacă seriile simple* $\sum W'_{n_1} = S', \ldots, \sum W^{(k)}_{n_k} = S^{(k)}$ *sînt convergente, și are atunci suma* $S' \ldots S^{(k)}$.

Și reciproca este adevărată dacă $W'_{n_1}, \ldots, W^{(k)}_{n_k}$ sînt > 0.

Se vede, într-adevăr, imediat, că $S_{n_1, \ldots, n_k} = S_{n_1} \ldots S_{n_k}$ de unde rezultă trecînd la limită pentru $n_1 \to \infty, \ldots, n_k \to \infty$, în cazul cînd seriile simple sînt toate convergente, $S = S' \ldots S^{(n)}$ iar în cazul cînd unele sînt convergente și altele divergente, $S = \pm \infty$.

Seria $\sum \ldots \sum W'_{n_1} \ldots W^{(k)}_{n_k}$ se numește *produsul* seriilor $\sum W'_{n_1}, \ldots, \sum W'^{(k)}_{k}$. Noțiunea aceasta și teorema precedentă se extind imediat la produse de serii multiple.

Exemple 1. *Am observat deja că* $\Sigma \ldots \Sigma q_1^n \ldots q_l^n$, *este convergentă cînd* $|q_1| < 1, \ldots, |q_k| < 1$ *și are atunci suma* $\dfrac{1}{1-q_1} \cdots \dfrac{1}{1-q_k}$. *Seria este divergentă cînd unele dintre relațiile* $q_1, \ldots, q_k$, *sînt* $\geqslant 1$ *iar celelalte* > 0.

2. $\Sigma \ldots \Sigma \dfrac{1}{n_1^{a_1} \ldots n_k^{a_k}}$ *este convergentă cînd* $a_1 > 1, \ldots, a_k > 1$; *divergentă în celelalte cazuri* ($a_1, \ldots, a_k$ *reali*).

Să stabilim, de exemplu, criteriile date de seria geometrică, pentru serii duble. Cel de specia I este:

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{convergență:} \\ \textit{divergență:} \end{array}\right. \quad u_{nn} \left\{\begin{array}{ll} \leqslant q^n q'^{n'} & q < 1 \text{ și } q' < 1, \\ \geqslant q^n q'^{n'} & q \geqslant 1 \ \textit{sau}\ q' \geqslant 1. \end{array}\right.$$

Îl putem prezenta și astfel:

Seria este convergentă dacă există niște constante pozitive A, A' astfel că

$$\frac{\log u_{n,\,n'}}{An + A'n'} \leqslant -1 \qquad (A > 0,\ A' > 0),$$

este divergentă dacă există o constantă K astfel că

$$\frac{1}{n} \log u_{nn'} \geqslant K \text{ sau } \frac{1}{n'} \log u_{nn'} \geqslant K.$$

Criteriul de specia a II-a:

$$\begin{cases} \textit{convergență} & \dfrac{u_{n+1,\,n'}}{u_{n,\,n'}} \leqslant q < 1 \text{ și } \dfrac{u_{n,\,n'+1}}{u_{n,\,n'}} \leqslant q' < 1 \\ \textit{divergență} & \dfrac{u_{n+1,\,n'}}{u_{n,\,n'}} \geqslant 1 \quad \textit{sau} \quad \dfrac{u_{n,\,n'+1}}{u_{n,\,n'}} \geqslant 1. \end{cases}$$

După cum se vede, criteriile de specia a II-a pentru serii duble se obțin prin dedublarea celor relative la serii simple (cu conjuncția „și" în cazul convergenței și „sau" în cazul divergenței), în cazul cînd comparația se face cu serii de tipul $\sum \ldots \sum W_{n_1}, \ldots, W_{n_k}$.

Exemplul. 3. $\sum\sum e^{-(n+n')}$ *este convergentă* pentru că $\dfrac{\log u_{n,\,n'}}{n + n'} = -1.$

Toate aceste criterii au aplicabilitate redusă. Mai importantă este teorema următoare, care reduce chestiunea convergenței seriilor multiple cu termeni pozitivi la aceea referitoare la serii simple cu termeni pozitivi:

Teorema 5. *Pentru ca o serie multiplă cu termeni pozitivi să fie convergentă este necesar și suficient ca una din seriile simple deduse din cea dată (prin ordonarea termenilor) să fie convergentă; cele două serii au atunci aceeași sumă. Mai mult, seria simplă considerată poate fi substituită prin o serie obținută din ea prin sumări parțiale (de exemplu în cazul unei serii duble, seria ce se obține sumînd după diagonale sau după pătrate).*

Într-adevăr, fie $S_{n_1, \ldots, n_k}$ sumele parțiale ale seriei $\sum \ldots \sum u_{n_1, \ldots, n_k}$ și σ_p acelea ale seriei simple $\sum v_p$ dedusă din prima serie. Termenii unei sume σ_p sînt conținuți într-o sumă $S_{n_1, \ldots, n_k}(n_1, \ldots n_k$, fiind cei mai mari indici pe care îi au termenii din σ_p în seria multiplă) deci $\sigma_p \leqslant S_{n_1, \ldots, n_k}$ și invers, orice $S_{n_1, \ldots, n_k}$ are termenii într-o sumă σ_p și deci $S_{n_1, \ldots, n_k} \leqslant \sigma_p$. De aici urmează $\sup \sigma_p = \sup S_{n_1, \ldots, n_k}$ (căci dacă am avea semnul $<$, ar exista o sumă $S_{n_1, \ldots, n_k} >$ toate sumele σ_p, iar dacă am avea semnul $>$, ar exista o sumă $\sigma_p >$ toate sumele $S_{n_1, \ldots, n_k}$). Cu aceasta este demonstrată prima parte a enunțului. A doua parte revine la o proprietate cunoscută a seriilor simple (teoremele 1, 2 § 15).

Exemple 4. $\sum_1^\infty \cdots \sum_1^\infty \dfrac{1}{(n_1^2 + \ldots + n_m^2)^p}$ *este convergentă cînd* $p > \dfrac{m}{2}$, *divergenta cînd* $p \leqslant \dfrac{m}{2}$. Evident, putem presupune $p > 0$ pentru că altfel seria e vizibil divergentă. Vom considera seria sumată „după cuburi", $\sum v'_n$, unde v_n este suma termenilor $u_{n_1, \ldots, n_m}$, care au cel puțin un indice egal cu n și ceilalți $\leqslant n$. Fie h_n numărul acestor termeni.

Numărul termenilor care au indici $\leqslant n$ este n^m, acela al termenilor cu indicii $\leqslant n-1$ este $(n-1)^m$, deci

$$h_n = n^m - (n-1)^m = mn^{m-1} + \dots .$$

Avem apoi pentru fiecare din aceşti termeni.

$$\frac{1}{(mn^2)^p} \leqslant u_{n_1, \dots, n_m} \leqslant \frac{1}{(n^2)^p},$$

deci

$$\frac{1}{m^p} \cdot \frac{h_n}{n^{2p}} < v_n < \frac{h_n}{n^{2p}},$$

de unde se vede că Σv_n are aceiaşi natură ca $\Sigma \frac{h_n}{n^{2p}}$; aceasta este de aceeaşi natură ca $\Sigma \frac{1}{n^{2p-m+1}}$, căci $\frac{h_n}{n^{2p}} : \frac{1}{n^{2p-m+1}} \to m \neq 0, \infty$. Ultima serie (hiperarmonică) este convergentă numai pentru $2p - m + 1 > 1$ sau $p > \frac{m}{2}$.

5. *Generalizare. Fie $f(x_1, \dots, x_m)$ o funcţie de variabile reale, asimptotic egală cu o funcţie $\varphi(x_1, \dots, x_m)$ finită, continuă, omogenă de grad $2p$ şi pozitiv definită (adică $\varphi > 0$ cu singura excepţie a punctului $x_1 = 0, \dots, x_m = 0$). Avem cu alte cuvinte $\frac{f}{\varphi} \to 1$ pentru $x_1 \to +\infty, \dots,$ $\dots, x_m \to +\infty$. În aceste condiţii $\sum_1 \dots \sum_1 \frac{1}{f(n_1, \dots, n_m)}$ este convergentă cînd $p > \frac{m}{2}$, divergentă cînd $p \leqslant \frac{m}{2}$ (Jordan).*

Este destul să observăm că $\frac{\varphi}{(x_1^2 + \dots + x_m^2)^p}$ are un minim $m > 0$ şi un maxim $M < +\infty$. Într-adevăr, fiind vorba de o funcţie omogenă de grad 0, putem multiplica variabilele cu un factor astfel ca să avem $x_1^2 + \dots + x_m^2 = 1$ şi deci raportul considerat este egal cu valorile funcţiei φ pentru aceste valori ale variabilelor. Cum ele nu pot fi simultan nule, $\varphi \neq 0$ şi pe de altă parte φ e finit prin ipoteză. Deoarece apoi punctul $(x_1, \dots, x_m)$ descrie în aceste condiţii o mulţime închisă şi φ este continuă, această funcţie atinge un minim $m > 0$ şi un maxim $M < +\infty$. Urmează că seria dată, care are aceeaşi natură ca $\Sigma \dots \Sigma \frac{1}{\varphi(n_1, \dots, n_m)}$, are aceeaşi natură şi ca seria $\Sigma \dots \Sigma \frac{1}{(n_1^2 + \dots + n_m^2)^p}$; se aplică exemplul 4.

6. $\sum_1^\infty \cdots \sum_1^\infty \frac{1}{n_1^p + \dots + n_m^p}$ este *convergentă cînd $p > m$, divergentă cînd $p \leqslant m$.*

Aplicaţie a rezultatului precedent (exemplul 5).

§ 22. Convergenţa absolută a seriilor

Seriile cu termeni pozitivi fiind cele mai uşor de studiat, este un mare avantaj să putem reduce chestiunea convergenţei unei serii oarecari la aceea a unei serii cu termeni pozitivi. Aceasta e posibil în cazul unei mari clase de serii numite absolut convergente.

Definiţie. *Se zice că seria $\Sigma \dots \Sigma w_{n_1, \dots, n_k}$ este absolut convergentă (necondiţionat convergentă) dacă seria modulilor $\Sigma \dots \Sigma |w_{n_1, \dots, n_k}|$ este convergentă. În cazul contrar (seria modulilor divergentă) dacă seria dată este convergentă ea se numeşte semiconvergentă (condiţionat convergentă).*

Însemnătatea acestei noțiuni rezidă în două proprietăți esențiale ale seriilor absolut convergente: ele sînt convergente și comutative.

Teorema 1. *O serie absolut convergentă este convergentă.*

Demonstrația este o simplă aplicație a criteriului lui Cauchy (§ 16): $S_{n_1, \ldots, n_k}$ și $\sigma_{n_1, \ldots, n_k}$ fiind sumele parțiale ale seriei date și seriei modulilor, avem

$$|S_{n_1+p_1, \ldots, n_k+p_k} - S_{n_1, \ldots, n_k}| \leqslant \sigma_{n_1+p_1, \ldots, n_k+p_k} - \sigma_{n_1, \ldots, n_k}$$

(se va observa că în membrul I avem o sumă de termeni înlocuiți în membrul al doilea prin modulii lor). Or, fiind dat $\varepsilon > 0$, există $\nu > 0$ astfel că, pentru $n_1 > \nu, \ldots, n_k > \nu$ și $p_1, \ldots, p_k$ arbitrari $\geqslant 0$, membrul al doilea este $< \varepsilon$; la aceeași condiție va satisface și membrul întîi, ceea ce probează că seria dată este convergentă.

Corolar. *O serie extrasă dintr-o serie absolut convergentă este de asemenea convergentă și chiar absolut.*

Aceasta nu se întîmplă totdeauna în cazul seriilor semiconvergente.

Exemple

1. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *este convergentă, dar nu absolut, seria modulilor* $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$ *fiind divergentă.* $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$ *este absolut convergentă cînd* $a > 1$.

2. *Dacă din seria* 1) *extragem* $-\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \ldots - \frac{1}{2m} - \ldots = -\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{1}{m}$, *obținem o serie divergentă.*

3. $\sum_1^\infty \frac{1}{n}\left(\cos\frac{\pi n}{2} + i \sin\frac{\pi n}{2}\right)$ *este semiconvergentă.* Într-adevăr, ea este convergentă, partea reală fiind $\frac{1}{2}\sum_1^\infty \frac{(-1)^m}{m}$, iar cea imaginară $\sum_0^\infty \frac{(-1)^m}{2m+1}$ — serii convergente. Dar seria modulilor, $\sum_1^\infty \frac{1}{n}$, este divergentă.

4. $\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{1}{(n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 + \alpha_0)^p}$, *unde punctele* α_1, α_2 *nu sînt coliniare cu* 0, *este absolut convergentă dacă* $p > 2$.

Seria modulilor este $\Sigma\Sigma \frac{1}{f(n_1, n_2)}$, unde $f(x_1, x_2) = [(x_1a_1 + x_2a_2 + a_0)^2 + (x_1b_1 + x_2b_2 + b_0)^2]^{\frac{p}{2}}$. Funcția $\varphi(x_1, x_2) = [(x_1a_2 + x_2a_3)^2 + (x_1b_1 + x_2b_2)^2]^{\frac{p}{2}}$ este finită și continuă, omogenă de grad p, pozitiv definită (căci se anulează numai cînd $x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 = 0$, adică α_1 și α_2 sînt pe o dreaptă prin 0); și avem $\frac{f}{\varphi} \to 1$ pentru $x_1 \to +\infty$, $x_2 \to +\infty$. Se aplică deci exemplul 5 de la § 21.

Teorema 2. *Dacă o serie este absolut convergentă modulul sumei ei este* $\leqslant$ *suma seriei modulilor.*

Cu notațiile de mai sus avem

$$|S_{n_1, \ldots, n_k}| \leqslant \sigma_{n_1, \ldots, n_k},$$

de unde $|\lim S_{n_1, \ldots, n_k}| = \lim |S_{n_1, \ldots, n_k}| \leqslant \lim \sigma_{n_1, \ldots, n_k}$, adică

(55) $$|\sum \dots \sum w_{n_1, \dots, n_k}| \leqslant \sum \dots \sum |w_{n_1, \dots, n_k}| .$$

Observație. Aceeași inegalitate are loc în mod evident cînd seria dată este divergentă sau semiconvergentă, dar atunci nu prezintă interes.

Corolar. *Dacă* $R_{n_1, \dots, n_k}$ *și* $\rho_{n_1, \dots, n_k}$ *sînt resturile celor două serii, avem*

(55') $$|R_{n_1, \dots, n_k}| < \rho_{n_1, \dots, n_k}.$$

Teorema 3. *O serie absolut convergentă este comutativă (nu-și schimbă suma oricum s-ar permuta termenii ei) (Dirichlet). Dacă o serie multiplă e absolut convergentă, toate seriile simple deduse din ea (prin ordonarea termenilor) au aceeași sumă ca seria multiplă și sînt absolut convergente.*

Reciproc, o serie multiplă este absolut convergentă dacă o serie simplă, dedusă din ea, este absolut convergentă.

Vom considera întîi o serie simplă $\sum_0^\infty w_n = S$, cu sumele parțiale S_n și fie $\sum_0^\infty w'_p$ o serie dedusă prin permutarea termenilor, avînd sumele parțiale S'_p. Prin ipoteză $\sum_0^\infty |w_n| = \sigma$ este convergentă; fie σ_n sumele ei parțiale. Există un indice μ astfel că

$$\sigma - \sigma_\mu < \varepsilon.$$

Evident, termenii $w_0, \dots, w_\mu$ se vor găsi într-o sumă S'_ν a seriei deduse și cu atît mai mult în sumele S'_p cu $p > \nu$. Surprimînd din $\sum w_n$ termenii sumei S'_p ($p > \nu$) obținem o serie absolut convergentă care are suma $S - S'_p$, și în care lipsesc $w_0, \dots, w_\mu$ și încă alți termeni de indice $> \mu$. Această serie este deci de forma

$$S - S'_p = w_{\mu+\alpha} + w_{\mu+\beta} + \dots .$$

După teorema precedentă,

$$|S - S'_p| \leqslant |w_{\mu+\alpha}| + |w_{\mu+\beta}| + \dots \leqslant |w_{\mu+1}| + |w_{\mu+2}| + \dots$$

(am adăogat modulii termenilor care lipseau, de indice $> \mu$); sau

$$|S - S'_p| \leqslant \sigma - \sigma_\mu < \varepsilon$$

pentru $p > \nu$, ceea ce dovedește că $S'_p \to S$.

Fie acuma o serie multiplă $\sum \sum \dots w_{n, n', \dots}$ absolut convergentă. O serie simplă, dedusă din ea, este absolut convergentă pentru că seria de moduli corespunzătoare este convergentă, fiind dedusă din seria convergentă $\sum \sum \dots |w_{n, n', \dots}|$ (teorema 5, §21.). Toate aceste serii simple, obținîndu-se una din alta prin permutări, au aceeași sumă și pot fi sumate prin asocierea termenilor (teorema 1, §15). În particular, ele au aceeași sumă ca seria sumată prin cuburi, care are aceeași sumă ca seria dată (teorema 1, § 14).

De aici urmează că seria multiplă este comutativă ca și seriile simple deduse din ea (o permutare în seria multiplă corespunde unei permutări în seria simplă).

În sfîrșit, dacă o serie simplă dedusă este absolut convergentă, și seria multiplă este absolut convergentă în virtutea teoremei 5, §21, aplicată seriilor de moduli corespunzătoare. Cu aceasta totul este demonstrat.

Corolar. *O serie multiplă absolut convergentă poate fi sumată prin asocierea termenilor în număr finit. De exemplu, o serie dublă absolut convergentă poate fi sumată prin diagonale.*

Aceasta nu e totdeauna permis în cazul seriilor semiconvergente.

Exemplul 5. *Seria* $\sum_1^\infty \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n+n'}}{\sqrt{nn'}}$ *este semiconvergentă* după cum rezultă din teorema 4, § 21, observînd că $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ este convergentă (sumele parțiale fiind descrescătoare și >0, — vezi și teorema 1, § 24), iar $\sum_1^\infty \frac{1}{\sqrt{n}}$ este divergentă exemplul 1, § 18. Pe de altă parte seria sumată după diagonale este divergentă pentru că termenul ei general,

$$(-1)^{n-1}\left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n-1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = w'_n,$$

nu tinde la zero, întrucît $|w'_n| > \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{n}} + \ldots = 1$ (știm însă că sumarea după cuburi este permisă și la serii semiconvergente).

Mai mult decît atît, putem suma o serie absolut convergentă chiar asociind termeni în număr infinit (care vor forma serii extrase absolut convergente, corolarul teoremei 1). Pentru simplitate ne vom mărgini la cazul seriilor duble.

Teorema 4. *O serie dublă absolut convergentă poate fi sumată după linii sau după coloane.*

Fie $\sum_0^\infty \sum_0^\infty w_{n,n'} = S$. Seriile orizontale (serii extrase) sînt și ele absolut convergente. Fie W_n sumele lor:

$$W_n = \sum_{n'=0}^{\infty} W_{n,n'} \quad (n = 0, 1, \ldots).$$

Este de arătat că $S = \sum_{n=0}^{\infty} W_n$, sau că $S_n = W_0 + \ldots + W_n \to S$.

Să considerăm o serie simplă, dedusă din seria dublă prin ordonarea termenilor, $\sum_0^\infty w'_p$. Cum $\sum_0^\infty |w'_p| = \sigma'$ este convergentă în virtutea teoremei precedente, există pentru $\varepsilon > 0$ dat, un μ astfel că

$$\sigma' - \sigma'_\mu < \varepsilon,$$

unde $\sigma'_\mu = |w'_0| + \ldots + |w'_\mu|$. Fie ν cel mai mare indice de linie pe care îl au termenii $w'_0, \ldots, w'_\mu$ în seria dublă. Suprimînd din seria dublă primele n linii ($n > \nu$) vom obține o serie absolut convergentă (ca serie extrasă), a cărei sumă este $S - S_n$ (teorema 2, § 14) și din care lipsesc $w'_0, \ldots, w'_\mu$. Vom avea atunci

$$|S - S_n| \leqslant |w'_{\mu+1}| + |w'_{\mu+2}| + \ldots = \sigma' - \sigma'_\mu < \varepsilon,$$

ceea ce probează că $S_n \to S$.

Această teoremă rezultă și din teorema 2, §14, observînd numai că seriile orizontale și verticale sînt convergente.

Observația 1. Sumele seriilor orizontale formează o serie absolut convergentă ΣW_n. Căci $|W_n| \leqslant \sum_{n'=0}^{\infty} |w_{n,n'}| = w_n^*$ și cum seria $\Sigma\Sigma |w_{n,n'}| = \sigma$ poate fi sumată după linii, $|W_0| + \ldots + |W_n| \leqslant w_0^* + \ldots + w_n^* < \sigma$, deci $\Sigma |W_n|$ este convergentă.

Observația 2. Și seriile simple absolut convergente pot fi sumate asociind termeni în număr infinit. Să presupunem că, printr-un procedeu oarecare, șirul w_n este descompus în șiruri finite sau infinite, în număr finit sau infinit:

$$(w_{0,0}, \ldots, w_{0,n'}, \ldots), (w_{1,0}, \ldots, w_{1,n'}, \ldots), \ldots, (w_{n,0}, \ldots, w_{n,n'}, \ldots), \ldots$$

astfel că fiecare w_n se află în unul dintre aceste șiruri. Evident, un singur grup de termeni w_n poate fi infinit și anume ultimul, numărul acestor grupuri fiind finit în acest caz. Dacă numărul grupurilor este infinit, atunci fiecare grup nu poate conține decît un număr finit de termeni. Totuși, putem presupune că șirurile sînt infinite și numărul lor infinit adăogînd la nevoie zerori și șiruri formate din zerori. Dacă Σw_n este absolut convergentă, și $\Sigma\Sigma w_{n,n'}$ este absolut convergentă (teorema 3) și ținînd seama și de teorema 4, avem dreptul să scriem

$$\Sigma W_n = \Sigma\Sigma w_{n,n'} = (w_{0,0} + \ldots + w_{0,n'} + \ldots) + (w_{1,0} + \ldots + w_{1,n'} + \ldots) + \ldots$$

Aici zerourile adăugate pot fi suprimate.

După observația 1, seria formată de sumele parantezelor este absolut convergentă. Rezultă acum teorema generală:

Teorema 5. *O serie absolut convergentă poate fi sumată asociind termenii săi oricum (în număr finit sau infinit, luîndu-i la întîmplare).*

Căci considerînd seria simplă dedusă și făcînd aceleași asocieri de termeni în această serie, obținem o serie dedusă din aceea formată de sumele de termeni asociați în seria dată. Aceste două serii sînt absolut convergente, pentru că cea dîntîi este astfel (observația 2), deci au aceiași sumă, care este egală cu suma seriei date (teorema 3).

În legătură cu acestea vom stabili:

Teorema 6. *(Weierstrass-Umordnungssatz). Fie seriile absolut convergente*

$$W_n = \sum_{n'=0}^{\infty} w_{n,n'} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

și

$$w_n^* = \sum_{n'=0}^{\infty} |w_{n,n'}| \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

sumele seriilor de moduli corespunzătoare. Dacă $\sum_{0}^{\infty} w_n^*$ *este convergentă, atunci seriile „verticale"*

$$Z_{n'} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,n'} \qquad (n' = 0, 1, \ldots)$$

sînt absolut convergente și avem

$$\sum_0^\infty W_n = \sum_0^\infty Z_{n'}. \tag{56}$$

Într-adevăr, să considerăm seria dublă $\sum\sum w_{n,n'}$. Ea este absolut convergentă pentru că o sumă parțială $\sigma_{nn'}$ a seriei modulilor are termenii în seriile $w_0^*, \ldots, w_n^*$ și deci $\sigma_{n,n'} < w_0^* + \ldots + w_n^*$; or, aceste din urmă sume sînt mărginite prin ipoteză. Nu rămîne acum decît să aplicăm teorema 4 și observația 1 în cazul seriilor verticale.

Observația 1. Unele dintre seriile date se pot reduce la sume finite. Teorema continuă să se aplice întrebuințînd același artificiu de mai sus: O sumă finită va fi transformată în serie cu aceiași sumă adăugîndu-i-se o infinitate de termeni nuli.

Observația 2. Teorema lui Weierstrass poate servi, între altele, la transformarea seriilor, în sensul de a deduce dintr-o serie simplă $S = \sum w_n$, convergentă, o altă serie $\sum w'_m$ cu aceeași sumă. Din punct de vedere practic, a doua serie ar putea avea avantajul de a converge mai repede. În acest scop se caută a se reprezenta termenii w_n prin serii absolut convergente, astfel ca condițiile teoremei lui Weierstrass să fie îndeplinite; termenii noii serii se vor obține atunci sumînd coloanele.

Exemple. **6.** *Fie* $\sum w_n = S$ *absolut convergentă și* $\sigma_n = \sum_{n=n}^{\infty} u_{n,n'}$ $(n = 0, 1, \ldots)$ *serii convergente cu termeni pozitivi.* Putem scrie $w_n = \frac{1}{\sigma_n}\sum_{n'=n}^{\infty} u_{n,n'}\, w_n$. *Condițiile teoremei lui Weierstrass sînt evident satisfăcute de aceste serii (căci seriile de moduli sînt* $= |w_n|$). *Deci punînd* $w'_m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n} u_{n,m}\, w_n$ *avem* $\sum w'_m = S$.

7. *Astfel să luăm* $u_{n,n'} = \frac{1}{2^{n'+1}}$, *deci* $\sigma_n = \frac{1}{2^n}$. *Vedem că: dacă* $S = \sum_0^\infty w_n$ *este absolut convergentă, seria formată din termenii*

$$w'_m = \frac{w_0 + 2w_1 + \ldots + 2^m w_m}{2^{m+1}}$$

are aceeași sumă.

În § 25 vom da o teoremă asemănătoare, datorită lui Markoff, și care se poate aplica în condiții mai puțin restrictive.

Revenind la proprietatea comutativă a seriilor absolut convergente, vom arăta că ca caracterizează aceste serii.

Teorema 7 *(Riemann). Dintr-o serie simplă semiconvergentă, cu termeni reali, se pot obține prin permutarea termenilor: serii divergente sau convergente avînd o sumă oarecare și mai general, serii oscilatoare între limite oarecari.*

La o serie oscilatoare nu există $\lim S_n$, dar mulțimea numerelor S_n are cel puțin două puncte limită. Căci după teorema lui Bolzano-Weiersrass mulțimea fiind infinită are cel puțin un punct limită și dacă ar avea numai unul, acesta ar fi $\lim S_n$. Mulțimea derivată are atunci o margine superioară (sup) și o margine inferioară (inf), L și l, diferite. Cum mulțimea derivată, a unei mulțimi e totdeauna închisă, L și l sînt puncte limită. Punctul limită

maxim se numește limita superioară și se notează: $L = \overline{\lim}\, S_n$; punctul limită minim se numește limita inferioară și se notează: $l = \underline{\lim}\, S_n$.

Cînd $L = l$, există $\lim S_n = L = l$.

După aceste explicații să venim la demonstrația teoremei lui Riemann. Este destul să dovedim ultima afirmație a enunțului, care cuprinde și pe cea dîntîi; anume, că putem ordona termenii seriei astfel ca cele două limite să aibă valori L și l date dinnainte.

Lăsînd la o parte termenii nuli, vom considera seriile $\sum_1 p_h$ și $-\sum_1 q_k$ formate de termenii pozitivi și de cei negativi ai seriei Σu_n, în ordine neschimbată.

Aceste două serii trebuie să fie divergente. Într-adevăr, dacă ar fi convergente, cu sumele P și Q, sumele parțiale ale seriei $\Sigma |u_n|$ (care sînt constituite din termeni p_h și q_k) ar fi $< P + Q$ și seria dată ar fi absolut convergentă, iar dacă una din seriile considerate ar fi divergentă și cealaltă convergentă, seria dată ar fi evident divergentă (avînd sume parțiale oricît de mari, respectiv oricît de mici).

Să mai observăm că $p_h \to 0$ și $q_k \to 0$, aceste șiruri infinite fiind extrase din $u_n \to 0$ (teorema 1 § 17).

Vom ordona acum termenii seriei Σu_n după regula următoare: Fie întîi L și l finiți. Vom lua din Σp_h numărul necesar de termeni $p_1, \ldots, p_{h_1}$, pentru ca suma lor S'_{h_1} să fie $> L$, dar suma precedentă $S'_{h_1} - p_{h_1} \leqq L$ (cînd nu avem deja $p_1 > L$); aceasta este posibil pentru că seria este divergentă. Apoi vom lua mai departe din $-\Sigma q_k$ numărul necesar de termeni pentru ca suma termenilor luați de la început să fie $S''_{k_1} < l$, dar suma precedentă $S''_{k_1} + q_{k_1} \geqslant l$; aceasta este posibil pentru că seria $-\Sigma q_k$ este divergentă. Vom lua apoi din nou niște termeni din Σp_h astfel ca suma tuturor termenilor luați să fie $S'_{h_2} > L$, dar suma precedentă $S'_{h_2} - p_{h_2} \leqq L$, și așa mai departe. În seria astfel ordonată, avem un șir de sume $S'_{h_1}, S'_{h_2}, \ldots, S'_{h_m}, \ldots$ care conțin ca ultimi termeni $p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots, p_{h_m}, \ldots$ $(h_1 < h_2 < \ldots < h_m < \ldots)$. Cum $p_{h_m} \to 0$ (ca șir infinit extras din $p_h \to 0$), iar $S'_{h_m} - L \leqq p_{h_m}$, avem $S'_{h_m} \to L$. Tot așa șirul de sume parțiale $S''_{k_1}, \ldots, S''_{k_m}, \ldots \to l$. Așadar L și l sînt puncte limită ale sumelor parțiale relative la noua serie.

Rămîne să ne asigurăm că nu pot exista puncte limită în afara intervalului $[l, L]$. Aceasta rezultă din faptul că toate sumele parțiale care nu sînt sume S'_{h_m} sau S''_k sînt cuprinse în acest interval.

În cazul cînd, de exemplu, $L = +\infty$ raționamentul se va modifica astfel: luăm $S'_{h_1} > 1$, apoi $S'_{h_2} > 2$, și în general $S'_{h_m} > m$. Atunci $S'_{h_m} \to +\infty$.

O serie semiconvergentă cu termeni complecși $\Sigma w_n = \Sigma (u_n + iv_n) = S$ este caracterizată (după teorema de mai jos) prin aceea că cel puțin una din seriile cu termeni reali Σu_n, Σv_n este semiconvergentă. În acest caz, urmează din teorema lui Riemann că seria se poate ordona astfel ca să-și piardă convergența; de asemenea ea poate să capete o sumă $\neq S$, cu parte reală sau parte imaginară dată, dar aceasta din urmă afirmație are nevoie de demonstrație (căci permutînd de exemplu termenii w_n astfel ca Σu_n să capete o sumă dată, rămîne de văzut dacă Σw_n nu-și pierde convergența). Mai precis, se poate arăta (P. Lévy, Steinitz) că:

Sumele seriilor convergente sau divergente ce se pot obține prin permutarea termenilor unei serii semiconvergente ocupă tot planul lui Gauss sau numai o dreaptă din acest plan.

Terminăm cu teorema la care ne-am referit:

Teorema 8. *Pentru ca seria* $\sum \dots \sum w_{n_1,\dots,n_k} = \sum \dots \sum (u_{n_1,\dots,n_k} + iv_{n_1,\dots,n_k})$ *să fie absolut convergentă este necesar și suficient ca seriile* $\sum \dots \sum u_{n_1,\dots,n_k}$ *și* $\sum \dots \sum v_{n_1,\dots,n_k}$ *să fie absolut convergente.*

Într-adevăr, după inegalitatea (30), sumele parțiale $\sigma_{n_1,\dots,n_k}$, $\sigma'_{n_1,\dots,n_k}$, $\sigma''_{n_1,\dots,n_k}$ ale seriilor de moduli corespunzătoare celor trei serii precedente satisfac

$$\left.\begin{matrix}\sigma'_{n_1,\dots,n_k}\\ \sigma''_{n_1,\dots,n_k}\end{matrix}\right\} \leqslant \sigma_{n_1,\dots,n_k} \leqslant \sigma'_{n_1,\dots,n_k} + \sigma''_{n_1,\dots,n_k}.$$

Deci, pentru ca sumele $\sigma_{n_1,\dots,n_k}$ să fie mărginite este necesar și suficient ca sumele $\sigma'_{n_1,\dots,n_k}$ și $\sigma''_{n_1,\dots,n_k}$ să fie mărginite.

§ 23. Teorema lui Weierstrass

Pentru a stabili convergența absolută a unei serii simple ne putem servi în multe cazuri de următoarea teoremă, care ne scutește de a examina direct seria modulilor:

Teorema 1. *(Weierstrass). Fie seria* $\sum w_n$; *dacă putem scrie*

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \frac{\beta}{n} - \frac{\gamma_n}{n^\lambda} \tag{57}$$

cu $\lambda > 1$ *și* γ_n *mărginiți, atunci seria este absolut convergentă cînd* $\operatorname{Re}\beta > 1$ *și nu e convergentă cînd* $\operatorname{Re}\beta \leqslant 1$.

1°. Se poate demonstra ușor că seria este absolut convergentă numai pentru $\operatorname{Re}\beta > 1$, aplicînd criteriul lui Gauss, a cărui generalizare în complex este criteriul precedent. Fie $\beta = b + ib'$, $\gamma_n = c_n + ic'_n$. Avem

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|^2 = \left(1 - \frac{b}{n} - \frac{c_n}{n^\lambda}\right)^2 + \left(\frac{b'}{n} + \frac{c'_n}{n^\lambda}\right)^2 = \left(1 - \frac{b}{n}\right)^2 + 2\frac{\theta_n}{n^{\lambda'}},$$

unde λ' este cel mai mic dintre numerele λ, 2 și θ_n este mărginit. Urmează

$$n^{\lambda'}\left(\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| - 1 + \frac{b}{n}\right) = n^{\lambda'}\frac{\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|^2 - \left(1 - \frac{b}{n}\right)^2}{\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| + 1 - \frac{b}{n}} = -\delta_n$$

mărginit, sau

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = 1 - \frac{b}{n} - \frac{\delta_n}{n^{\lambda'}}, \tag{58}$$

unde $\lambda' > 1$ și δ_n este mărginit. Deci, după criteriul lui Gauss, seria $\sum |w_n|$ este convergentă numai pentru $b > 1$.

2°. Rămîne de demonstrat că $\sum w_n$ nu este convergentă cînd $b \leqslant 1$. Aceasta se poate face ușor în cazul $b \leqslant 0$. Dacă $b < 0$, (58) arată că $\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| > 1$ $(n > \nu)$ pentru că avem $-b - \frac{n}{n^{\lambda'-1}} > 0$ $(n > \nu)$ $\left(\text{întrucît } -b - \frac{\delta_n}{n^{\lambda'-1}} \to -b > 0\right)$. Astfel $|w_n|$ fiind crescător, nu poate tinde la 0 și seria $\sum w_n$ nu e convergentă.

3°. Dacă $b = 0$, cum $|\delta_n| < M$ (fix), avem din (58)

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| > 1 - \frac{M}{n^{\lambda'}} > 0 \qquad (n > \nu)$$

și multiplicînd aceste inegalități pentru indicii $\nu, \ldots, n$, obținem

$$|w_{n+1}| > |w_\nu| \left(1 - \frac{M}{\nu^{\lambda'}}\right) \cdots \left(1 - \frac{M}{n^{\lambda'}}\right). \tag{59}$$

Luînd apoi ν destul de mare pentru ca să avem $\frac{M}{\nu^{\lambda'}} < \frac{1}{2}$, se aplică inegalitatea $1 - a > \frac{1}{1+2a}$ valabilă pentru $0 < a < \frac{1}{2}$, și mai departe din inegalitatea $1 + a < e^a$ valabilă pentru orice $a \neq 0$ (real), urmează

$$|w_{n+1}| > \frac{|w_\nu|}{\left(1 + \frac{2M}{\nu^{\lambda'}}\right) \cdots \left(1 + \frac{2M}{n^{\lambda'}}\right)} > \frac{|w_\nu|}{e^{2M\left(\frac{1}{\nu^{\lambda'}} + \cdots + \frac{1}{n^{\lambda'}}\right)}};$$

cum ultima expresie are o limită > 0, deoarece seria $\Sigma \frac{1}{n}$ este convergentă (λ' fiind > 1), se vede iarăși că w_n nu poate tinde la 0.

Concluzia se putea trage mai repede cu ajutorul teoremei 2 § 29, după care produsul infinit $\prod_{\nu}^{\infty} \left(1 - \frac{M}{n^{\lambda'}}\right)$ este convergent; inegalitatea (59) duce atunci imediat la rezultat.

§ 24. Criterii de convergență pentru serii oarecare

Pentru a studia natura unei serii cînd nu se poate stabili convergența absolută avem mijloace mai puține.

Este bine cunoscut criteriul pentru serii alternate (serii cu termeni reali, alternativ pozitiv și negativi):

Teorema 1. *(Leibniz). O serie alternată e convergentă dacă 1° valorile absolute ale termenilor descresc monoton și 2° termenul general* $\to 0$.

Ambele condiții se pot exprima astfel: valorile absolute ale termenilor tind monoton la 0.

Putem scrie o serie alternată: $\sum_0^\infty (-1)^n u_n$, unde $u_n > 0$ (dacă schimbăm eventual semnele termenilor). Condiția 1° atrage:

$$S_{2m} - S_{2m+2} = + u_{2m+1} - u_{2m+2} \geqslant 0,$$

$$S_{2m+1} - S_{2m-1} = - u_{2m+1} + u_{2m} \geqslant 0$$

$$S_{2m} - S_{2m+1} = u_{2m+1} > 0, \tag{60}$$

deci sumele S_{2m} formează un șir monoton descrescător, mărginit inferior, iar sumele S_{2m+1} un șir monoton crescător, mărginit superior (pentru că $S_{2m} > S_{2m-1} > \ldots > S_1$ și $S_{2m+1} < S_{2m} < \ldots < S_0$). Astfel există $\lim S_{2m} = S$

și $\lim S_{2m+1} = S'$. Acum intervine condiția 2°: Trecînd la limită în (60) avem $S - S' = \lim u_{2m+1} = 0$. Din $\lim S_{2m} = \lim S_{2m+1} = S$ urmează imediat $\lim S_n = S$.

Observație. Pentru restul unei serii alternate convergente care satisface condiția 1° avem

$$(-1)^{n+1} R_n = (u_{n+1} - u_{n+2}) + (u_{n+3} - u_{n+4}) = \ldots > 0$$
$$= u_{n+1} - (u_{n+2} - u_{n+3}) - \ldots < u_{n+1},$$

deci restul are semnul primului termen al său și este mai mic în valoare absolută decît acesta.

Exemplul 1. $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$ *este convergentă pentru* $a > 0$, *oscilatoare pentru* $a \leqslant 0$.

Abel a încercat să studieze natura unei serii simple $\sum w_n$ descompunînd termenul general într-un produs de doi factori (care se vor alege convenabil), $w_n = f_n g_n$, și căutînd cazuri de convergență asigurate de condiții oportun impuse factorilor f_n și g_n. În acest scop el s-a servit de o transformare a expresiei $w_{n+1} + \ldots + w_{n+p}$ care apare în criteriul de convergență al lui Cauchy. Fie S_n sumele parțiale ale seriei $\sum f_n$, atunci avem:

$$f_{n+1}g_{n+1} + \ldots + f_{n+p}g_{n+p} = (S_{n+1} - S_n)g_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1})g_{n+2} +$$
$$+ \ldots + (S_{n+p} - S_{n+p-1})g_{n+p} =$$
$$= -S_n g_{n+1} + S_{n+1}(g_{n+1} - g_{n+2}) + \ldots$$
$$\ldots + S_{n+p-1}(g_{n+p-1} - g_{n+p}) + S_{n+p}g_{n+p},$$

sau

$$(61) \qquad \sum_{n+1}^{n+p} f_k g_k = \sum_{n+1}^{n+p} S_k (g_k - g_{k+1}) - S_n g_{n+1} + S_{n+p} g_{n-p}.$$

Aceasta este identitatea lui Abel. Ea arată imediat:

Teorema 2. *Seria* $\sum f_n g_n$ *este convergentă dacă 1° seria* $\sum S_n(g_n - g_{n+1}) = \sum h_n$ *este convergentă și 2° șirul* $S_n g_{n+1} = k_n$ *este convergent.*

Căci aceste condiții atrag, după criteriul lui Cauchy,

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} h_k\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |k_{n+p} - k_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru $n > \nu$ (corespunzător la ε), p arbitrar $\geqslant 0$, deci

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_k g_k\right| \leqslant \left|\sum_{n+1}^{n+p} h_k\right| + |k_{n+p} - k_n| < \varepsilon,$$

care arată după același criteriu că $\sum f_n g_n$ este convergentă.

Cu această teoremă problema convergenței seriei date $\sum w_n = \sum f_n g_n$ este redusă la alte două probleme de convergență, care însă depind de alegerea factorilor f_n, g_n și ar putea fi mai simple.

Să căutăm a satisface condițiile 1° și 2° ale teoremei precedente prin condiții impuse direct șirurilor f_n, g_n (sau seriilor corespunzătoare). Putem

satisface condiția 2° cerînd ca S_n și g_n să fie convergente; cum S_n sînt atunci mărginiți, condiția 1° va fi împlinită dacă $\Sigma(g_n - g_{n+1})$ este absolut convergentă, ceea ce implică de altfel și existența lim g_n finite (căci sumele parțiale ale acestei serii sînt $g_{n+1} - g_0$). Așadar:

Teorema 3. *(Criteriul lui Du Bois Reymond).* $\Sigma f_n g_n$ *este convergentă dacă* Σf_n *este convergentă și* $\Sigma(g_n - g_{n+1})$ *absolut convergentă.*

Să observăm că $\Sigma(g_n - g_{n+1})$ este absolut convergentă dacă șirul g_n este monoton și mărginit (ceea ce înseamnă și g_n real); căci atunci termenii seriei au același semn și seria e convergentă pentru că sumele parțiale $g_{n+1} - g_0$ formează un șir monoton și mărginit. Deci:

Teorema 4. *(Criteriul lui Abel).* $\Sigma f_n g_n$ *este convergentă dacă* Σf_n *este convergentă și șirul* g_n *e monoton și mărginit.*

Altfel zis: Dacă se înmulțesc termenii unei serii convergente Σf_n cu factorii g_n care cresc sau descresc monoton și sînt mărginiți, se obține o serie $\Sigma f_n g_n$ de asemenea convergentă.

Condiția 2° mai poate fi realizată presupunînd S_n mărginiți și $g_n \to 0$. Atunci condiția 1° va fi împlinită dacă $\Sigma|g_n - g_{n+1}|$ este convergentă. Astfel:

Teorema 5. *(Criteriul lui Dedekind).* $\Sigma f_n g_n$ *este convergentă dacă* Σf_n *este oscilatoare cu sume parțiale mărginite (sau cu alte cuvinte oscilează între limite finite),* $g_n \to 0$ *și* $\Sigma(g_n - g_{n+1})$ *este absolut convergentă.*

Ca și mai înainte vom satisface ultima condiție a criteriului precedent luînd șirul g_n monoton. Dar cum trebuie ca $g_n \to 0$, șirul este de la sine mărginit și avem

Teorema 6 *(Criteriul lui Dirichlet).* $\Sigma f_n g_n$ *este convergentă dacă* Σf_n *e oscilatoare cu sume parțiale mărginite și* g_n *tinde monoton la* 0.

Corolar. *Seria* $\Sigma(-1)^n$ *oscilează între limite finite, deci dacă* $u_n \to 0$ *monoton, seria* $\Sigma(-1)^n u_n$ *este convergentă* (aceasta este teorema lui Leibnitz).

Exemplul 2. *Dacă* Σw_n *este convergentă, sînt convergente și seriile*

$$\sum \frac{n+1}{n} w_n, \quad \sum \sqrt[n]{n}\, w_n, \quad \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n w_n, \quad \sum e^{\frac{1}{n}} w_n.$$

Se aplică criteriul lui Abel, observînd că $\frac{n+1}{n} > 1$ și descrește $\left(\frac{n+2}{n+1} < \frac{n+1}{n}\right)$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ crește și $\to e$, $e^{\frac{1}{n}}$ descrește și $\to 1$, iar $\sqrt[n]{n} > 1$ și este descrescător începînd de la $n = 3$, căci

$$\frac{\sqrt[n+1]{n+1}}{\sqrt[n]{n}} = \left[\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}\right]^{\frac{1}{n(n+2)}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{n}\right]^{\frac{1}{n(n+1)}} < \left(\frac{e}{n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}} < 1$$

pentru $n \geqslant 3$.

3. *Dacă* Σw_n *este convergentă sau are sume parțiale mărginite, seriile următoare sînt convergente:*

$$\sum_1^\infty \frac{w_n}{n^a} \ (a > 0), \quad \sum_1^\infty \frac{\log n}{n} w_n, \quad \sum_2^\infty \frac{w_n}{\log_p n}, \quad \sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \frac{w_n}{n}.$$

Se aplică criteriul lui Dirichlet, observînd că: $\frac{1}{n^a}$ $(a>0)\to 0$ monoton, $\frac{\log n}{n}\to 0$ descrescînd $\left(\text{căci } \frac{\log n}{n}=\log \sqrt[n]{n}\right)$, $\frac{1}{\log_p n}\to 0$ descrescînd; în sfîrşit la fel este şirul $\frac{1}{n}\left(1+\ldots+\frac{1}{n}\right)$, căci avem

$$\frac{1}{n}\left(1+\ldots+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\left(1+\ldots+\frac{1}{n+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{n(n+1)}\left(1+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{n}{n+1}\right)>0$$

şi pe de altă parte din $1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\log n\to C$ (exemplul 5, §18) şi $\frac{\log n}{n}\to 0$, urmează $\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\to 0$.

4. *Seriile*

$$\Sigma g_n \sin(a+nx) \text{ dacă } x\neq 2k\pi,$$
$$\Sigma g_n \cos(a+nx) \text{ dacă } x\neq 2k\pi,$$

cu a şi x reali *sînt convergente dacă* $\Sigma|g_n-g_{n+1}|$ *este convergentă şi* $g_n\to 0$ (*şi în particular dacă* $g_n\to 0$ *monoton*) (*Malmştén*).

Rezultă din criteriile **Dedekind** (respectiv Dirichlet) dacă se observă că $\Sigma \sin(a+nx)$ şi $\Sigma\cos(a+nx)$ au sumele parţiale mărginite. Aceasta reiese din formulele cunoscute

(62)

$$\cos(a+x)+\ldots+\cos(a+nx)=\frac{\sin\frac{nx}{2}\cos\left(a+\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \qquad (x\neq 2k\pi)$$

$$\sin(a+x)+\ldots+\sin(a+nx)=\frac{\sin\frac{nx}{2}\sin\left(a+\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\frac{x}{2}} \qquad (x\neq 2k\pi)$$

care se verifică astfel:

$$2\sum_1^n \sin\frac{x}{2}\cos(a+nx)=\sum_1^n\left[-\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}x\right)+\sin\left(a+\frac{2n+1}{2}x\right)\right]=$$

$$=-\sin\left(a+\frac{x}{2}\right)+\sin\left(a+\frac{2n+1}{2}x\right)=2\sin\frac{nx}{2}\cos\left(a+\frac{n+1}{2}x\right).$$

A doua formulă se obţine schimbînd a în $a+\frac{\pi}{2}$.

5. $\sum_1^\infty \cos nx\sin\frac{x}{n}$ *este convergentă pentru* $x\neq 2k\pi$, *divergentă pentru* $x=2k\pi$ $(k\neq 0)$, *convergentă pentru* $x=0$. Pentru $x\neq 2k\pi$ se aplică exemplul 4, observînd că $\sin\frac{x}{n}\to 0$ monoton cu începere de la $n>\frac{2|x|}{\pi}$. Pentru $x=2k\pi$ $(k\neq 0)$ seria devine $\Sigma\sin\frac{2k\pi}{n}$ şi avînd termenul general descrescător, este divergentă pentru că $\lim n\sin\frac{2k\pi}{n}=2k\pi\neq 0$ (teorema 3, §17). Pentru $x=0$ termenii sînt nuli.

6. *Dacă seria* $\sum_0^\infty n(w_n - w_{n-1})$ *și șirul* nw_n *sînt convergente, seria* $\sum_0^\infty w_n$ *este convergentă*

Aplicație a teoremei 2, pentru $f_n = 1$ (deci $S_n = n + 1$) și $g_n = w_n$ (s-a schimbat n în $n - 1$).

Teorema 7. *Fie seria alternată* $\sum_0^\infty (-1)^n u_n (u_n > 0)$. *Dacă putem pune*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} - \frac{\gamma_n}{n^\lambda}$$

cu β *independent de* n, $\lambda > 1$ *și* γ_n *mărginiți, atunci seria este convergentă numai cînd* $\beta > 0$.

Dacă $\beta > 0$, luînd un număr β' astfel ca $0 < \beta' < \begin{cases} \beta \\ 1 \end{cases}$, avem

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 - \frac{\beta'}{n} \qquad n > \nu \tag{63}$$

$\left(\text{căci } \beta + \frac{\gamma_n}{n^{\lambda-1}} \to \beta\right)$. Deci $u_{n+1} < u_n$ $(n > \nu)$, adică u_n descrește. Apoi înmulțind inegalitățile (63) pentru indicii $\nu + 1, \ldots, n$, avem

$$u_{n+1} < u_{\nu+1}\left(1 - \frac{\beta'}{\nu+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{\beta'}{n}\right) < u_{\nu+1}\left(1 + \frac{\beta'}{\nu+1}\right)^{-1}\cdots$$

$$\cdots\left(1 + \frac{\beta'}{n}\right)^{-1} < \frac{u_{\nu+1}}{\beta'\left(\frac{1}{\nu+1} + \cdots + \frac{1}{n}\right)} \to 0.$$

Sîntem deci în condițiile criteriului lui Leibniz și seria e convergentă. Dacă $\beta < 0$, avem la fel

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 + \frac{\beta'}{n} \qquad n > \nu$$

cu $0 < \beta' < -\beta$, deci $u_{n+1} > u_n (n > \nu)$ și u_n fiind > 0 și crescător nu poate tinde la 0; seria nu poate fi convergentă. În sfîrșit, dacă $\beta = 0$, aceeași concluzie subsistă: avem $|\gamma_n| < M(\text{fix})$, deci

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 - \frac{M}{n^\lambda}$$

și nu avem decît să repetăm raționamentul făcut la teorema 1,3° § 23.

Observația 1. După cum reiese din demonstrație, în condițiile teoremei seria nu este convergentă decît atunci cînd i se poate aplica criteriul lui Leibniz. Totuși, teorema poate avea avantaje în practică.

Observația 2. Teorema precedentă trebuie completată cu următoarele observații: Dacă $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l < 1$, seria este absolut convergentă, iar dacă $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to l > 1$, seria nu este convergentă fiindcă u_n este crescător. Teorema

servește deci la elucidarea cazului $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to 1$. În sfîrșit, cînd $\beta > 1$ convergența este absolută conform criteriului lui Weierstrass (§ 23).

Exemplul 7. $\sum_1^\infty (-1)^n \left(\frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots (2n)}\right)^a$ *este convergentă numai pentru* $a > 0$.

Aici
$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^a = \left[\left(1+\frac{1}{2n}\right)\left(1-\frac{1}{n}+\frac{\delta}{n^2}\right)\right]^a =$$
$$= \left(1-\frac{1}{2n}+\frac{\delta'}{n^2}\right)^a = 1-\frac{a}{2n}+\frac{\gamma}{n^2}$$

cu δ, δ', γ mărginiți.

În complex avem teorema analogă:

Teorema 8. *Fie seria* $\sum_0^\infty (-1)^n w_n$. *Dacă se poate scrie*

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = 1 - \frac{b}{n} - \frac{\gamma_n}{n^\lambda},$$

cu β *independent de* n, $\lambda > 1$ *și* γ_n *mărginiți, seria converge numai cînd* $\operatorname{Re}\beta > 0$ *În aceleași condiții converge și seria* $\sum_0^\infty |w_n - w_{n+1}|$.

Fie $b = \operatorname{Re}\beta > 0$. În demonstrația teoremei lui Weierstrass (§ 23) am stabilit

$$\left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right| = 1 - \frac{b}{n} - \frac{\delta_n}{n^{\lambda'}} \tag{64}$$

cu $\lambda' > 1$ și δ_n mărginiți. De aici urmează, ca în demonstrația teoremei precedente, că $|w_n| \to 0$ descrescînd ($n > \nu$) și prin urmare $\sum_0^\infty (|w_n| - |w_{n+1}|)$ este convergentă (suma $= |w_0|$) și are termenii pozitivi (pentru $n > \nu$). Putem deci să ne servim de această serie spre a demonstra prin comparație convergența seriei $\Sigma |w_n - w_{n+1}|$. Avem de fapt

$$\frac{|w_n - w_{n+1}|}{|w_n| - |w_{n+1}|} = \frac{\left|1 - \frac{w_{n+1}}{w_n}\right|}{1 - \left|\frac{w_{n+1}}{w_n}\right|} = \frac{\left|\frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^\lambda}\right|}{\frac{b}{n} + \frac{\delta_n}{n^{\lambda'}}} \to \frac{|\beta|}{b} \neq 0, \ \infty.$$

Pentru a dovedi și convergența seriei $\sum_0^\infty (-1)^n w_n$, să observăm că, deoarece seria $\sum_0^\infty (w_n - w_{n+1})$ este convergentă absolut, seria extrasă $\sum_0^\infty (w_{2m} - w_{2m+1})$ este la fel; și cum $w_n \to 0$, avem dreptul să desfacem parantezele fără a schimba natura (și suma) acestei serii (§ 15, teorema 3). Or, seria ce se obține astfel e tocmai $\sum_0^\infty (-1)^n w_n$.

Dacă $b \leqslant 0$ seria $\sum_0^\infty (-1)^n w_n$ nu poate converge pentru că din (64) rezultă acum că $|w_n|$ nu tinde la 0 (vezi demonstrația teoremei precedente).

Observație. Cu ajutorul teoremei lui Weierstrass se poate arăta că $\sum (w_n - w_{n+1})$ este convergentă numai cînd $\mathrm{Re}\beta > 0$, dacă $\lambda > 2$. Avem într-adevăr:

$$\frac{w_{n+1} - w_{n+2}}{w_n - w_{n+1}} = \frac{w_{n+1}}{w_n} \cdot \frac{1 - \frac{w_{n+2}}{w_{n+1}}}{1 - \frac{w_{n+1}}{w_n}} = \left(1 - \frac{\beta}{n} - \frac{\gamma_n}{n^\lambda}\right) \frac{\frac{\beta}{n+1} + \frac{\gamma_{n+1}}{(n+1)^\lambda}}{\frac{\beta}{n} + \frac{\gamma_n}{n^\lambda}} =$$

$$= \left(1 - \frac{\beta}{n} - \frac{\gamma_n}{n^\lambda}\right)\left(1 - \frac{\gamma_n}{\beta} \frac{1+\varepsilon_n}{n^{\lambda-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{n} + \frac{1+\varepsilon_n'}{n^2} + \frac{\gamma_{n-1}}{\beta} \frac{1+\varepsilon_n''}{n^{\lambda-1}}\right)$$

cu $\varepsilon_n, \varepsilon_n', \varepsilon_n'' \to 0$. Dacă $\lambda > 2$, putem scrie

$$\frac{w_{n+1} - w_{n+2}}{w_n - w_{n+1}} = 1 - \frac{\beta + 1}{n} - \frac{\gamma_n'}{n_{1\lambda}} \qquad \lambda_1 > 1 \tag{65}$$

cu γ_n' mărginiți și se aplică criteriul lui Weierstrass: Seria este convergentă numai pentru $\mathrm{Re}(\beta + 1) > 1$ sau $b > 0$.

Dacă $\lambda = 2$, nu putem pune raportul precedent sub forma cerută de teorema lui Weierstrass, decît dacă γ_n este de forma $\gamma_n = \gamma + o\left(\frac{1}{n^a}\right)$ cu γ constant și $a > 0$ (căci coeficientul lui $\frac{1}{n}$ trebuie să fie constant). Cu alte cuvinte,

$$\frac{w_{n+1}}{w_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma + \varepsilon_n'''}{n^2}$$

(β, γ constante, $\varepsilon_n''' \to 0$). Atunci, în urma unei reduceri, (65) se menține și putem afirma că $\sum (w_n - w_{n+1})$ converge numai pentru $\mathrm{Re}\ \beta > 0$.

§ 25. Transformarea seriilor simple

Vom da acum o teoremă asemănătoare cu aceea a lui Weierstrass (§ 22) și care are avantajul de a nu cere convergența absolută.

Teorema 1. *(Markov). Fie seriile convergente*

$$(1°) \qquad W_n = \sum_{n'=0}^{\infty} w_{n,n'} \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

și $(2°) \sum_0^\infty W_n = S$ *o serie convergentă. Să mai presupunem că* $(3°)$ *seriile verticale*

$$Z_{n'} = \sum_{n=0}^{\infty} w_{n,n'} \qquad (n' = 0, 1, \ldots)$$

sînt de asemenea convergente; atunci resturile seriilor orizontale, $r_{n,\,n'}$, *formează pentru fiecare* $n' = 0, 1, \ldots,$ *serii convergente:*

$$R_{n'} = \sum_{n=0}^{\infty} r_{n,\,n'}.$$

Dacă, în plus, (4°) $R_{n'} \to 0$, *atunci seria* $\sum_{0}^{\infty} Z_{n'}$ este *convergentă, și avem*

$$\sum_{0}^{\infty} W_n = \sum_{0}^{\infty} Z_{n'}. \tag{66}$$

Teorema este aproape evidentă. Fie $W_{n,\,n'}$, sumele parțiale ale seriei orizontale $\sum_{n'=0}^{\infty} w_{n,\,n'}$ și $Z_{n,\,n'}$ sumele parțiale ale seriei verticale $\sum_{n=0}^{\infty} w_{n,\,n'}$. Evident,

$$\sum_{\nu=0}^{n} W_{\nu,\,n'} = \sum_{\nu'=0}^{n'} Z_{n,\,\nu'} = S_{n,\,n'}.$$

Avem acum

$$r_{n,\,n'} = W_n - W_{n,\,n'},$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} r_{\nu,\,n'} = \sum_{0}^{n} W_\nu - \sum_{\nu=0}^{n} W_{\nu,\,n'} = \sum_{0}^{n} W_\nu - \sum_{\nu'=0}^{n'} Z_{n,\,\nu'},$$

de unde făcînd $n \to \infty$ și avînd în vedere (2°), (3°), rezultă convergența seriei din membrul I către suma

$$R_{n'} = S - \sum_{\nu'=0}^{n'} Z_{\nu'};$$

apoi făcînd $n' \to \infty$ și ținînd seamă de (4°)

$$\sum_{0}^{n'} Z_{\nu'} \to S.$$

Observația 1. Considerînd sumele parțiale $S_{n,\,n'}$ ale seriei duble $\sum\sum w_{n,\,n'}$, egalitatea (66) se scrie

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{n'\to+\infty} S_{nn'} = \lim_{n'\to+\infty} \lim_{n\to\infty} S_{nn'},$$

Teorema lui Markov exprimă că limitele pentru $n \to +\infty$ și $n' \to +\infty$ se pot interverti. Ea intră într-un cadru mai mare, în care vom examina posibilitatea intervertirii limitelor funcționale (§ 77). Acolo vom da încă un rezultat asemănător cu teorema lui Markov și cu aceea a lui Weierstrass.

Deocamdată vom mai observa că un alt caz în care egalitatea (66) este valabilă este acela al unei serii duble convergente, ale cărei serii orizontale și verticale sînt de asemenea convergente. Atunci, după teorema 2 § 4, seria dublă se poate suma după linii și după coloane.

Observația 2. Teorema precedentă, ca și aceea a lui Weierstrass și celelalte asemănătoare, servesc la transformarea seriilor simple, în sensul explicat la § 20: Seria de transformat se ia ca serie $\sum W_n$ și termenii ei se exprimă ca serii (orizontale) alese astfel încît condițiile teoremei să fie satisfăcute; atunci seria dată se transformă într-o serie nouă, $\sum Z_n$, cu aceiași sumă.

Altă transformare celebră este aceea a lui Euler. În vederea stabilirii ei avem însă nevoie de următorul rezultat al lui Toeplitz:

Lemă *(Toeplitz). Fie* $\{x_n\}$ *un șir convergent cu* $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ *iar* $\{a_{np}\}$ *un șir dublu verificînd condițiile:*

a) *Pentru fiecare întreg* $p \geq 0$, $a_{np} \to 0$ *pentru* $n \to \infty$.

b) *Există o constantă* K, *așa fel încît pentru orice* n,

$$|a_{n0}| + |a_{n1}| + \ldots + |a_{nn}| < K.$$

Atunci șirul

$$x'_n = a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n$$

are de asemenea proprietatea $\lim_{n\to\infty} x'_n = 0$.

Din convergența șirului $\{x_n\}$ rezultă că, fiind dat $\varepsilon > 0$, putem alege un m, așa fel încît, pentru $n > m$, să avem $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2K}$. Dar atunci, pentru un astfel de n,

$$|x'_n| < |a_{n0}x_0 + \ldots + a_{nm}x_m| + \frac{\varepsilon}{2},$$

iar din condiția a), rezultă că, pentru un m fixat, putem alege un $n_0 > m$ așa fel încît pentru $n > n_0$ să avem $|a_{n0}x_0 + \ldots + a_{nm}x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$, și deci $|x'_n| < \varepsilon$.

Transformarea lui Euler utilizează notația diferențelor:

Fiind dat șirul $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots$ (finit sau infinit), se pune

$$\Delta\alpha_0 = \alpha_0 - \alpha_1,\ \Delta\alpha_1 = \alpha_1 - \alpha_2, \ldots, \Delta\alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n+1}, \ldots$$

$$\Delta^2\alpha_0 = \Delta\alpha_0 - \Delta\alpha_1, \ldots, \Delta^2\alpha_n = \Delta\alpha_n - \Delta\alpha_{n+1}, \ldots$$

și în general

$$\Delta^k\alpha_n = \Delta^{k-1}\alpha_n - \Delta^{k-1}\alpha_{n+1} = \Delta\Delta^{k-1}\alpha_n. \tag{67}$$

Se verifică ușor, prin inducție cu privire la k, formula:

$$\Delta^k\alpha_n = \alpha_n - \binom{k}{1}\alpha_{n+1} + \binom{k}{2}\alpha_{n+2} - \ldots + (-1)^k\alpha_{n+k}. \tag{68}$$

Teorema 2. *(Euler). Dacă seria* $\sum_1^\infty (-1)^n w_n$ *este convergentă, atunci*

$$\sum_0^\infty (-1)^n w_n = \frac{w_0}{2} + \sum_1^\infty \frac{\Delta^n w_0}{2^{n+1}} \text{ (serie convergentă).} \tag{69}$$

Resturile acestor serii fiind notate respectiv cu

$$(-1)^n R_n = (-1)^n w_n + (-1)^{n+1} w_{n+1} + \dots \text{ și } \rho_n, \text{ avem}$$

$$\rho_n = \frac{1}{2^n}\sum_0^\infty (-1)^\nu \Delta^n w_\nu = \frac{1}{2^n}\Delta^n R_0. \tag{69'}$$

1°. Putem scrie

$$w_0 - w_1 + \dots + (-1)^n w_n = \frac{w_0}{2} + \frac{w_0 - w_1}{2} - \frac{w_1 - w_2}{2} + \dots$$

$$\dots + (-1)^{n-1}\frac{w_{n-1} - w_n}{2} + (-1)^n \frac{w_n}{2}$$

și cum $w_n \to 0$,

$$S = \sum_0^\infty (-1)^n w_n = \frac{w_0}{2} + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\Delta w_n}{2}.$$

Aplicînd această relație seriei $\Sigma(-1)^n \Delta w_n$, obținem

$$S = \frac{w_0}{2} + \frac{\Delta w_0}{2^2} + \sum_0^\infty (-1)^n \frac{\Delta^2 w_n}{2^2} \text{ etc.}$$

În definitiv,

$$S = \frac{w_0}{2} + \frac{\Delta w_0}{2^2} + \dots + \frac{\Delta^{n-1} w_0}{2^n} + \rho_n$$

cu

$$\rho_n = \frac{1}{2^n}\sum_0^\infty (-1)^\nu \Delta^n w_\nu.$$

2°. Avem mai întîi

$$\rho_1 = \frac{1}{2}\sum_0^\infty (-1)^\nu \Delta w_\nu = \frac{1}{2}\left(\sum_0^\infty (-1)^\nu w_\nu - \sum_1^\infty (-1)^{\nu-1} w_\nu\right) = \frac{1}{2}\Delta R_0$$

și aplicînd aceasta seriei $\Sigma(-1)^\nu \Delta^{n-1} w_\nu$, pentru care $R'_\nu = \Delta^{n-1} R_\nu$, avem

$$\rho_n = \frac{1}{2^n}\sum_0^\infty (-1)^\nu \Delta\Delta^{n-1} w_\nu = \frac{1}{2^n}\Delta\Delta^{n-1} R_0 = \frac{1}{2^n}\Delta^n R_0.$$

3°. Pentru a stabili (69) rămîne să dovedim $\rho_n \to 0$. După (68),

$$\rho_n = \sum_{p=0}^\infty \frac{(-1)^p}{2^n}\binom{n}{p} R_p = \sum_{p=0}^n a_{np} R_p,$$

unde $R_n \to 0$, $\lim_{n\to\infty} a_{np} = 0$ (p fix) și $\sum_{p=0}^n |a_{np}| = \frac{1}{2^n}\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 1$ (mărginit pentru orice n); deci după teorema lui Toeplitz $\rho_n \to 0$.

Observație. Dacă $\Delta^\nu w_0$, $\Delta^\nu w_1$, ... ($\nu = n, n+1$) sînt de același semn și descresc în valoare absolută,

$$\rho_n = \frac{\Delta^n w_0}{2^n}\,\vartheta_n,$$

cu $\frac{1}{2} < \vartheta_n < 1$. Într-adevăr, în cazul $\Delta^\nu w_k > 0$ ($\nu = n, n+1$; $k = 0, 1, \ldots$) din (69′) deducem, pe de o parte,

$$\rho_n = \frac{1}{2^n}(\Delta^n w_0 - \Delta^n w_1 + \Delta^n w_2 - \Delta^n w_3 + \ldots) <$$

$$< \frac{1}{2^n}(\Delta^n w_0 - \Delta^n w_1 + \Delta^n w_1 - \Delta^n w_3 + \ldots) = \frac{1}{2^n}\Delta^n w_0,$$

iar pe de alta,

$$\rho_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\Delta^n w_0}{2} + \frac{\Delta^n w_0 - \Delta^n w_1}{2} - \frac{\Delta^n w_1 - \Delta^n w_2}{2} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(\frac{\Delta^n w_0}{2} + \frac{\Delta^{n+1} w_0}{2} - \frac{\Delta^{n+1} w_1}{2} + \cdots\right) > \frac{\Delta^n w_0}{2^{n+1}}.$$

În cazul $\Delta^\nu w_k < 0$ ($\nu = n, n+1$; $k = 0, 1, \ldots$) se deduc inegalitățile corespunzătoare:

$$\rho_n = \frac{1}{2^n}(\Delta^n w_0 - \Delta^n w_1 + \Delta^n w_2 - \Delta^n w_3 + \ldots) >$$

$$> \frac{1}{2^n}(\Delta^n w_0 - \Delta^n w_1 + \Delta^n w_1 - \Delta^n w_3 + \ldots) = \frac{\Delta^n w_0}{2};$$

$$\rho_n = \frac{1}{2^n}\left(\frac{\Delta^n w_0}{2} + \frac{\Delta^n w_0 - \Delta^n w_1}{2} - \frac{\Delta^n w_1 - \Delta^n w_2}{2} + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2^n}\left(\frac{\Delta^n w_0}{2} + \frac{\Delta^{n+1} w_0}{2} - \frac{\Delta^{n+1} w_1}{2} + \cdots\right) < \frac{\Delta^n w_0}{2^{n+1}}.$$

Altă transformare importantă este aceea a **lui Kummer**:

Fie Σw_n o serie convergentă și $\Sigma c_n = C$ o serie cu sumă cunoscută. Dacă $\frac{w_n}{c_n} \to \gamma$ (finit), avem

$$\sum_0^\infty w_n = C\gamma + \sum_0^\infty (w_n - \gamma c_n).$$

Termenii seriilor date fiind reali, în cazul $\gamma \neq 0$, seria transformată $\Sigma(w_n - \gamma c_n)$ converge mai repede decît seria dată, pentru că $\frac{w_n - \gamma c_n}{w_n} \to 0$.

În particular, condițiile precedente vor fi satisfăcute luînd $c_{n+1} = p_n w_n - p_{n+1} w_{n+1}$, șirul p_n fiind ales astfel ca $p_n w_n \to 0$ și $\frac{p_n w_n}{w_{n+1}} - p_{n+1} \to 1$; atunci $\sum_1^\infty c_{n+1} = p_1 w_1$ și $\gamma = 1$; iar transformarea lui Kummer se scrie:

$$\sum_1^\infty w_n = (p_1 + 1) w_1 + \sum_1^\infty (w_{n+1} - p_n w_n + p_{n+1} w_{n+1}).$$

§ 26. Produsul a două serii convergente

Am numit în § 21 produs al mai multor serii $\Sigma \dots \Sigma w^{(1)}_{n_1 \dots n_k}, \dots, \Sigma \dots \Sigma w^{(m)}_{n_1 \dots n_k}$, seria $\Sigma \dots \Sigma w^{(1)}_{n_1 \dots n_k} \dots w^{(m)}_{n_1 \dots n_k}$ și am arătat că, dacă seriile date sînt convergente și seria produs este convergentă și are ca sumă produsul sumelor seriilor date.

Cînd este vorba de produsul mai multor serii simple, e natural să cerem ca el să fie prezentat tot ca o serie simplă. Este destul că considerăm două serii, Σw_n, $\Sigma w_{n'}$. În toate cazurile produsul $\Sigma w_n w'_{n'}$ poate fi sumat ca serie simplă, și anume sumat prin pătrate (§ 14, teorema 1).

Dacă seriile date sînt absolut convergente, produsul este de asemenea absolut convergent, căci seria de moduli a produsului este produsul seriilor de moduli corespunzătoare seriilor date. În acest caz putem deci suma produsul ordonîndu-l în orice mod ca serie simplă. Ceea ce se poate exprima astfel:

Teorema 1. *Produsul a două serii absolut convergente este distributiv.*

Reciproca este evidentă: Dacă produsul a două serii este complet distributiv (adică produsul sumelor seriilor este egal cu suma seriei produs oricum am ordona-o ca serie simplă), și deci este comutativ, el este absolut convergent [Teorema 7 (§ 22,)] și tot așa seriile orizontale și verticale; de unde rezultă că seriile date (proporționale cu seriile orizontale, respectiv verticale) sînt și ele absolut convergente.

Aplicațiile la produsul seriilor de puteri (vezi § 80) și altele fac ca sumarea prin diagonale a produsului să aibă o importanță covîrșitoare. Produsul astfel sumat este

$$\Sigma w_n \cdot \Sigma w'_{n'} = \Sigma w''_{n''}$$

unde

$$w''_{n''} = w_0 w'_n + w_1 w'_{n-1} + \dots + w_n w'_0.$$

El se numește *produsul lui Cauchy*. Două serii absolut convergente pot fi înmulțite după această regulă; nu însă și două serii semiconvergente oarecare, după cum dovedește

Exemplul 1. *Fie seriile* $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^a}$ *și* $\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^b}$, $a > 0$, $b > 0$, *Ele sînt convergente* (*exemplul* 1, § 24) *și produsul lui Cauchy este în acest caz*

$$\Sigma w''_n = \Sigma (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{n^b} + \frac{1}{2^a (n-1)^b} + \frac{1}{3^a (n-2)^b} + \dots + \frac{1}{n^a} \right)$$

(*serie alternată*).

Avem $|w''_n| > \frac{1}{n^a n^b} + \dots + \frac{1}{n^a n^b} = \frac{1}{n^{a+b-1}}$.

Dacă $a + b \leqslant 1$, w''_n nu tinde la zero și deci produsul lui Cauchy nu este convergent.

Cînd însă produsul lui Cauchy este convergent, el este egal cu produsul seriilor date; cu alte cuvinte:

Teorema 2. *(Abel). Două serii convergente pot fi înmulțite după regula lui Cauchy, dacă seria astfel obținută este convergentă.*

Într-adevăr, notînd cu S_n, S'_n, S''_n sumele parțiale ale celor trei serii considerate, avem

$$S''_n = w_0w'_0 + (w_0w'_1 + w_1w'_0) + \ldots + (w_0w'_n + \ldots + w_nw'_0) = \tag{70}$$
$$= w_0S'_n + w_1S'_{n-1} + \ldots + w_nS'_0,$$

de unde

$$S''_0 + S''_1 + \ldots + S''_n = w_0S'_0 + (w_0S'_1 + w_1S'_0) + \ldots +$$
$$+ (w_0S'_n + \ldots + w_nS'_0) = S_0S'_n + S_1S'_{n-1} + \ldots + S_nS'_0,$$

$$\frac{S''_0 + \ldots + S''_n}{n+1} = \frac{S_0S'_n + S_1S'_{n-1} + \ldots + S_nS'_0}{n+1}.$$

Cum $S_n \to S$, $S'_n \to S'$ și $S''_n \to S''$, urmează aplicînd teoremele 4,5 § 17

$$S'' = SS'.$$

Rămîne acuma de văzut în ce cazuri se poate spune dinainte că seria $\sum w''_n$ este convergentă. Cel mai important dintre aceste cazuri este:

Teorema 3. *(Mertens). Două serii convergente pot fi înmulțite după regula lui Cauchy dacă una din ele este absolut convergentă.*

Într-adevăr, să scriem (70)

$$S''_n = w_0(S' - R'_n) + w_1(S' - R'_{n-1}) + \ldots + w_n(S' - R'_0)$$

R'_n fiind resturile seriei $\sum w'_n$. Presupunem că $\sum w_n$ este absolut convergentă, deci $|w_0| + \ldots + |w_m| < M$(fix). Cum $R'_n \to 0$, există $M > 0$ astfel că $|R'_n| < \varepsilon/3M$ (dat) pentru $n > \mu$ (corespunzător lui ε). Avem acum

$$S''_n = S_nS' - (w_0R'_n + \ldots + w_{n-\nu-1}R'_{\nu-1}) - (w_{n-\nu}R'_\nu + \ldots + w_nR'_0).$$

deci

$$|S''_n - SS'| \leqslant |S'|\,|S_n - S| + |w_0R'_n + \ldots +$$
$$w_{n-\nu-1}R'_{\nu-1}| + |w_{n-\nu}R'_\nu + \ldots + w_nR'_0|.$$

Există un $\nu > \mu$ astfel că $|S_n - S| < \dfrac{\varepsilon}{3|s'|}$ și $|w_{n-\nu}R'_\nu + \ldots + w_nR'_0| < \dfrac{\varepsilon}{3}$ pentru $n > \nu$ (pentru că această cantitate $\to 0$ odată cu w_n). Așadar

$$|S''_n - SS'| < |S'|\frac{\varepsilon}{3|S'|} + M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

pentru $n > \nu$, adică $S''_n \to SS'$.

§ 27. Produse infinite. Generalități

Definiție. *Fiind dat șirul* $w_{n_1, \ldots, n_k}$, *simbolul*

$$\prod_0^\infty \cdots \prod_0^\infty (1 + w_{n_1, \ldots, n_k})$$

se numește produs infinit (simplu, dublu, ...) și reprezintă șirul numerelor

$$P_{n_1, \ldots, n_k} = \prod_0^{n_1} \cdots \prod_0^{n_k} (1 + w_{n_1, \ldots, n_k}),$$

numite produse parțiale. $(1 + w_{n_1, \ldots, n_k})$ *se numesc factorii produsului infinit, iar* $w_{n_1 \ldots n_k}$ *termenii săi. Dacă există* $\lim_{n_1 \to \infty, \ldots, n_k \to \infty} P_{n_1, \ldots, n_k} = P$, *se scrie*

$$P = \prod_0^\infty \cdots \prod_0^\infty (1 + w_{n_1, \ldots, n_k}).$$

Se zice că produsul infinit este convergent dacă, lăsînd eventual la o parte un număr finit de factori nuli, restul produsului are o valoare finită și $\neq 0$. *În cazul contrar, cînd produsul are valoarea* ∞ *(în real* $+\infty$*) sau cînd oricîți termeni am lăsa la o parte restul are valoarea* 0 *(și deci și produsul dat are valoarea* 0*), se zice că produsul infinit este divergent. El este oscilator cînd limita produselor parțiale nu există.*

După cum se vede, definiția convergenței și divergenței la produse infinite se deosebește de aceea referitoare la serii. Această modificare este impusă de următoarele argumente: Natura unui produs, ca și a unei serii, nu trebuie să se schimbe cînd lăsăm la o parte un număr finit de factori. Or, dacă un factor e nul, avem $P = 0$, oricare ar fi ceilalți factori, adică oricare ar fi natura restului.

Un singur factor nul nu poate hotărî natura produsului infinit. El va avea aceeași natură ca restul rămas după excluderea factorilor nuli (dacă aceștia sînt în număr finit).

După această definiție, un produs infinit convergent are valoarea 0 numai cînd are un număr finit de factori nuli și restul, care e format din factori $\neq 0$, are o valoare $P \neq 0, \infty$. Un produs care are valoarea 0 și ai cărui factori sînt toți $\neq 0$ este deci divergent.

În real un produs care are o valoare $P \neq 0$ (convergent sau divergent), are factorii de același semn cu începere de la un rang destul de mare; căci altfel ar fi evident oscilator.

În sfîrșit, un produs care are o infinitate de factori nuli, este divergent.

Se vor demonstra ca la serii teoremele:

Teorema 1. *Natura unui produs infinit nu se schimbă dacă se suprimă (adaugă) un număr finit de factori și chiar, în cazul unui produs dublu, un număr finit de produse simple orizontale sau verticale (diferite de zero și infinit). Dacă* $p \neq 0, \infty$ *este produsul factorilor suprimați (adăugați) presupuși* $\neq 0$, *atunci produsul obținut are valoarea* $\frac{p}{P}$ *(respectiv* ${}_pP$*).*

Teorema 2. *Dacă se înmulțește un produs infinit multiplu după cuburi, produsul infinit simplu astfel obținut are aceeași valoare ca și cel multiplu, cînd acesta este convergent sau divergent.*

Teorema 3. *Valoarea unui produs infinit dublu este egală cu valoarea obținută prin înmulțire după orizontale sau verticale, dacă produsul infinit dublu este convergent și produsele simple orizontale, respectiv verticale, sînt convergente.*

Teorema 4. *Produsele infinite simple convergente posedă proprietatea asociativă, în sensul că, dacă se grupează și înmulțesc termeni consecutivi în număr finit, produsul astfel obținut are aceeași valoare ca cel dat.*

Din contră, desfacerea parantezelor poate schimba natura sau valoarea produsului.

Exemplul 1. *Produsul* $((-1)(-1))((-1)(-1))\ldots$ *e convergent* $= 1$, *pe cînd* $(-1)(-1)(-1)\ldots$ *este oscilator.*

Această operație e permisă în următoarele cazuri:

Teorema 5. *Într-un produs convergent desfacerea parantezelor nu schimbă valoarea produsului dacă factorii din paranteze sînt în număr finit și toți* $\geqslant 1$ *(supraunitari) sau toți* $\leqslant 1$ *și pozitivi (subunitari).*

Teorema 6. *Într-un produs infinit convergent desfacerea parantezelor nu schimbă valoarea produsului, dacă termenul general al produsului obținut tinde la* 0 $(w_n \to 0)$ *și numărul factorilor din paranteze nu întrece un număr fix* k.

Teorema 7. *Dacă două produse infinite convergente se înmulțesc factor cu factor sau se împart factor cu factor, iar produsul de la numitor este* $\neq 0$, *atunci avem*

$$\prod(1 + w_n)\ \prod(1 + w'_n) = \prod(1 + (w_n + w'_n + w_n w'_n)),$$

$$\frac{\prod(1 + w_n)}{\prod(1 + w'_n)} = \prod\left(1 + \frac{w_n - w'_n}{1 + w'_n}\right)$$

Fiind dat un șir convergent sau divergent $P_n \to P$ $(P_n \neq 0)$, se poate găsi un produs infinit care are valoarea P:

$$P = P_0 \prod_0^\infty \frac{P_{n+1}}{P_n} = P_0 \prod_0^\infty \left(1 + \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}\right).$$

Tot așa, fiind dată o serie convergentă sau divergentă $\sum_0^\infty w_n = S$, ea poate fi transformată într-un produs infinit avînd ca valoare suma seriei:

$$S = S_0 \prod_0^\infty \frac{S_{n+1}}{S_n} = w_0 \prod_0^\infty \left(1 + \frac{w_{n+1}}{w_0 + \ldots + w_n}\right),$$

sub restricția ca sumele parțiale să fie diferite de zero.

Invers, un produs infinit $\prod_0^\infty (1 + w_n) = P$, convergent sau divergent, poate fi transformat într-o serie avînd suma P:

$$P_0 + \sum_0^\infty (P_{n+1} - P_n) = 1 + w_0 + \sum_0^\infty (1 + w_0)\ldots(1 + w_n)\, w_{n+1}.$$

Exemplul 2. $\prod_1^\infty \left(1 - \frac{(-1)^n}{n}\right) = 1$. Putem scrie (teorema 4):

$$\prod_1^\infty \left[\left(1 + \frac{1}{2m-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2m}\right)\right] = \prod_1^\infty 1 = 1.$$

3. $\prod_1^\infty \left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty$ (*divergent*): $P_n = \prod_1^n \frac{n+1}{n} = n + 1 \to +\infty$.

4. $\prod_2^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 0$ (divergent): $P_n = \prod_2^n \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n} \to 0$.

5. *Din seria* $\sum_0^\infty \frac{1}{2^n} = 2$ *se deduce* $\left(S_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n}\right)$:

$$\prod_2^\infty \left(1 + \frac{1}{2^n - 2}\right) = 2.$$

6. *Din* $\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 1$ *cu* $S_n = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$, *se deduce*: $\prod_2^\infty \left(1 + \frac{1}{n^2 - 1}\right) =$ $= 1$ (ceea ce se verifică și direct).

§ 28. Criterii generale de convergență pentru produse infinite

Teorema 1. *Termenul general al unui produs infinit convergent* $\to 0$, *sau factorul general* $\to 1$.

Deoarece putem neglija factorii nuli (care sînt în număr finit), putem presupune că valoarea produsului este $P \neq 0$. Avem (de exemplu pentru un produs simplu)

$$1 + w_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} \to \frac{P}{P} = 1,$$

de unde $w_n \to 0$.

Criteriul lui Cauchy aplicat șirului de produse parțiale P_n ne poate spune numai dacă acest șir este convergent, ceea ce (în cazul $P_n \to 0$) nu înseamnă că și produsul infinit convergent. Pentru a-l pune de acord cu definiția convergenței unui produs infinit, acest criteriu trebuie modificat astfel:

Teorema 2. *(Criteriul de convergență al lui Pringsheim). Pentru ca produsul* $\prod_0^\infty (1 + w_n)$ *să fie convergent, este necesar și suficient ca la orice* $\varepsilon > 0$ *să corespundă un* $\nu > 0$ *astfel ca*

$$|(1 + w_{n+1}) \dots (1 + w_{n+q}) - 1| < \varepsilon \tag{71}$$

pentru $n > \nu$ *și* q *arbitrar* > 0.

Condiția (71) se mai poate scrie

$$\left|\frac{P_{n+q}}{P_n} - 1\right| < \varepsilon$$

dacă convenim să simplificăm factorii lui P_n chiar și atunci cînd sînt nuli.

Condiția (71) este necesară: Ca și în teorema 1 putem neglija factorii nuli (considerînd la nevoie restul produsului); vom avea $P_n \to P \neq 0, \infty$ deci $|P_n| > M > 0$ (fix) pentru $n > \mu$. După criteriul lui Cauchy există, pentru $\varepsilon > 0$ dat, un $\nu > \mu$ așa ca

$$|P_{n+q} - P_n| < \varepsilon M$$

$$n > \nu,\ q \text{ arbitrar } > 0,$$

de unde

$$\left|\frac{P_{n+q}}{P_n} - 1\right| < \frac{\varepsilon M}{|P_n|} < \varepsilon.$$

Condiția (71) este suficientă. Mai întîi, luînd $\varepsilon = \frac{1}{2}$; ea ne spune că există un $\mu > 0$ astfel că

$$\frac{1}{2} < |(1 + w_{n+1}) \dots (1 + w_{n+q})| < \frac{3}{2}$$

pentru $n > \mu$, q arbitrar >0, de unde se vede că, dacă un rest de rang $\geqslant \mu$ are o singură valoare, el este convergent și deci produsul dat este convergent (valoarea restului fiind $\neq 0$ și finită). Luînd apoi $\frac{2}{3}\varepsilon$ în loc de ε, există un $\nu > \mu$ astfel că

$$|(1 + w_{\mu+1}) \dots (1 + w_{n+q}) - (1 + w_{\mu+1}) \dots (1 + w_n)| =$$

$$= |(1 + w_{\mu+1}) \dots (1 + w_n)||(1 + w_{n+1}) \dots (1 + w_{n+2}) - 1| < \frac{3}{2}\frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

pentru $n > \nu$, q arbitrar > 0. Aceasta arată că restul de rang μ are o valoare finită (adică produsele parțiale ale restului formează un șir convergent în virtutea criteriului lui Cauchy). Produsul dat este deci convergent.

Teorema se aplică și produselor infinite multiple.

În loc de a ne servi de criteriul lui Pringsheim, ne vom folosi de teorema următoare, care are avantajul de a reduce chestiunea convergenței unui produs infinit la acela a unei serii:

Teorema 3. *Fie produsul* $\prod_0^\infty (1 + w_n)$ *unde*

$$1 + w_n = \rho_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n),$$

cu $-\pi < \theta_n < \pi, \leqslant \rho_n \neq 0$. *Pentru ca acest produs să fie convergent, este necesar și suficient ca să existe un* ν *în așa fel încît să fie convergente seriile*

$$\sum_\nu^\infty \log \rho_n = \rho,\ \sum_\nu^\infty \theta_n = \theta. \tag{71}$$

Dacă presupunem $\nu = 0$, *atunci valoarea produsului este* $e^\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Într-adevăr: dacă seriile (72) sînt convergente,

$$(1 + w_\nu) \dots (1 + w_n) = e^{\log \rho_\nu + \dots + \log \rho_n} (\cos(\theta_\nu + \dots + \theta_n) +$$

$$+ i \sin(\theta_\nu + \dots + \theta_n)) \to e^\rho (\cos\theta + i \sin\theta) \neq 0,$$

(funcţiile exponenţială şi circulară fiind continue, şi deci produsul este convergent, iar pentru $\nu = 0$ valoarea sa este $e^\rho (\cos\theta + i \sin\theta)$.

Reciproc, fie convergent produsul dat şi $e^\rho (\cos\theta + i \sin\theta)$ valoarea unui rest $\neq 0$ de rang ν (care se poate reprezenta astfel fiind $\neq 0, \infty$).

Punînd $(1 + w_\nu) \dots (1 + w_n) = r_n (\cos\varphi_n + i \sin\varphi_n)$, unde luăm determinarea lui φ_n cuprinsă într-un interval semiînchis, de amplitudine 2π şi care conţine θ în interiorul lui, avem

$$r_n = \rho_\nu \dots \rho_n, \quad \varphi_n = \theta_\nu + \dots + \theta_\nu - 2k_n\pi;$$

şi cum $(1 + w_\nu) \dots (1 + w_n) \to e^\rho (\cos\theta + i \sin\theta)$, urmează (teorema 6 § 11)

$$r_n \to e^\rho, \quad \varphi_n \to \theta.$$

Avem întîi $\log r_n \to \rho$, sau $\log \rho_\nu + \dots + \log \rho_n \to \rho$, ceea ce probează că prima serie (72) converge la suma ρ. Apoi avem

$$\theta_\nu + \dots + \theta_n - 2k_n\pi \to \theta.$$

Deoarece $1 + w_n \to 1 = \cos(0) + i \sin(0)$ şi 0 este în interiorul intervalului de determinare a argumentelor θ_n, avem (teorema 6 § 11) $\theta_n \to 0$; dar $\varphi_{n+1} - \varphi_n = \theta_{n+1} - 2(k_{n+1} - k_n)\pi \to 0$, deci $k_{n+1} - k_n \to 0$, ceea ce este posibil numai dacă k_n este constant, $k_n = k (n > \mu \geqslant \nu)$ (deoarece $(k_{n+1} - k_n| < 1$ pentru $n > \mu$ şi cum k_n sînt întregi, $k_{n+1} = k_n$). Astfel

$$\theta_\nu + \dots + \theta_n \to \theta + 2k\pi \qquad (k \text{ constant})$$

şi a doua serie (72) este convergentă, cu suma $\theta + 2k\pi$.

Observaţia 1. Dacă definim (cum se va vedea în § 14, capitolul II) ca valoare principală a funcţiei $\log z$:

$$\log_0 z = \log|z| + i \arg z, \tag{73}$$

cu $-\pi < \arg z \leqslant \pi$, putem zice că: produsul $\prod_0^\infty (1 + w_n)$ presupus debarasat de eventualii factori nuli (dacă aceştia sînt în număr finit) şi seria $\sum_0^\infty \log_0 (1 + w_n)$, unde se ia determinarea principală a logaritmilor, sînt convergenţi în acelaşi timp. Iar dacă seria are suma S, produsul are valoarea e^s,

Observaţia 2. Teorema se demonstrează la fel pentru produse multiple: $\prod \dots \prod (1 + w_{n_1, \dots, n_k})$ şi $\sum \dots \sum \log_0 (1 + w_{n_1, \dots, n_k})$ sînt convergente în acelaşi timp, dacă factorii $(1 + w_{n_1 \dots n_k})$ sînt toţi $\neq 0$. (În cazul contrar se va considera restul produsului debarasat de factorii nuli, dacă aceştia sînt în număr finit). Avem $P = e^s$ dacă $P \neq 0$, iar seria are suma S.

§ 29. Criterii de convergenţă pentru produse infinite simple cu factori pozitivi supraunitari sau subunitari

Considerăm produse infinite de forma $\prod_0^\infty (1 + u_n)$ cu $u_n \geqslant 0 (n \geqslant \nu_0)$ sau $\prod_0^\infty (1 - u_n)$ cu $0 \leqslant u_n < 1$ $(n \geqslant \nu_0)$. Dacă neglijăm factorii (de rang $< \nu_0$) care nu satisfac aceste condiţii, produsele parţiale P_n cresc sau descresc monoton şi produsul dat este convergent sau diverge la 0 atunci cînd P_n sînt mărginiţi, altfel el diverge la $+\infty$.

Teorema 1. $\prod_0^\infty (1 + u_n)$ *unde* $u_n \geqslant 0 (n \geqslant \nu_0)$ *este convergent odată cu seria (cu termeni pozitivi)* $\sum_0^\infty u_n$, *sau divergent la* $+\infty$.

Putem presupune $\nu_0 = 0$. Afirmaţia rezultă din inegalităţile

$$S_n < P_n \leqslant e^{s_n}\left(S_n = \sum_0^n u_n\right),$$

care arată că P_n este mărginit cînd s_n este mărginit şi vice-versa.

Teorema 2. $\prod_0^\infty (1 - u_n)$ *unde* $0 \leqslant u_n < 1 (n > \nu_0)$ *este convergent odată cu seria (cu termeni pozitivi)* $\sum_0^\infty u_n$, *sau divergent la* 0.

Putem presupune $\nu_0 = 0$. Produsul dat este convergent odată cu produsul $\prod_0^\infty \frac{1}{1 - u_n} = \prod_0^\infty \left(1 + \frac{u_n}{1 - u_n}\right)$, care după teorema 1 converge odată cu seria $\sum_0^\infty \frac{u_n}{1 - u_n}$. Este de arătat că această serie şi $\sum_0^\infty u_n$ converg simultan. Dacă prima converge, inegalitatea

$$u_n \leqslant \frac{u_n}{1 - u_n}$$

ne arată că converge şi a doua. Dacă a doua serie converge, din $u_n : \frac{u_n}{1 - u_n} \to 1$ căci $u_n \to 0$) urmează că şi cea dintîi converge.

Exemple 1. $\prod_1^\infty \left(1 + \frac{1}{n^a}\right)$ *(a real) este convergent cînd* $a > 1$, $= +\infty$ *cînd* $a \leqslant 1$.

2. $\prod_2^\infty \left(1 - \frac{1}{n^a}\right)$ *(a real) este convergent cînd* $a > 1$ *şi divergent la* 0 *cînd* $a \leqslant 1$.

Singurele produse cu factori reali, care au produsele parţiale P_n monotone, sînt cele studiate mai sus. Numai ele au analogie cu seriile cu termeni pozitivi (şi nu în general produsele cu factori pozitivi).

§ 30. Convergența absolută a produselor infinite

Am putea fi ispitiți de a defini convergența absolută a unui produs infinit prin condiția ca produsul format de modulii factorilor să fie convergent. Dar această definiție nu poate fi primită pentru că ea nu asigură convergența unui produs absolut convergent.

Exemplul 1. $\Pi\,(-1)^n$ *este neconvergent (oscilator), în timp ce produsul modulilor* $\Pi\,1^n$ *este convergent.*

Singura definiție care, în perfectă analogie cu teoria seriilor, asigură convergența și comutativitatea, este următoarea:

Definiție. *Un produs infinit* $\prod_0^\infty \cdots \prod_0^\infty (1 + w_{n_1, \ldots, n_k})$ *se numește absolut convergent dacă există* $\nu_1, \ldots, \nu_k$ *așa fel încît seria* $\sum_{\nu_1}^\infty \cdots \sum_{\nu_k}^\infty \log (1 + w_{n_1, \ldots, n_k})$ *să fie absolut convergentă.*

Din această definiție și din teorema 3 § 22 decurg imediat următoarele rezultate:

Teorema 1. *Un produs infinit absolut convergent este convergent.*

Teorema 2. *Un produs infinit absolut convergent este comutativ. Dacă produsul e multiplu, produsele simple obținute prin ordonarea factorilor sînt absolut convergente și au aceeași valoare ca cel dat.*

Teorema 3. *Orice produs infinit extras dintr-un produs infinit absolut convergent este de asemenea absolut convergent.*

Teorema 4. *Un produs infinit absolut convergent poate fi efectuat prin asocierea arbitrară a factorilor săi, în număr finit sau infinit. În particular, un produs dublu absolut convergent poate fi înmulțit prin linii sau coloane.*

Teorema 5. *Un produs infinit semiconvergent își poate pierde convergența sau schimba valoarea prin permutarea factorilor.*

Teorema 6. *Pentru ca* $\prod_0^\infty \cdots \prod_0^\infty (1 + w_{n_1, \ldots, n_k})$ *să fie absolut convergent e necesar și suficient să existe* $\nu_1, \ldots, \nu_k$ *așa fel încît seriile*

$$\sum_{\nu_1}^\infty \cdots \sum_{\nu_k}^\infty \log_0 |1 + w_{n_1, \ldots, n_k}|, \quad \sum_{\nu_1}^\infty \cdots \sum_{\nu_k}^\infty \arg_0 (1 + w_{n_1, \ldots, n_k})$$

să fie absolut convergente.

Vezi (73) și teorema 8 § 22). Aceste condiții pot fi înlocuite prin una mult mai simplă:

Teorema 7. *Pentru ca produsul* $\prod_0^\infty \cdots \prod_0^\infty (1 + w_{n_1, \ldots, n_k})$ *să fie absolut convergent e necesar și suficient ca seria* $\sum_0^\infty \cdots \sum_0^\infty w_{n_1, \ldots, n_k}$ *(formată de termenii produsului) să fie absolut convergentă.*

Pentru simplificarea scrierii considerăm un produs simplu, $\prod_0^\infty (1+w_n)$. Să punem $w_n = u_n + iv_n$, $1 + w_n = \rho_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ $(-\pi < \theta_n \leqslant \pi)$, deci

$$u_n = -1 + \rho_n \cos\theta_n,\quad v_n = \rho_n \sin\theta_n. \tag{74}$$

După teorema precedentă, convergența absolută a produsului dat este echivalentă cu aceea a seriilor

$$\sum_\nu^\infty \log\rho_n^2,\quad \sum_0^\infty \theta_n, \tag{75}$$

unde ν se dă așa fel încît să se evite termenii ce corespund la $\rho_n = 0$; pe de altă parte convergența absolută a seriei $\sum w_n$ e echivalentă cu aceea a seriilor (teorema 8 § 22)

$$\sum_0^\infty u_n,\quad \sum_0^\infty v_n. \tag{76}$$

Cea dintîi implică $\rho_n \to 1$, $\theta_n \to 0$, iar a doua $u_n \to 0$, $v_n \to 0$. Aceste două fapte sînt echivalente în virtutea formulelor (74).

Cum

$$\frac{\rho_n^2 - 1}{\log\rho_n^2} \to 1,$$

seriile

$$\sum_\nu^\infty \log\rho_n^2,\quad \sum_0^\infty (\rho_n^2 - 1) = \sum_0^\infty (u_n^2 + 2u_n + v_n^2)$$

sînt absolut convergente în același timp. La fel seriile

$$\sum_0^\infty (u_n^2 + 2u_n),\quad \sum_0^\infty u_n$$

deoarece

$$\frac{u_n^2 + 2u_n}{u_n} = u_n + 2 \to 2.$$

Și la fel seriile

$$\sum_0^\infty \theta_n,\quad \sum_0^\infty v_n$$

fiindcă

$$\frac{v_n}{\theta_n} = \rho_n \frac{\sin\theta_n}{\theta_n} \to 1.$$

În sfîrșit, dacă $\sum_0^\infty v_n$ este absolut convergentă, tot așa este $\sum_0^\infty v_n^2$, fiindcă $|v_n| < 1$ $(n > \nu)$ și deci $|v_n^2| < |v_n|$ $(n > \nu)$. Din toate acestea rezultă acum că convergența absolută a seriilor (75) este echivalentă cu aceea a seriilor (76), ceea ce demonstrează teorema: Astfel, dacă seriile (75) sînt absolut convergente, tot așa sînt: $\sum v_n, \sum v_n^2, \sum (\rho_n^2 - 1), \sum (u_n^2 + 2u_n) = \sum(\rho_n^2 - 1 - v_n^2)$ și $\sum u_n$. Iar dacă seriile (76) sînt absolut convergente, la fel sînt: $\sum\theta_n$, $\sum v_n^2, \sum (u_n^2 + 2u_n), \sum (\rho_n^2 - 1)$ și $\sum_\nu^\infty \log\rho_n^2$.

Observația 1. Demonstrația se face imediat dacă se admite că

$$\log_0(1 + w_n) = \beta_n w_n,$$

unde $\beta_n \to 1$, (vezi teoremele 1, 2, § 19); căci de aici urmează că $\sum |\log_0(1 + w_n)|$ și $\sum |w_n|$ converg simultan.

Observația 2. Teorema demonstrată se mai poate enunța astfel:

Pentru ca produsul $\prod \dots \prod (1 + w_{n_1,\dots,n_k})$ *să fie absolut convergent, este necesar și suficient ca produsul* $\prod \dots \prod (1 + |w_{n_1,\dots,n_k}|)$ *să fie convergent.*

Căci, după teorema 1 § 29, acesta din urmă și seria $\sum \dots \sum |w_{n_1,\dots,n_k}|$ sînt convergente în același timp.

Astfel, prin analogie cu convergența absolută a seriilor, aceea a unui produs se poate defini prin converganța produsului ce se obține înlocuind termenii (nu factorii!) prin modulii lor.

Exemple. 1. $z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) \left(= \frac{1}{\pi} \sin \pi z\right)$ *este absolut convergent în tot planul pentru că* $\sum \frac{|z|^2}{n^2}$ *este convergentă.* În punctele $z = k$ (intreg) produsul are cîte un factor nul, fără a-și pierde convergența.

2. $z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n}\right)\left(1 + \frac{z}{n}\right)$, *egal cu precedentul* (§ 27, teorema 7), *este numai semiconvergent, fiindcă* $\sum 2\frac{|z|}{n}$ *este divergentă.*

§ 31. Criterii de convergență pentru produse oarecare

Teorema 1. *Produsul* $\prod (1 + w_n)$ *este convergent dacă seriile* $\sum_0 w_n$ *și* $\sum_0 |w_n|^2$ *sînt convergente; este neconvergent dacă a doua dintre aceste serii e convergentă și cealaltă nu. (Cauchy).*

Demonstrația se face ușor dacă ne servim de rezultatul următor, consecință a dezvoltării în serie a funcției $\log_0(1 + z)$ pentru $|z| < 1$ (vezi teorema 2, § 82):

$$\log_0(1 + w_n) = w_n - \gamma_n w_n^2, \tag{77}$$

unde $\gamma_n \to 1/2$. De aici urmează că convergența seriei $\sum_0^\infty |w_n|^2$ atrage pe aceea a seriei $\sum_0^\infty \gamma_n w_n^2$ (chiar absolută). Astfel, dacă seriile din enunț sînt convergente, este convergentă și $\sum_\nu^\infty \log(1 + w_n)$, pentru un ν convenabil și deci produsul dat (teorema 3, § 28). Pe de altă parte, dacă $\sum_0^\infty w_n$ nu este convergentă, dar $\sum_0^\infty |w_n|^2$ și deci și $\sum_0^\infty \gamma_n w_n^2$ sînt convergente, seria $\sum_\nu^\infty \log(1+w_n)$ nu poate fi convergentă și nici produsul dat.

Observația 1. Condițiile teoremei nu sînt necesare: se poate ca produsul să fie convergent cînd cele două serii nu sînt convergente (exemplul 1), sau să fie divergent cînd prima serie este convergentă și a doua neconvergentă (exemplul 2),

Exemple. 1. $\prod_2^\infty \left(1-\frac{1}{n^a}\right)\left(1+\frac{1}{n^a}+\frac{1}{n^{2a}}\right)\left(\frac{1}{3}<a\leqslant\frac{1}{2}\right)$ *este convergent*, căci asociind factorii cîte doi obținem $\prod_2^\infty \left(1-\frac{1}{n^{3a}}\right)$ care este convergent (exemplul 2 § 29) și avem apoi dreptul să desfacem parantezele (teorema 6, § 27) întrucît $-\frac{1}{n^a}\to 0$ și $-\frac{1}{n^{2a}}\to 0$. Pe de altă parte, seriile Σw_n și $\Sigma|w_n|^2$ nu sînt convergente: asociind termenii lor cîte doi obținem seriile divergente $\sum\frac{1}{n^{2a}}$ și $\sum\left(\frac{1}{n^{2a}}+\frac{2}{n^{3a}}+\frac{1}{n^{4a}}\right)$ — ultima pentru că raportul termenului general la acela al seriei $\sum\frac{1}{n^{2a}}$ tinde la 0.

2. $\prod_1^\infty \left(1-\frac{(-1)^n i}{\sqrt{n}}\right)$ *nu este convergent* pentru că produsul modulilor factorilor $\sqrt{\prod_1^\infty\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ este divergent. Aici $\sum w_n = i\sum\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ este convergentă, iar $\sum|w_n|^2 = -\sum\frac{1}{n}$ e divergentă.

3. $\prod_1^\infty \left(1+\frac{1}{n}\right)$ *nu este convergent* pentru că $\sum w_n$ nu este convergentă, iar $\sum|w_n|^2$ e convergentă.

4. $\prod_2^\infty \left(1-\frac{(-1)^n}{n^a}\right)$ *este convergent pentru* $a>\frac{1}{2}$, *divergent pentru* $0\leqslant a\leqslant\frac{1}{2}$, *oscilator pentru* $a<0$. Teorema precedentă ne dă convergența pentru $a>\frac{1}{2}$, dar nu spune nimic cînd $0<a\leqslant\frac{1}{2}$, fiindcă $\sum w_n$ este convergentă, iar $\sum|w_n|^2$ nu. Grupînd termenii avem $\prod_1^\infty\left[\left(1-\frac{1}{(2m)^a}\right)\left(1+\frac{1}{(2m+1)^a}\right)\right]=\prod_1^\infty(1-u_m)$, cu $u_m=\frac{1}{(2n)^a}-\frac{1}{(2m+1)^a}+\frac{1}{(2m)^a(2m+1)^a}>0$. Deoarece $u_m:\frac{1}{m^{2a}}\to\frac{1}{4^a}$ $(a<1)$ căci $u_m:\frac{1}{m^{2a}}=\frac{1}{2^a\left(1+\frac{1}{2m}\right)^a}\left[m^a\left(1+\frac{1}{2m}\right)^a-m^a+\frac{1}{2^a}\right]=\frac{1}{2^a\left(1+\frac{1}{2m}\right)^a}\left[\frac{a}{2}m^{a-1}\alpha_m+\frac{1}{2^a}\right]$, unde $\alpha_m\to 1$, ultimul produs e convergent pentru $a>\frac{1}{2}$, divergent la 0 pentru $a\leqslant\frac{1}{2}$ (teorema 2, § 29).

În cazul $a>0$ avem dreptul să desfacem parantezele și obținem produsul dat (§ 27, teorema 6). Restul se vede ușor.

5. $\prod\cos\alpha_n$ *este convergent cînd* $\Sigma|\alpha_n|^2$ *este convergentă*. Aici $w_n=-2\sin^2\frac{\alpha_n}{2}\cdot\Sigma w_n$ *este* absolut convergentă pentru că $\left|2\sin^2\frac{\alpha_n}{2}\right|:|\alpha_n|^2\to 1$. Deci și produsul este absolut convergent.

Observația 2. Dacă se împinge mai departe aproximația în (77), luînd p termeni din dezvoltarea logaritmului:

$$\log_0(1+w_n) = w_n - \frac{w_n^2}{2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{w_n^p}{p} + (-1)^p \gamma_n w_n^{p+1},$$

unde $\gamma_n \to \dfrac{1}{p+1}$ obținem criterii din ce în ce mai puternice.

Produsul $\prod(1+w_n)$ este convergent dacă seriile

$$\sum\left(\frac{w_n}{1} - \frac{w_n^2}{2} + \cdots + (-1)^{p-1}\frac{w_n^p}{p}\right), \quad \sum w_n^{p+1}$$

sînt convergente; divergent dacă a doua serie este convergentă și prima nu.

În legătură cu teorema precedentă să mai observăm:

Teorema 2. *Dacă* $\sum_0 |w_n|^2$ *converge și* $w_n \neq -1$, *produsele parțiale* $P_n = \prod_0^n (1+w_n)$ *au același ordin ca* e^{s_n}, *unde* $S_n = \sum_0^n w_n$ *(adică* $P_n : e_{s_n}$ *are o limită* $\neq 0, \infty$); *ceea ce scriem:*

$$P_n \sim e^{s_n}.$$

Această relație ne spune ceva nou atunci cînd seria $\sum w_n$ și prin urmare produsul infinit $\prod(1+w_n)$ nu sînt convergente.

Avem, într-adevăr, din (77)

$$\log_0 P_n = S_n - \sum_0^n \gamma_n w_n^2 \text{ sau } P_n = e^{s_n} e^{-\sum_0^n \gamma_n w_n^2}$$

și cum $\sum \gamma_n w_n^2$ este convergentă,

$$\lim P_n : e^{s_n} = e^{-\lim \sum_0^n \gamma_n w_n^2} \neq 0, \ \infty$$

s-a întrebuințat aici continuitatea funcției e^z și faptul că $e^z \neq 0, \infty$.

Exemple. 6. $e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}} \sim n$ *sau* $1 + \ldots + \dfrac{1}{n} \sim \log n$, *căci* $\prod_1^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = n$ *și* $\sum \dfrac{1}{n^2}$ este convergentă.

7. $\dfrac{(z+1)\ldots(z+n)}{1\ldots n} \sim n^z$ ($z \neq$ *întregii negativi*).

Primul membru este $\prod_1^n\left(1+\dfrac{z}{n}\right)$ și cum $\sum \dfrac{|z|^2}{n^2}$ este convergent,

$P_n \sim e^{z\left(1+\ldots+\frac{1}{n}\right)} \sim e^{z\log n} = n^z$ (exemplul 6).

Exerciții

1. $\sum_0^\infty \dfrac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)\ldots(\alpha+n+p)} = \dfrac{1}{p}\ \dfrac{1}{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+p-1)}$, α *nu-i întreg* $\leqslant 0$, p *întreg* > 0.

R. Seria este de forma $\sum_0^\infty (w_n - w_{n+1})$ cu

$$w_n = \frac{1}{p} \frac{1}{(\alpha + n) \dots (\alpha + n + p - 1)} \to 0.$$

2. $\sum_0^\infty \binom{p+n}{p}^{-1} = \frac{p}{p-1}$ (p *întreg* > 1)

R. Se ia în 1, $\alpha = 1$ și $p - 1$ în loc de p.

3. *Dacă* $S_n \to S$, *punînd* $w_n = c_0 S_n + \dots + c_h S_{n+h}$ *cu* $c_0 + \dots + c_h = 0$ ($h \geqslant 1$ *fix*), *avem*

$$\sum_0^\infty w_n = c_0 S_0 + (c_0 + c_1) S_1 + \dots + (c_0 + \dots + c_{h-1}) S_{h-1} + (c_1 + 2c_2 + \dots + hc_h) S.$$

R. $w_0 + \dots + w_n = c_0 \sum_0^n S_p + c_1 \sum_1^{n+1} S_p + \dots + c_h \sum_h^{n+h} S_p = \left\{ c_0 \sum_0^{h-S} S_p + c_1 \sum_1^{h-S} S_p + \dots \right.$

$\left. \dots + c_{h-1} \sum_{h-1}^{h-1} S_p \right\} + \left\{ (c_0 + \dots + c_h) \sum_h^n S_p \right\} + \left\{ c_1 \sum_{n+1}^{n+1} S_p + c_2 \sum_{n+1}^{n+2} S_p + \dots + c_h \sum_{n+1}^{n+h} S_p \right\}$.

Partea a doua este $= 0$, a treia $\to c_1 S + 2c_2 S + \dots + hc_h S$.

4. *Dacă* $S_n \to S$, *avem*

$$\sum_0^\infty (S_n - S_{n+h}) = S_0 + \dots + S_{h-1} - hS.$$

R. Se ia în 3

$$c_0 = 1, \; c_2 = \dots = c_{h-1} = 0, \; c_h = -1.$$

5. $\sum_0^\infty \frac{1}{(\alpha + n)(\alpha + n + h) \dots (\alpha + n + ph)} =$

$$= \frac{1}{ph} \sum_0^{h-1} \frac{1}{(\alpha + n)(\alpha + n + h) \dots [\alpha + n + (p-1)h]}.$$

R. Se ia în 4, $S_n = \frac{1}{ph} \frac{1}{(\alpha + n)(\alpha + n + h) \dots [\alpha + n + (p-1)h]}$.

6. $\sum_2^\infty \frac{1}{n(n^2 - 1)} = \frac{1}{4}$

R. Se ia în 3, $S_n = \frac{1}{n}$, $S = 0$, $w_{n-2} = S_{n-1} - 2S_n + S_{n+1} = \frac{2}{n(n^2 - 1)}$.

7. $\sum_1^\infty \operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \frac{3\pi}{4}$, $\sum_1^\infty \operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \frac{\pi}{4}$.

R. Se aplică 4, observînd că $\operatorname{arctg} \frac{2}{n^2} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n-1} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}$ și $\operatorname{arctg} \frac{1}{n^2 + n + 1} = \operatorname{arctg} \frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n+1}$.

8. $\sum_0^\infty \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{x} - \operatorname{cotg} x.$

R. Se aplică 4 cu ajutorul formulei $\operatorname{tg} y = \operatorname{cotg} y - 2 \operatorname{cotg} 2y$.

9. $\sum_1^\infty \frac{n}{(z+1)(2z+1)\dots(nz+1)} = \frac{1}{z} \qquad \left(z \neq 0, \ -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \dots\right).$

R. Ca la 1; seria este $\frac{1}{z+1} + \sum_2^\infty (w_{n-1} - w_n)$ cu $w_n = \frac{1}{z(z+1)(2z+1)\dots(nz+1)}$.

10. *Fie $p_1, \dots, p_k$ întregi > 0 diferiți; α nu-i întreg $\leqslant 0$; $f(x)$ e un polinom de grad $\leqslant k-2$. Fie*

$$\frac{f(x-\alpha)}{(x+p_1)\dots(x+p_k)} = \frac{c_1}{x+p_1} + \dots + \frac{c_k}{x+p_k};$$

avem atunci

$$S = \sum_0^\infty \frac{f(n)}{(\alpha+p_1+n)\dots(\alpha+p_k+n)} = -\sum_1^k c_m \left(\frac{1}{\alpha} + \dots + \frac{1}{\alpha+p_k-1}\right).$$

R. $$\frac{f(n)}{(\alpha+p_1+n)\dots(\alpha+p_k+n)} = \frac{c_1}{\alpha+p_1+n} + \dots + \frac{c_k}{\alpha+p_k+n}$$

$$S = c_1 \sum_{p_1}^\infty \frac{1}{\alpha+n} + \dots + c_k \sum_{p_k}^\infty \frac{1}{\alpha+n}.$$

Fie $p_1 < p_2 < \dots < p_k$. Ținînd seamă că $c_1 + \dots + c_k = 0$ (fiindcă f este de grad $< k-1$), avem

$$S = c_1 \sum_{p_1}^{p_k-s} \frac{1}{\alpha+n} + c_2 \sum_{p_2}^{p_k-1} \frac{1}{\alpha+n} + \dots + c_{k-1} \sum_{p_k-1}^{p_k-1} \frac{1}{\alpha+n}$$

și scăzînd $0 = (c_1 + \dots + c_k) \sum_0^{p_k-1} \frac{1}{\alpha+n}$ se obține rezultatul. Seria este finită.

11. $\sum_0^\infty \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} = \frac{z}{1-z}, \ |z|<1; \qquad \sum_0^\infty \frac{2^n}{1+z^{2^n}} = \frac{1}{z-1}, \ |z|>1.$

R. Se verifică prin inducție (sau din aproape în aproape):

$$(1-z)\prod_0^n (1+z^{2^n}) = 1 - z^{2^{n+1}},$$

de unde derivînd logaritmic și înmulțind cu z:

$$\sum_0^n \frac{2^n z^{2^n}}{1+z^{2^n}} = \frac{z}{1-z} - \frac{2^{n+1} - z^{2^{n+1}}}{1-z^{2^{n+1}}} \to \frac{z}{1-z}.$$

Formula a doua se obține schimbînd z în $\frac{1}{z}$.

12. $\sum_1^n \frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}} = \begin{cases} \frac{z}{1-z} & \text{pentru } |z|<1, \\ \frac{1}{1-z} & \text{pentru } |z|>1. \end{cases}$

R. Se verifică prin inducție:

$$\sum_1^n \frac{z^{2^{n-1}}}{1-z^{2^n}} = \frac{1}{1-z}\cdot\frac{z-z^{2^n}}{1-z^{2^n}}.$$

13. $\sum_1^\infty \rho^n \cos n\theta = \frac{\rho\cos\theta-\rho^2}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$, $\sum_1^\infty \rho^n \sin n\theta = \frac{\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}$ $|\rho|<1$.

R. Punem în $\sum_1^\infty z^n = \frac{z}{1-z}$ $(|z|<1)$, $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(|\rho|<1)$;

$$\sum_1^\infty \rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta) = \frac{\rho\cos\theta+i\rho\sin\theta}{(1-\rho\cos\theta)-i\rho\sin\theta} = \frac{\rho\cos\theta-\rho^2+i\rho\sin\theta}{1-2\rho\cos\theta+\rho^2}.$$

Schimbînd θ în $-\theta$, adunînd și scăzînd, se obține rezultatul.

14. $\sum_1^\infty \cos^n\theta\cos n\theta = 0$, $\sum_1^\infty \cos^n\theta\sin n\theta = \operatorname{cotg}\theta$ (θ real),

R. Se pune $\rho=\cos\theta$ în 13.

15. *Dacă seria cu termeni pozitivi* $\sum\frac{1}{k_n}$ *este divergentă și* $a>0$, $\frac{1}{k_n}<\frac{1}{a}$ $(n>\nu_0)$, *atunci*

$$\frac{1}{k_1}+\sum_1^\infty \frac{(k_1-a)\dots(k_n-a)}{k_1\dots k_n k_{n+1}} = \frac{1}{a}.$$

R. $\frac{1}{a}-S_n = \frac{1}{a}\left(1-\frac{a}{k_1}\right)\left(1-\frac{a}{k_2}\right)\cdots\left(1-\frac{a}{k_{n+1}}\right)\to 0$ căci $\sum\frac{a}{k_n}$ este divergentă (§ 29, teorema 2).

16. $\sum_1^\infty \frac{a(a+1)\dots(a+n)}{b(b+1)\dots(b+n)} = \frac{a}{b-a-1}$ $(b>a+1>1)$.

R. Se găsește, punînd $h=b-a-1>0$;

$$\frac{a}{b-a-1}-S_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n+1)}{b(b+1)\dots(b+n)(b-a-1)} = \frac{a}{b-a-1}-\left(1-\frac{h}{b}\right)\left(1-\frac{h}{b+1}\right)\cdots$$

$$\cdots\left(1-\frac{h}{b+n}\right)\to 0.$$

fiindcă $\sum\frac{h}{b+n}$ este divergentă.

17. *Dacă* $\sum w_n$ *este convergentă*, $\frac{w_1+2w_2+\dots+nw_n}{n}\to 0$.

R. Aplicație a teoremei lui Kronecker (§ 17).

18. *Pentru seria* $\sum_0^\infty z^n$ avem $\frac{S_0 + \ldots + S_n}{n+1} \to S$ *cînd* $|z| < 1$. *Limita există și atunci cînd* $|z| = 1$, *dar* $z \neq 1$ *(seria fiind oscilatoare).*

R. Prima afirmație cunoscută (§ 17). Avem $S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$ $(z \neq 1)$,

$$\frac{1}{n+1}(S_0 + \ldots + S_n) = \frac{1}{(n+1)(1-z)}\left[n + 1 - z\frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}\right] =$$

$$= \frac{1}{1 - z} - z\frac{1 - z^{n+1}}{(n+1)(1-z)^2}.$$

Dacă $|z| \leqslant 1$ și $z \neq 1$, expresia $\to \frac{1}{1 - z}$.

Observație. Se zice că seria este sumabilă de primul ordin după Cesaro (sumabilă C_1), cu suma $\frac{1}{1 - z}$.

19. *Pentru seriile*

$$-\frac{1}{2} + \sum_1^\infty \cos n\theta \quad (\theta \neq 2k\pi), \quad \sum_1^\infty \sin n\theta \quad (\theta \neq k\pi)$$

avem $\frac{1}{n+1}(S_0 + \ldots + S_n) \to 0$, *respectiv* $\frac{1}{2}\operatorname{cotg}\frac{\theta}{2}$.

R. Urmează din 18, punînd $z = \cos\theta + i\sin\theta$ și separînd realul și imaginarul.

20. *Dacă* $\sum u_n$ *este o serie convergentă cu termeni* > 0, *seria* $\sum\sqrt{u_n u_{n+1}}$ *e de asemenea convergentă. Reciproca este adevărată cînd* u_n *descrește monoton.*

R. $\sqrt{u_{n+1}u_{n+2}} + \ldots + \sqrt{u_{n+p-1}u_{n+p}} \leqslant \frac{1}{2}(u_{n+1} + u_{n+2}) + \ldots + \frac{1}{2}(u_{n+p-1} + u_{n+p}) <$
$< u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}$; se aplică criteriul Cauchy.

Reciproc, dacă u_n descrește monoton $(u_n \geqslant u_{n+1} \geqslant \ldots)$

$$\sqrt{u_n u_{n+1}} + \ldots + \sqrt{u_{n+p-1}u_{n+p}} \geqslant u_{n+1} + \ldots + u_{n+p}$$

și se aplică același criteriu.

21. *Exemplu din care să reiasă că teorema precedentă nu poate fi inversată cînd* u_n *nu descrește monoton.*

R. Luăm $\sum u_n = \sum \frac{1}{n[n + (-1)^n(n-1)]} = 1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{5} + \ldots,$
seria diverge fiindcă seria extrasă $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots$ este divergentă. Seria

$$\sum\sqrt{u_n u_{n+1}} = \sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)[n + (-1)^n(n-1)][n + 1 - (-1)^n n]}} =$$

$$= \sum \frac{1}{\sqrt{2m(2m+1)(4m-1)}} + \sum \frac{1}{\sqrt{(2m+1)(2m+2)(4m+3)}}$$

este convergentă.

22. *Dacă șirul* w_n este *astfel că seria* $\sum|w_n - w_{n+1}|$ *este convergentă, atunci și seria* $\sum|w_n^k - w_{n+1}^k|$, k *întreg* > 1, *este convergentă.*

R. Ipoteza implică w_n mărginit $|w_n| < M$ (fix), căci există n așa ca

$$|w_n - w_{n+p}| \leqslant |w_n - w_{n+1}| + |w_{n+1} - w_{n+2}| + \ldots + |w_{n+p-1} - w_{n+p}| < 1,$$

p arbitrar.

Apoi avem

$$\frac{|w_n^k - w_{n+1}^k|}{|w_n - w_{n+1}|} \leqslant |w_n^{k-1}| + |w_n^{k-2} w_{n+1}| + \ldots < kM^{k-1},$$

de unde afirmația.

Să se găsească natura seriilor următoare:

23. $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

R. $u_n: \frac{1}{n} = n^{-\frac{1}{n}} \to 1$. Divergentă.

24. $\sum_1^\infty \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$.

R. $u_n = \frac{1}{n(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}$; $u_n : \frac{1}{n\sqrt{n}} \to \frac{1}{2}$. Convergentă.

25. $\sum[(n+1)^{\frac{1}{p}} - n^{\frac{1}{p}}]$ (p *întreg* > 0).

R. $u_n = \frac{1}{(n+1)^{\frac{p-1}{p}} + (n+1)^{\frac{p-2}{p}} n^{\frac{1}{p}} + \ldots + n^{\frac{p-1}{p}}}$;

$u_n: \frac{1}{n^{\frac{p-1}{p}}} \to \frac{1}{p}$.

Seria este divergentă.

26. $\sum_2^\infty \frac{n + \sqrt{n}}{n^2 - n}$.

R. $u_n = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{n-1} > \frac{1}{n-1}$. Divergentă.

27. $\sum_1^\infty \frac{n^a}{n!}$ (a *real*).

R. $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^a \frac{1}{n+1} \to 0$. Convergentă.

28. $\sum_0^\infty \frac{(n!)^p}{(qn)!}$ p, q *întregi* > 0.

R. $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)^p}{(qn+1)\dots(qn+q)} \to \begin{cases} +\infty & p > q \quad \text{divergentă,} \\ q^{-q} & p = q \begin{cases} = 1 & \text{divergentă,} \\ > 1 & \text{convergentă,} \end{cases} \\ 0 & p < q \quad \text{convergentă.} \end{cases}$

29. $\sum_1^\infty \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^{-n^2}$ *a real.*

R. $\sqrt[n]{u_n} = \left(1 + \dfrac{a}{n}\right)^{-n} \to e^{-a}$, $\begin{cases} a > 0 & \text{convergentă,} \\ a \leqslant 0 & \text{divergentă.} \end{cases}$

30. $\sum_1^\infty \dfrac{1, 3 \dots (2n-1)}{2, 4 \dots (2n)} \dfrac{1}{2n+1}$.

R. Se aplică criteriul lui Raabe:

$$\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) n = \left(\frac{(2n+1)^2}{(2n+2)(2n+3)} - 1\right) n = \frac{-6n^2 - 5n}{(2n+2)(2n+3)} \to -\frac{3}{2}.$$

Convergentă.

31. $\sum_2^\infty \dfrac{\log n}{n^a}$ (*a real*).

R. Se aplică criteriul de condensare a lui Cauchy-Schlömilch, § 18, ($a > 0$). Seria este de aceeași natură ca

$$\sum v_n = \sum 2^m \frac{\log 2^m}{2^{am}} = \sum \frac{m \log 2}{2^{(a-1)m}}.$$

Avem

$$\frac{v_{m+1}}{v_m} = \frac{1}{2^{a-1}} \frac{m+1}{m} \to \frac{1}{2^{a-1}}. \qquad \text{Seria este } \begin{cases} a > 1 & \text{convergentă,} \\ a \leqslant 1 & \text{divergentă.} \end{cases}$$

(Pentru $a = 1$, $\sum v_n$ este evident divergentă.) Pentru $a \leqslant 0$ criteriul nu se poate aplica fiindcă: u_n nu descrește monoton. Dar atunci seria este evident divergentă.

32. $\sum_1^\infty \left(1 - \dfrac{\log n}{n}\right)^n$.

R. Cum $\dfrac{n}{\log n} \to +\infty$ monoton, avem $u_n^{\frac{1}{\log n}} > \dfrac{1}{e}$, $u_n > \dfrac{1}{e^{\log n}} = \dfrac{1}{n}$.

Seria este divergentă.

33. $\sum_1^\infty a^{\log n}$ $(a > 0)$.

R. $u_n = e^{\log n \log a} = n^{\log a} \begin{cases} 0 < a < \dfrac{1}{e} & \text{convergentă,} \\ a \geqslant \dfrac{1}{e} & \text{divergentă.} \end{cases}$

34. $\sum \dfrac{1}{n^a (\log n)^{a_1} \dots (\log_p n)^{a_p}}$ $(a, a_1, \dots, a_p$ *reale*).

R. Aplicăm criteriul lui Ermakoff luînd

$$f(x) = \frac{1}{x^a (\log x)^{a_1} \dots (\log_p x)^{a_p}},$$

$\varphi(x) = e^x$ și presupunînd că primul dintre exponenții $a, a_1, \dots$, care nu este nul, este >0 (ceea ce face ca $u_n \to 0$ monoton); în cazul contrar, $u_n \to \infty$ și seria este divergentă. Avem

$$F(x) = \frac{e^x f(e^x)}{f(x)} = e^{(1-a)x}\, x^{a-a_1} (\log x)^{a_1-a_2} \dots (\log_{p-1} x)^{a_{p-1}-a_p} (\log_p x)^{a_p}.$$

Pentru n destul de mare fiecare din funcțiile e^x, x, $\log x$, $\log_2 x, \dots$ este mai mare decît orice putere de exponenți > 0 a funcțiilor următoare, de unde se conchide că, pentru $x \to +\infty$, $F(x) \to 0$ sau $+\infty$, ceea ce dă convergența, respectiv divergența seriei. Și anume:

$a > 1$, $(F(x) \to 0)$, convergent,

$a < 1$, $(F(x) \to +\infty)$, divergent.

$a = 1$, $a_1 > 1$, $(F(x) \to 0)$, convergent,

$a_1 < 1$ $(F(x) \to +\infty)$, divergent,

$a_1 = 1 \cdot \dots \cdot a_{p-1} = 1$, $a_p > 1$ convergent.
$a_p \leqslant 1$ divergent.

35. $\sum_1^\infty a^{\log_p n}$ $(a > 0)$

R. $u_n = (\log_{p-1} n)^{\log a}$: Dacă $p = 1$, vezi 33. Dacă $p > 1$, seria este divergentă după 34.

36. $\sum a^{n^q}$ $(a > 0)$.

R. $\log u_n = n^q \log a \to \begin{cases} \left.\begin{matrix} +\infty & a > 1 \\ -\infty & a < 1 \\ 0 & a = 1 \end{matrix}\right\} & q > 0, \\ \log a & q = 0, \\ 0 & q < 0. \end{cases}$

u_n nu $\to 0$ cînd $q \leqslant 0$ sau $q > 0$ și $a \geqslant 1$; seria este atunci divergentă. Cînd $q > 0$ și $a < 1$, $u_n \to 0$ monoton. Aplicăm criteriul de condensare al lui Cauchy: Seria dată are aceeași natură ca $\sum v_m = \sum 2^m a^{2^{mq}}$. Avem $\sqrt[m]{v_m} = 2a^{\frac{2^{mq}}{m}} \to 0$. Așadar seria dată este convergentă cînd $q > 0$ și $0 < a < 1$; divergentă în celelalte cazuri $(a > 0)$.

37. *Pentru* $0 < \rho < 1$, *expresia*

$$\sum_1^n \frac{1}{\nu^{1-\rho}} - \frac{n^\rho}{\rho}$$

are o limită γ_ρ *în* $(0, 1]$ *către care tinde descrescînd.*

R. Aplicație a observației 2, teorema 2, § 18, la seria divergentă $\sum_1^\infty \frac{1}{n^{1-\rho}}$.

38. *Dacă seria* $\sum_0^\infty d_n$ $(d_n > 0)$ *este divergentă și* S_n *sînt sumele ei parțiale, seria* $\sum_1^\infty \frac{d_n}{S_n S_{n-1}^\rho}$ *este convergentă cînd* $\rho > 0$. *(Pringsheim).*

R. Fie p întreg astfel că $\frac{1}{p} < \rho$; $\frac{d_n}{S_n S_{n-1}^\rho} < \frac{d_n}{S_n S_{n-1}^{1/p}}$ și este destul să considerăm seria cu acest termen. Cum seria

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{S_{n-1}^{1/p}} - \frac{1}{S_n^{1/p}} \right)$$

este convergentă și are termenii > 0, este destul să avem

$$\frac{d_n}{S_n S_{n-1}^{1/p}} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}^{1/p}} \leqslant p\left(\frac{1}{S_{n-1}^{1/p}} - \frac{1}{S_n^{1/p}}\right)$$

sau

$$1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \leqslant p\left(1 - \left(\frac{S_{n-1}}{S_n}\right)^{1/p}\right)$$

ceea ce este adevărat [$1 - x^p = (1 - x)(x^{p-1} + \ldots + 1) \leqslant p(1 - x)$ pentru $0 < x \leqslant 1$].

39. *Dacă* $\sum_0^\infty d_n$ ($d_n > 0$) *este divergentă și are sumele parțiale* S_n,

$\sum_0^\infty \frac{d_n}{S_n^a}$ este $\begin{cases} \textit{convergentă pentru } a > 1 \\ \textit{divergentă pentru } a \leqslant 1 \end{cases}$ *(Abel-Dini).*

R. Divergența în exemplu 2 § 19. Convergența rezultă din 38: $\frac{d_n}{S_n^a} < \frac{d_n}{S_n S_{n-1}^{a-1}}$.

40. *Dacă* $\sum_0^\infty c_n (c_n > 0)$ *este convergentă și are resturile* R_n,

$\sum \frac{c_n}{R_{n-1}^a}$ este $\begin{cases} \textit{convergentă pentru } a < 1 \\ \textit{divergentă pentru } a \geqslant 1 \end{cases}$ *(Dini).*

R. Cum $R_n \to 0$ (monoton), $R_{n-1} < 1$ ($n > \nu$) și $\frac{c_n}{R_{n-1}^a} > \frac{c_n}{R_{n-1}}$ ($n > \nu$) pentru $a > 1$, a junge să stabilim divergența în cazul $a = 1$. Avem, într-adevăr,

$$\frac{c_{n+1}}{R_n} + \cdots + \frac{c_{n+p}}{R_{n+p-1}} > \frac{c_{n+1} + \ldots + c_{n+p}}{R_n} = 1 - \frac{R_{n+p}}{R_n} \to 1$$

pentru $p \to \infty$, ceea ce arată că condiția lui Cauchy nu poate fi satisfăcută (cu un $\varepsilon < 1$).

În cazul $a < 1$, putem lua un întreg $p > 0$ astfel ca $a < 1 - \frac{1}{p}\left(p > \frac{1}{1-a}\right)$; ajunge să demonstrăm convergența seriei $\sum \frac{c_n}{R_{n-1}^{1-\frac{1}{p}}}$. Cum seria $\sum (R_{n-1}^{1/p} - R_n^{1/p})$ are termenii $\geqslant 0$ și este convergentă, ajunge să avem

$$\frac{c_n}{R_{n-1}^{1-1/p}} = \frac{R_{n-1} - R_n}{R_{n-1}^{1-1/p}} \leqslant p(R_{n-1}^{1/p} - R_n^{1/p}),$$

adică

$$1 - \frac{R_n}{R_{n-1}} \leqslant p\left[1 - \left(\frac{R_n}{R_{n-1}}\right)^{1/p}\right],$$

ceea ce este adevărat fiindcă $\frac{R_n}{R_{n-1}} \leqslant 1$.

41. *Dacă* $\sum_1^\infty d_n$ *este divergentă și* $\frac{d_n}{S_n} \to 0$, *avem pentru sumele parțiale* S_n' *ale seriei divergente* $\sum \frac{d_n}{S_n}$:

(Cesaro) $$S_n' \cong \log S_n \quad \left(\textit{adică } \frac{\log S_n}{S_n'} \to 1\right).$$

R. Avem $\dfrac{x}{\log \dfrac{1}{1-x}} \to 1$ pentru $x \to 0$. Deci luînd $x = \dfrac{d_n}{S_n}$, avem $\dfrac{d_n}{S_n} : \log \dfrac{S_n}{S_{n-1}} \to 1$.

Urmează (exercițiul 6, § 13), luînd $d_0 = 1$,

$$\frac{\dfrac{d_1}{S_1} + \cdots + \dfrac{d_n}{S_n}}{\log \dfrac{S_1}{S_0} + \cdots + \log \dfrac{S_n}{S_{n-1}}} = \frac{S'_n}{\log S_n} \to 1$$

(avînd în vedere că $\log S_n \to \infty$).

42. *Să se stabilească natura seriilor hiperarmonice și logaritmice cu ajutorul exercițiilor* 39. și 41.

R. Luînd $d_n = 1$, avem $\sum_1^\infty \dfrac{1}{n^a}$ $\begin{cases} \text{convergentă pentru } a > 1 \\ \text{divergentă pentru } a \leqslant 1, \end{cases}$ precum și $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} \cong \log n$. Luînd $d_n = \dfrac{1}{n}$ și înlocuind S_n cu $\log n$ în $\sum \dfrac{d_n}{S_n^a}$ (ceea ce nu schimbă natura acestei serii pentru că $S_n \cong \log n$, fiindcă $\dfrac{d_n}{S_n^a} : \dfrac{d_n}{(\log n)^a} \to 1$), avem

$$\sum_2^\infty \frac{1}{n(\log n)^a} \begin{cases} \text{convergentă pentru } a > 1 \\ \text{divergentă pentru } a \leqslant 1 \end{cases}, \text{ precum și}$$

$$\sum_2^n \frac{1}{n(\log n)} \cong \log \sum_2^n \frac{1}{n} \cong \log_2 n \text{ etc.}$$

43. *Dacă numerele h_n satisfac condiția $0 < h_n < 1$, seriile*

$$\sum h_{n+1}[(1-h_0)(1-h_1)\ldots(1-h_n)]^\rho, \quad \sum \frac{h_{n+1}}{[(1+h_0)\ldots(1+h_n)]^\rho} \quad \rho > 0 \text{ sînt convergente.}$$

R. Se aplică criteriul lui Kummer (§ 20) cu $k_n = \dfrac{1}{h_{n+1}}$: pentru prima serie $k_n - \dfrac{u_{n+1}}{u_n} k_{n+1} = \dfrac{1}{h_{n+1}}[1 - (1-h_{n+1})^\rho] \geqslant \rho > 0$ (căci $(1-x)^\rho \leqslant 1 - \rho x$ pentru $|x| < 1$, $1 \geqslant \rho > 0$). La fel pentru seria a doua.

Convergența funcțiilor depinzînd de parametri și în special a seriilor și produselor infinite de funcții

§ 32. Generalități

Definiție. *Fie $f(z_1, \ldots, z_p; t_1, \ldots, t_q)$ o funcție de două serii de variabile, $z_1, \ldots, z_p$ și $t_1, \ldots, t_q$, definită în mulțimile $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_p = D$ și $E_1 \times E_2 \times \ldots \times E_q = E$. Considerînd $t_1, \ldots, t_q$ drept parametri, avem o funcție de $(z_1, \ldots, z_p)$ în D, depinzînd de acei parametri.*

Fie $(\tau_1, \ldots, \tau_q)$ un punct limită al mulțimii E (adică $\tau_1, \ldots, \tau_q$ sînt, respectiv, puncte limită pentru $E_1, \ldots, E_q$). Dacă există în fiecare punct din D (adică oricare ar fi $z_1 \in D_1, \ldots, z_p \in D_p$)

$$\lim_{t_1 \to \tau_1, \ldots t_q \to \tau_q} f(z_1, \ldots, z_p; t_1, \ldots, t_q) = \varphi(z_1, \ldots, z_p),$$

aceasta se va numi funcția limită a funcției f pentru $(t_1, ..., t_q) \to (\tau_1, ..., \tau_q)$ *sau în punctul* $(\tau_1, ..., \tau_q)$.

Funcția limită depinde numai de valorile funcției f într-o vecinătate $V_{(\tau_1, ... \tau_q)}$ oricît de mică.

În D putem avea puncte unde limita este finită *(puncte de convergență)* sau infinită *(puncte de divergență)*.

Atunci cînd φ este finită în toate punctele din D se zice că f *converge* la φ, sau că f este convergentă în D.

Noțiunea generală de funcție limită subsumează diverse procese de limită prin care o funcție $\varphi(z_1, ..., z_p)$ este obținută și studiată cu ajutorul unei funcții cu parametri, mai simplă. Mai curente sînt următoarele:

$\varphi(z_1, ..., z_p)$ limită a unui șir de funcții $f_{n, n', ...}(z_1, ..., z_p)$. (În acest caz E este o putere carteziană a mulțimii numerelor întregi $\geqslant 0$ și $\tau = + \infty$, $\tau' = + \infty$, ...):

$$f_{n, n', ...}(z_1, ..., z_p) \to \varphi(z_1, ..., z_p) \text{ în } D.$$

$\varphi(z_1, ..., z_p)$ sumă a unei serii de funcții:

$$\varphi(z_1, ..., z_p) = \sum_0^\infty \sum_0^\infty ... f_{n, n', ...}(z_1, ..., z_p) \text{ în } D.$$

$\varphi(z_1, ..., z_p)$ valoare a unui produs infinit de funcții:

$$\varphi(z_1, ..., z_p) = \prod_0^\infty \prod_0^\infty ... (1 + f_{n, n', ...}(z_1, ..., z_p)).$$

O funcție $\varphi(z_1, ..., z_p)$ fiind definită ca limită a unei funcții $f(z_1, ..., z_p; t_1, ..., t_q)$, se pune problema generală de a deduce proprietățile ei din acelea ale funcției generatoare f și din modul de convergență a acesteia.

Capitolul II

Noțiunea de funcție monogenă (olomorfă) de o variabilă și reprezentările conforme plane. Funcțiile elementare

Monogeneitate (derivabilitate)

§ 33. Diferențiabilitate

Definiție. *Se zice că o funcție* $u(x_1, \ldots, x_n)$ *de variabile reale, definită într-o mulțime* A, *este diferențiabilă în punctul interior* $x^0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *dacă avem într-o vecinătate* U_{x^0}

$$\Delta u = (U_1 + \xi_1)\Delta x_1 + \ldots + (U_n + \xi_n)\Delta x_n, \tag{1}$$

unde Δu *este creșterea lui* u *corespunzătoare creșterilor* $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, U_i *sînt niște numere fixe, și* $\xi_i \to 0$ *pentru* $\Delta x_1 \to 0, \ldots, \Delta x_n \to 0$.

Teorema 1. *Dacă o funcție* $u(x_1, \ldots, x_n)$ *definită într-o mulțime* A *este diferențiabilă în punctul interior* x^0, *atunci există în* x^0 *derivatele parțiale* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, *egale cu* U_i.

Căci punînd în (1) $x_2 = x_2^0, \ldots, x_n = x_n^0$, avem

$$\lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{u(x_1^0 + \Delta x_1, x_2^0, \ldots, x_n^0) - u(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\Delta x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} (U_1 + \xi_1) = U_1.$$

Astfel (1) se scrie

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\Delta x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\Delta x_n + \xi, \quad \xi = \xi_1 \Delta x_1 + \ldots + \xi_n \Delta x_n, \tag{1'}$$

unde ξ este de ordinul al doilea. Partea de ordinul întîi a lui Δu (partea principală) se numește *diferențiala* funcției $u(x_1, \ldots, x_n)$ în x^0 și se notează:

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \ldots + \frac{\partial u}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n;$$

$\mathrm{d}x_i$ sînt aici diferențialele variabilelor independente x_i (ce se obțin luînd $u = x_i$). O funcție diferențiabilă este continuă după cum rezultă din (1).

Teorema 2. *Funcția* $u(x_1, \ldots, x_n)$ *este diferențiabilă în punctul (interior)* x^0 *dacă:* 1° *într-o vecinătate* U_{x^0} *există derivatele* $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ *finite și* 2° *aceste derivate sînt continue în* x^0, *chiar cu excepția uneia din ele, care poate să existe (finită) numai în* x^0.

Ajunge să considerăm o funcţie de două variabile $u(x, y)$. Să scriem

$$\Delta u = [u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0 + \Delta y)] + [u(x_0, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)] =$$

$$= \Delta_x u(x_0, y_0 + \Delta y_0) + \Delta_y u(x_0, y_0).$$

Presupunînd existenţa derivatelor finite $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ într-o vecinătate U_* (în care luăm punctul $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$), putem scrie aplicînd teorema creşterilor finite:

$$\Delta_x u(x_0, y_0 + \Delta y_0) = \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) =$$

$$= \Delta x \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \xi \right), \quad |\theta| < 1,$$

$$\Delta_y u(x_0, y_0) = \Delta y \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta' \Delta y) = \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \eta \right), \quad |\theta'| < 1.$$

Dacă mai presupunem continuitatea derivatelor în x_0,

$$\xi = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \tag{2}$$

şi

$$\eta = \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0 + \theta' \Delta y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) \tag{2'}$$

tind la 0 pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Este însă destul ca numai $\frac{\partial u}{\partial x}$ să verifice condiţiile de mai sus, iar $\frac{\partial u}{\partial y}$ să existe (finită) în x^0. Căci punînd $\Delta_y u(x_0, y_0) = \Delta y \left(\frac{\partial u}{\partial y_0} + \eta \right)$, avem $\eta \to 0$ în virtutea existenţei lui $\frac{\partial u}{\partial y_0}$.

Observaţie. Simpla existenţă a derivatelor parţiale în x^0 nu asigură diferenţiabilitatea, care este o proprietate intermediară între aceasta şi existenţa derivatelor parţiale continue; ea nu atrage nici măcar continuitatea: vezi exemplul 8, § 34.

Exemple. 1. $u = \sqrt{|xy|}$ *în* (0,0) *are derivatele parţiale* $\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = 0$, $\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = 0$ ($\Delta_x(0,0) = 0$); *dar nu este diferenţiabilă* pentru că am avea

$$\Delta u = \sqrt{|xy|} = \xi x + \eta y \ (\Delta x = x, \ \Delta y = y)$$

sau în coordonate polare

$$\sqrt{|\sin 2\theta|} = \sqrt{2}(\xi \cos \theta + \eta \sin \theta);$$

or, dacă $x \to 0$, $y \to 0$ pe o direcție $\theta = \text{const.} \neq K\frac{\pi}{2}$, membrul al doilea ar tinde la 0, iar membrul I ar fi $\neq 0$. Se observă că derivatele parțiale nu există într-o vecinătate U_0: $\frac{\partial u}{\partial x}(0,y)$ nu există pentru $y \neq 0$ fiindcă raportul incrementar corespunzător, $\sqrt{\left|\frac{y}{x}\right|}\,\operatorname{sgn} x$, nu are limită. Aceasta nu se întîmplă în exemplul următor.

2. $u = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$. *În* (0,0) *derivatele sînt* $= 1$. *Se vede la fel că funcția nu e diferențiabilă în acest punct.* În acest caz derivatele există în vecinătatea punctului:

$u_x = \frac{x^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$, $u_y = \frac{y^2}{\sqrt[3]{(x^3 + y^3)^2}}$, dar pe dreapta $x + y = 0$ sînt $= +\infty$, cu excepția originei.

Teorema 3. *Dacă funcția* $u(x_1, \ldots, x_n)$, *definită în domeniul* D, *are derivate parțiale finite și continue într-un domeniu închis* $\bar{D}_1 \subset D$, $\xi_1, \ldots, \xi_n$ *din* (1') *tind la zero uniform în* $\bar{D}_1$.

Într-adevăr, derivatele parțiale sînt uniform continue în $\bar{D}_1$ (I, §13) și deci la un $\varepsilon > 0$ corespunde un $\delta > 0$ astfel că $\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1', \ldots, x_n') - \frac{\partial u}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\right| < \varepsilon$ pentru $|x_i' - x_i| < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$. Deci, în cazul a două variabile avem din (2), (2').

$$|\xi| < \varepsilon \text{ și } |\eta| < \varepsilon \text{ pentru } |\Delta x| < \delta,\ |\Delta y| < \delta.$$

Teorema 4. *Dacă* $f(u_1, \ldots, u_m)$ *este diferențiabilă în punctul* $(u_1^0, \ldots, u_m^0)$ *și funcțiile* $u_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, u_m(x_1, \ldots, x_n)$ *iau valorile* $u_1^0, \ldots, u_m^0$ *în punctul* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ *și sînt diferențiabile în acest punct, atunci funcția compusă* $F(x_1, \ldots, x_n) = f(u_1(x), \ldots, u_m(x))$ *este diferențiabilă în* $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$.

Avem

$$\Delta f = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial u_k} + \eta_k\right)\Delta u_k$$

în u^0, cu $\eta_k \to 0$ pentru $\Delta u_k \to 0$; și

$$\Delta u_k = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \xi_{ki}\right)\Delta x_i$$

în x^0, cu $\xi_{ki} \to 0$ pentru $\Delta x_i \to 0$. Urmează

$$\Delta F = \Delta f = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \xi_i'\right)\Delta x_i,$$

unde ξ_i' este o sumă de termeni care conțin factori ξ_{ki} sau η_{ik}, cu coeficienți finiți. Cum, pentru $\Delta x_i \to 0$, $\xi_{ki} \to 0$ și $\eta_{ik} \to 0$, urmează și $\xi_i' \to 0$.

Corolar. *În ipotezele teoremei*

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i},$$

$$dF = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}\frac{\partial u_k}{\partial x_i}dx_i = \sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f}{\partial u_k}du_k = df.$$

§ 34. Derivata unei funcții de o variabilă complexă

Definiție. *Fie* $f(z) = u + iv$ *o funcție finită de variabila* $z = x + iy$ *în mulțimea* A *și* z_0 *un punct interior. Derivata ei în* z_0 *se definește ca pentru funcții de o variabilă reală*:

$$f'(z_0) = \frac{df}{dz_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y}$$

(*cînd limita există și e finită*). *Cînd derivata* $f'(z_0)$ *există, funcția se zice monogenă.* Pentru ca limita să existe este necesar să existe limitele pe dreptele $y = y_0$ (pentru $\Delta x \to 0$) și $x = x_0$ (pentru $\Delta y \to 0$) și aceste limite să fie egale (§8, teorema 3). Prima limită, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x} \right)_{y = y_0}$ există numai dacă există

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) \text{ și } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x, y_0)}{\Delta x} = \frac{\delta v}{\delta x}(x_0, y_0)$$

și la fel a doua limită. Deci este necesar să existe în $z_0(x_0, y_0)$ derivatele $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$. Apoi cele două limite trebuie să fie egale:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y} \right)$$

în z_0, ceea ce înseamnă:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{3}$$

Acestea se numesc *condițiile lui Cauchy.*

Să exprimăm aceste condiții în coordonate polare: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$. Fie și $w = u + iv = R(\cos\Theta + i\sin\Theta)$. Avem

$$u_\rho = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta, \quad v_\rho = v_x \cos\theta + v_y \sin\theta,$$

$$u_\theta = \rho(-u_x \sin\theta + u_y \cos\theta), \quad v_\theta = \rho(-v_x \sin\theta + v_y \cos\theta),$$

deci, dacă $z \neq 0$,

$$u_\rho - \frac{1}{\rho} v_\theta = (u_x - v_y)\cos\theta + (u_y + v_x)\sin\theta,$$

$$v_\rho + \frac{1}{\rho} u_\theta = -(u_x - v_y)\sin\theta + (u_y + v_x)\cos\theta,$$

de unde rezultă că condițiile lui Cauchy sînt echivalente cu

$$\rho\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \rho\frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{\partial u}{\partial \theta} \tag{4}$$

într-un punct $z \neq 0$. Introducînd apoi R şi Θ, avem din $u = R\cos\Theta$, $v = R\sin\Theta$,

$$\rho\left(\frac{\partial R}{\partial \rho}\cos\Theta - R\sin\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right) = \frac{-\partial R}{\partial\theta}\sin\Theta + R\cos\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta},$$

$$\rho\left(\frac{\partial R}{\partial \rho}\sin\Theta + R\cos\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\rho}\right) = \frac{-\partial R}{\partial\theta}\cos\Theta + R\sin\Theta\frac{\partial\Theta}{\partial\theta},$$

echivalente cu

$$\rho\frac{\partial R}{\partial\rho} = R\frac{\partial\Theta}{\partial\theta}, \quad \rho R\frac{\partial\Theta}{\partial\rho} = -\frac{\partial R}{\partial\theta}. \tag{5}$$

De asemenea, introducînd R şi Θ în (3), avem

$$R_x\cos\Theta - R\sin\Theta\cdot\Theta_x = \quad R_y\sin\Theta + R\cos\Theta\cdot\Theta_y,$$

$$R_y\cos\Theta - R\sin\Theta\cdot\Theta_y = -R_x\sin\Theta - R\cos\Theta\cdot\Theta_x,$$

echivalente cu

$$R_x = R\Theta_y, \quad R_y = -R\Theta_x \tag{6}$$

sau

$$(\ln R)_x = \Theta_y, \quad (\ln R)_y = -\Theta_x.$$

Acestea arată că funcţia $\ln R + i\Theta$ este monogenă; deci $\ln R$ şi Θ funcţii armonice dacă $w \neq 0$.

Teorema 1. *Pentru ca $f(z)$ să fie monogenă în z_0 este necesar ca derivatele* $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ *să existe în acel punct şi să verifice condiţiile* (3).

Dacă $f(z)$ este monogenă, $f'(z_0)$ este egală cu limitele parţiale considerate mai sus:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{i}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{7}$$

în z_0.

Condiţiile teoremei 1 nu sînt suficiente.

Exemple de funcţii nemonogene într-un punct, care satisfac condiţiile lui Cauchy:

1. $w = r(\cos n\theta + i\sin n\theta)$ *n întreg* > 1 este o funcţie uniformă de $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

În $0(r = 0)$ condiţiile lui Cauchy (4) sînt satisfăcute:

$$ru_r = r\cos n\theta, \quad v_\theta = +nr\cos n\theta,$$

$$rv_r = r\sin n\theta, \quad u_\theta = -nr\sin n\theta$$

(acestea sînt nule pentru $r = 0$). Însă funcţia nu este monogenă:

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\cos n\theta + i\sin n\theta}{\cos\theta + i\sin\theta}$$

nu are limită cînd $\Delta z \to 0 (r \to 0)$.

2. $w=\sqrt{|xy|}$. Funcția este nulă pe axe, deci derivatele parțiale ale lui u și v sînt nule în $z=0$ și satisfac condițiile lui Cauchy. Însă

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{\sqrt{|xy|}}{x+iy}=\frac{\sqrt{\frac{1}{2}|\sin 2\theta|}}{\cos\theta+i\sin\theta}$$

nu are limită pentru $r\to 0$.

3. *Raportul* $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ *poate avea limite egale în toate direcțiile fără ca totuși să aibă limită.*

$$w=\frac{xy^2(x+iy)}{x^2+y^4}\quad (z\neq 0);\quad w(0)=0.$$

În origine, dacă $z\to 0$ pe o dreaptă $y=kx$,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{k^2x}{1+k^4x^2}\to 0.$$ La fel pe $x=0$.

Dar pe parabola $x=y^2$ avem

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=\frac{1}{2}.$$

Funcția satisface condițiile lui Cauchy în 0.

Condiții necesare și suficiente sînt date de

Teorema 2. *Pentru ca o funcție* $w=u(x,y)+iv(x,y)$ *să fie monogenă într-un punct, este necesar și suficient ca funcțiile* $u(x,y)$ *și* $v(x,y)$ *să fie diferențiabile în acel punct și să satisfacă condițiile lui Cauchy*:

$$u_x=v_y,\quad u_y=-v_x.$$

Într-adevăr, pentru ca raportul $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ să aibă o limită finită $A+iB$ în z_0 este necesar și suficient ca

$$\frac{\Delta w}{\Delta z}=A+iB+\varepsilon\quad(\Delta z\neq 0), \tag{8}$$

unde $\varepsilon\to 0$ pentru $\Delta z\to 0$. Punînd

$$\varepsilon=\varepsilon_1+i\varepsilon_2,$$

aceasta înseamnă că $\varepsilon_1\to 0$ și $\varepsilon_2\to 0$ cînd $\Delta x\to 0$ și $\Delta y\to 0$. Separînd realul de imaginar, condiția (8) revine la

$$\Delta u=A\Delta x-B\Delta y+\varepsilon_1\Delta x-\varepsilon_2\Delta y,$$
$$\Delta v=B\Delta x+A\Delta y+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_1\Delta y,$$

cu $\varepsilon_1\to 0$ și $\varepsilon_2\to 0$ pentru $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

De aici rezultă teorema, observînd că trebuie să avem $A=u_x=v_y$, $B=-u_y=v_x$.

Corolarul 1. *O funcție monogenă (cu derivata finită într-un punct) este continuă în acel punct.*

Prin ipoteză

$$\Delta u = (u_x + \xi)\,\Delta x + (u_y + \eta)\,\Delta y,$$

$$\Delta v = (v_x + \xi')\,\Delta x + (v_y + \eta')\,\Delta y,$$

unde $\xi, \eta, \xi', \eta' \to 0$ pentru $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$ și deci pentru $\Delta z \to 0$. Putem scrie, ținînd seamă de (3), $f'(z_0)$ fiind definit de (7):

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{(u_x + iv_x)\,\Delta x + (u_y + iv_y)\,\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \zeta = \frac{f'(z_0)\,\Delta x + if'(z_0)\,\Delta y}{\Delta x + i\Delta y} + \zeta$$

sau

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f'(z_0) + \zeta \tag{9}$$

cu

$$\zeta = \frac{\xi\Delta x + \eta\Delta y + i(\xi'\Delta x + \eta'\Delta y)}{\Delta z}, \tag{9'}$$

cum și

$$|\zeta| \leqslant |\xi| + |\eta| + |\xi'| + |\eta'| \tag{9''}$$

(căci $|\Delta x| \leqslant |\Delta z|$, ...), urmează $\zeta \to 0$ pentru $\Delta z \to 0$.
Deci

$$\Delta f = \Delta z(f'(z_0) + \zeta) \to 0 \quad \text{sau} \quad \lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Corolarul 2. *Dacă funcțiile $f(z)$ și $g(z)$, monogene în z_0, se anulează în acest punct, dar $f'(z_0)$ și $g'(z_0)$ nu sînt amîndouă nule, atunci*

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$$

(se înțelege că limita este ∞ cînd $g'(z_0) = 0$ și $f'(z_0) \neq 0$).

Într-adevăr, avem într-o vecinătate U_{z_0}:

$$f(z) = \Delta z\,(f'(z_0) + \varepsilon), \quad g(z) = \Delta z(g'(z_0) + \varepsilon_1),$$

unde $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ pentru $\Delta z \to 0$. Deci

$$\frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z_0) + \varepsilon}{g'(z_0) + \varepsilon} \to \frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}.$$

Observație. Din existența derivatelor finite ale funcțiilor $u(x, y)$, $v(x, y)$ nu rezultă continuitatea funcției $f(z)$, care e însă o consecință numai a monogeneității. Căci, de exemplu, $u(x, y)$ poate fi discontinuă chiar cînd există $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ (vezi exemplul 8).

Teorema 3. *Fie $w = f(z)$ o funcție monogenă în z_0 și $w_0 = f(z_0)$ un punct interior pentru mulțimea valorilor funcției. Dacă funcția $F(w)$ este definită într-o vecinătate V_{w_0} și monogenă în w_0, funcția $\Phi(z) = F(w(z))$ este monogenă în z_0 și*

$$\frac{d\Phi}{dz_0} = \frac{dF}{dw_0}\frac{dw}{dz_0}.$$

Avem, într-adevăr,

$$\Delta\Phi = \Delta F = \Delta w\left(\frac{dF}{dw_0} + Z\right), \quad Z \to 0 \text{ pentru } \Delta w \to 0,$$

$$\Delta w = \Delta z\left(\frac{dw}{dz_0} + \zeta\right), \quad \zeta \to 0 \text{ pentru } \Delta z \to 0.$$

Cum $\Delta w \to 0$ pentru $\Delta z \to 0$ (corolarul 1), avem

$$\Delta\Phi = \Delta z\left(\frac{dF}{dw_0}\frac{dw}{dz_0} + \zeta_1\right),$$

unde $\zeta_1 = \zeta\dfrac{dF}{dw_0} + Z\left(\dfrac{dw}{dz_0} + \zeta\right) \to 0$ pentru $\Delta z \to 0$.

Observație. Se va vedea mai tîrziu că, dacă $f(z)$ este monogenă într-o vecinătate U_{z_0}, punctul w_0 este interior pentru mulțimea valorilor $w = f(z)$.

Teorema 4. *Dacă $f_1(z)$, $f_2(z)$ sînt monogene în z_0, avem*

$$\frac{d}{dz_0}(f_1(z) + f_2(z)) = \frac{d}{dz_0}f_1(z) + \frac{d}{dz_0}f_2(z),$$

$$\frac{d}{dz_0}[f_1(z)\,f_2(z)] = f_2(z_0)\frac{df_1(z)}{dz_0} + f_1(z_0)\frac{df_2(z)}{dz_0},$$

$$\frac{d}{dz_0}(f(z))^n = n(f(z_0))^{n-1}\frac{df(z)}{dz_0},$$

$$\frac{d}{dz_0}\frac{f_2(z)}{f_1(z)} = \frac{1}{(f_1(z_0))^2}\left[f_1(z_0)\frac{df_2(z)}{dz_0} - f_2(z_0)\frac{df_1(z)}{dz_0}\right] \quad (\text{dacă } f_1(z_0) \neq 0).$$

Demonstrația ca la variabile reale.

Corolar. *Polinoamele sînt funcții monogene pentru toate valorile variabilei. Funcțiile raționale sînt monogene pentru toate valorile variabilei care nu anulează numitorul. Derivatele acestor funcții se obțin ca în cazul variabilelor reale.*

Definiții. *O funcție (uniformă) $f(z)$ se zice olomorfă într-un domeniu D dacă este finită și are derivată finită în fiecare punct din D.* Ea este monogenă și continuă în D (teorema 2).

$f(z)$ se zice olomorfă în z_0 dacă este olomorfă într-o vecinătate U_{z_0}; este olomorfă într-un domeniu închis $\bar{D}$ dacă este olomorfă într-un domeniu $D_1 \supset \bar{D}$.

$f(z)$ se consideră olomorfă în $z = \infty$ dacă funcția $f\left(\dfrac{1}{z}\right) = f^*(z)$ este olomorfă în $z = 0$ (se definește $f^*(0) = f(\infty)$).

Partea reală și imaginară, modulul și argumentul unei funcții olomorfe sînt derivabile în raport cu x și y.

O funcție poate fi monogenă într-un punct fără a fi olomorfă.

Exemplul 4. $w = |z|^n$

Teorema 5. *Dacă* $f(z)$ *este olomorfă în domeniul închis* $\bar{D}$, *avem*

$$\Delta f = \Delta z(f'(z) + \zeta),$$

unde $\zeta \to 0$ *pentru* $\Delta z \to 0$, *uniform în* $\bar{D}$.

Admitem, urmînd a da demonstrație mai tîrziu, că $f'(z)$ este continuu în D. Cum $\frac{\partial u}{\partial x}$, ... sînt continue, $u(x, y)$ și $v(x, y)$ sînt diferențiabile în $\bar{D}$ (§ 33, teorema 2), și în (9') $\xi, \eta, \xi', \eta' \to 0$ uniform în $\bar{D}$ (§ 33, teorema 3); de unde rezultă afirmația, avînd în vedere (9'').

Observație. Știm de asemenea că $\Delta f \to 0$ uniform în $\bar{D}$ (§ 13).

Derivatele de ordin superior ale unei funcții $f(z)$ se definesc recurent. Se va vedea că o funcție olomorfă are derivate continue de orice ordin. Admițînd aceasta, putem enunța:

Teorema 6. *Dacă* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *este olomorfă în* D, *funcțiile* $u(x, y)$, $v(x, y)$ *verifică ecuația lui Laplace*:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{10}$$

în D.

Deoarece u și v au derivate continue de ordinul 2 iar din (3) urmează

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

rezultă

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

(pentru că $\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}$ aceste derivate fiind continue).

Soluțiile ecuației (10) se numesc *funcții armonice*.

Reciproc:

Teorema 7. *O soluție* $u(x, y)$ *a ecuației lui Laplace, finită, continuă și cu derivatele* $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ *finite și continue în domeniul simplu conex* D *este partea reală a unei funcții* $f(z) = u + iv$, *olomorfă, în* D, *determinată pînă la o constantă additivă.*

Într-adevăr, $v(x, y)$ satisface ecuațiile (3), deci (într-un domeniu simplu conex),

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy + V(x_0, y_0), \tag{11}$$

care este integrala unei diferențiale totale, deoarece $u(x, y)$ satisface (10). În particular

$$v(x, y) = \int_{x_0}^{x} -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}\, dx + \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u(x_0, y)}{\partial x_0}\, dy + v(x_0, y_0),$$

dacă condițiile sînt satisfăcute într-un dreptunghi. Funcția $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ astfel determinată este olomorfă fiindcă satisface condițiile lui Cauchy și $u(x, y)$, $v(x, y)$ sînt diferențiabile (§ 33, teorema 2 și teorema 2 de mai sus) și derivatele parțiale de ordinul I continue.

Se zice că două soluții ale ecuației (10) legate prin relația (11) sînt *conjugate*.

Exemple **5**. $f(z) = \bar{z}$ *nu este monogenă* nicăieri: $u_x = 1$, $u_y = 0$, $v_x = 0$, $v_y = -1$ nu satisface condițiile lui Cauchy.

6. *O funcție olomorfă nu poate avea numai valori reale decît dacă este o constantă.* Căci $v = 0$ ne dă $u_x = u_y = 0$, deci $u = \text{const}$.

7. *Dacă modulul sau argumentul unei funcții olomorfe este constant, funcția este constantă.* Rezultă din (5) sau (6).

8. *Funcția*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{pentru } x = y = 0, \\ \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{pentru } x \text{ sau } y \neq 0 \end{cases}$$

are derivată în origine, dar nu este continuă. Căci avem $f(x, 0) = 0$, $f(0, y) = 0$, de unde $f_x(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = 0$. Iar $f(x, y) = \cos\theta \sin\theta$ arată că f nu are limită pentru $x \to 0$, $y \to 0$. Funcția nu este diferențiabilă.

9. $f(z) = \dfrac{z}{z-1}$ *cu* $f(\infty) = 1$ *este olomorfă în* $z = \infty$ *pentru că* $f\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1}{1-z}$ *este olomorfă în* $z = 0$. *Mai general, o funcție rațională* $f(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$ *este olomorfă în* $z = \infty$ *dacă gradul lui* $P(z)$ *este* $\leqslant$ *gradul lui* $Q(z)$.

Exerciții

1. *Să se determine funcțiile olomorfe* $f(z)$ *cu proprietatea* $|f(z)| = \varphi(|z|)$.

R. Din (5) urmează $R = R(\rho)$, $\Theta = \Theta(\theta)$ și

$$\rho \frac{1}{R}\frac{dR}{d\rho} = \frac{d\Theta}{d\theta} = a \quad (\text{const.}).$$

Rezultă, integrînd, $R = C\rho^a$, $\Theta = a\theta + \theta_0$,

$$f(z) = C\rho^a(\cos(a\theta + \theta_0) + i \sin(a\theta + \theta_0))$$

sau $f(z) = \alpha z^a$, unde am pus

$$\alpha = C(\cos\theta_0 + i \sin\theta_0).$$

2. *Funcția* $f(z) = e^x(\cos y + i \sin y)$ *este olomorfă în tot planul (la distanță finită) și are derivata* $= f(z)$.

3. *Să se stabilească ecuațiile cu derivate parțiale de ordinul 2 la care satisfac* $R = |f(z)|$ *și* $\Theta = \arg f(z)$ *ale unei funcții olomorfe.*

R. Acestea se deduc din (5) sau (6):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\log R + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\log R = 0, \quad \Theta_{xx} + \Theta_{yy} = 0$$

Aşadar $\log |f(z)|$ şi $\arg f(z)$ sînt funcţii armonice.

4. $\Delta_2 |f(z)| = \dfrac{\partial^2 |f(z)|}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 |f(z)|}{\partial y^2} = \dfrac{1}{|f(z)|}\left|\dfrac{df}{dz}\right|^2$.

R. Din (6): $R_{xx} + R_{yy} = \dfrac{\partial(R, \Theta)}{\partial(x, y)} = \dfrac{\partial(R, \Theta)}{\partial(u, v)}\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}$, unde, de exemplu, Jacobianul $\dfrac{\partial(R, \Theta)}{\partial(x, y)} = R_x\Theta_y - R_y\Theta_x$ şi se găseşte $\dfrac{\partial(u, y)}{\partial(R, \Theta)} = R$, $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2$.

5. *Să se determine funcţia olomorfă astfel ca*

$$f(0) = 0 \quad \text{şi} \quad u = e^x(x \cos y - y \sin y).$$

R. Condiţiile lui Cauchy dau (funcţia u fiind armonică):

$$v_x = e^x((x + 1) \sin y + y \cos y), \quad v_y = e^x((x + 1) \cos y - y \sin y),$$

de unde aplicînd (11):

$$v = e^x(x \sin y + y \cos y)$$

$$f(z) = e^z(x + iy)(\cos y + i \sin y) = ze^z.$$

6. *Idem, prin condiţiile* $f(0) = 0$ şi $u = x^2 - y^2 + xy$.

R. $v_x = 2y - x$, $v_y = 2x + y$,

$$v = \int_{(0, 0)}^{(x, y)} 2(y\,dx + x\,dy) - x\,dx + y\,dy = 2xy - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2;$$

$$f(z) = x^2 - y^2 + 2ixy - \frac{i}{2}(x^2 - y^2 + 2ixy) = z^2\left(1 - \frac{1}{2}i\right).$$

7. *Idem, prin condiţiile* $f(1) = 0$ şi $v = \dfrac{y}{x^2 + y^2}$.

R. $u_x = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$, $u_y = \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}$,

$$u = \int_{(1, 0)}^{(x, y)} \frac{(x^2 - y^2)\,dx + 2xy\,dy}{(x^2 + y^2)^2} = \int_0^y \frac{2xy\,dy}{(x^2 + y^2)^2} + \int_1^x \frac{dx}{x^2} = \frac{-x}{x^2 + y^2} + 1,$$

$$f(z) = 1 - \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = 1 - \frac{1}{z}.$$

8. *Să se determine funcţiile olomorfe pentru care*

$$u = \varphi\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right).$$

R. Scriind că u este armonică, avem

$$u_x = \left(1 + \frac{x}{r}\right)\varphi', \quad u_y = \frac{y}{r}\varphi',$$

$$\left[\left(1 + \frac{x}{r}\right)^2 + \frac{y^2}{r^2}\right]\varphi'' + \left(\frac{2}{r} - \frac{x^2 + y^2}{r^3}\right)\varphi' = 0$$

sau

$$\frac{2}{r}\left(x + \sqrt{x^2 + y^2}\right)\varphi'' + \frac{1}{r}\varphi' = 0$$

sau

$$2\alpha\varphi''(\alpha) + \varphi'(\alpha) = 0, \quad \alpha = x + \sqrt{x^2 + y^2},$$

de unde $\varphi' = \frac{c}{2\sqrt{\alpha}}$, $u = \varphi = c\sqrt{\alpha} + c_1$. De aici înainte este preferabil să întrebuințăm relațiile (4):

$$\alpha = 2r\cos^2\frac{\theta}{2}, \qquad u = c\sqrt{2r}\cos\frac{\theta}{2} + c_1,$$

$$v_r = \frac{c}{\sqrt{2r}}\sin\frac{\theta}{2}, \quad v_\theta = \frac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},$$

de unde

$$v = c\sqrt{2r}\sin\frac{\theta}{2} + c_2,$$

$$f(z) = c_0\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right) + c_1 + \mathrm{i}c_2 = c_0\sqrt{z} + c_1 + \mathrm{i}c_2 \quad (c_0, c_1, c_2 \text{ reali}).$$

9. *Funcția* $u = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ *este armonică. Să se determine funcția olomorfă* $f(z)$, *pentru care* $u = \operatorname{Re} f(z)$. *Ce sînt curbele* $u = \text{const}$ *și* $v = \text{const}$?

R. $f(z) = \dfrac{1+\mathrm{i}}{z} + \mathrm{i}c$ (c real). Curbele cerute sînt cercurile prin O, cu centrele pe bisectoarele axelor.

10. *Să se calculeze în coordonatele polare* r, θ:

$$\Delta_1\varphi = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 \quad \text{și} \quad \Delta_2\varphi = \varphi_{xx} + \varphi_{yy}.$$

R.

$$\Delta_1\varphi = \varphi_r^2 + \frac{1}{r^2}\varphi_\theta^2,$$

$$\Delta_2\varphi = \varphi_{rr} + \frac{1}{r^2}\varphi_{\theta\theta} + \frac{1}{r}\varphi_r.$$

11. *Să se stabilească formulele următoare pentru o funcție olomorfă* $w = f(z)$:

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{w'}{w}\right) = \frac{\partial}{\partial\theta}\arg w = \frac{r}{|w|}\frac{\partial|w|}{\partial r},$$

$$\operatorname{Im}\left(z\frac{w'}{w}\right) = -\frac{\partial}{\partial\theta}\log|w| = r\frac{\partial}{\partial r}\arg w.$$

R. Avem

$$w' = \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(R\cos\Theta + \mathrm{i}R\sin\Theta) = \left(\frac{R_x}{R} + \mathrm{i}\Theta_x\right)(R\cos\Theta + \mathrm{i}R\sin\Theta)$$

sau

$$\frac{w'}{w} = \frac{R_x}{R} + \mathrm{i}\Theta_x{}^{3)},$$

---

3) (Rezultă imediat din formula ce se va stabili mai tîrziu: $\log w = \log R + \mathrm{i}\theta$.)

de unde, aplicînd formulele (6)

$$\operatorname{Re}\left(z\frac{w'}{w}\right) = x\frac{R_x}{R} - y\Theta_x = x\Theta_y - y\Theta_x = \Theta_x x_\theta + \Theta_y y_\theta = \Theta_\theta$$

$$\operatorname{Im}\left(z\frac{w'}{w}\right) = y\frac{R_x}{R} + x\Theta_x = y\frac{R_x}{R} - x\frac{R_y}{R} = -\frac{R_\theta}{R}.$$

Celelalte expresii se deduc la fel sau rezultă din formulele (5).

12. *Fie $w = f(z)$ o funcție olomorfă. La o curbă $z = z(t)$ corespunde o curbă $w = f(z(t))$. La un punct, unde prima curbă are tangentă și $f'(z) \neq 0$, corespunde un punct unde a doua curbă are tangentă. Dacă ω și Ω sînt înclinările acestor tangente pe axa reală, avem*

$$\Omega = \omega + \arg f'(z).$$

R. 1°. $\dfrac{dw}{dt} = f'(z)\ z' \neq 0.$

2°. $\Omega = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{dv}{du} = \arg dw = \arg\left(f'(z)\,dz\right) = \arg dz + \arg f'(z) = \omega + \arg f'(z).$

Reprezentarea definită de o funcție olomorfă

§ 35. Funcția inversă

Definiție. *Vom zice că o transformare plană*

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \tag{12}$$

definită într-o vecinătate $U_{(x_0, y_0)}$, este regulată în (x_0, y_0). dacă:

1°. *Funcțiile $u(x, y)$, $v(x, y)$ admit derivate parțiale continue în $U_{(x_0, y_0)}$;*

2°. *Jacobianul* $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x_0, y_0)} \neq 0.$

(de unde urmează și $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$ *într-o vecinătate $U_{(x_0, y_0)}$).*

Dacă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ este funcție olomorfă de $z = x + iy$ în $z_0 = x_0 + iy_0$, condiția 1° este satisfăcută (admițînd că $f'(z)$ este continuă — cum vom demonstra mai tîrziu). Avem apoi

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2$$

(condițiile lui Cauchy) sau

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = |f'(z)|^2. \tag{13}$$

Așadar și 2° este satisfăcută dacă $f'(z_0) \neq 0$. Așadar:

Teorema 1. *O funcție $w = f(z)$ olomorfă într-un punct z_0 definește o reprezentare (transformarea $z \to w$) regulată în z_0 dacă $f'(z_0) \neq 0$.*

Teorema funcţiilor implicite, aplicată unei transformări regulate (12), ne spune că: Există o vecinătate $V_{(u_0, v_0)}$ şi o vecinătate $U_{(x_0, y_0)}$ astfel că ecuaţiile (12) au o singură soluţie

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v) \tag{12'}$$

pentru orice (u, v) din $V_{(u_0, v_0)}$; aceste funcţii satisfac de asemenea condiţiile 1°, 2° în $V_{(u_0, v_0)}$ şi iau valori (x, y) în $U_{(x_0, y_0)}$; ele verifică relaţiile $x(u_0, v_0) = x_0$, $y(u_0, v_0) = y_0$ şi $u(x(u, v), y(u,v)) = u$, $v(x(u, v), y(u, v)) = v$; derivînd aceste identităţi se obţin relaţii care exprimă x_u, x_v, y_u, y_v:

$$u_x x_u + u_y y_u = 1, \quad v_x x_u + v_y y_u = 0$$

de unde

$$x_u = \frac{v_y}{\Delta}, \qquad y_u = \frac{-v_x}{\Delta}, \qquad \Delta = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0 \tag{14}$$

şi analog

$$x_v = \frac{-u_y}{\Delta}, \quad y_v = \frac{u_x}{\Delta}. \tag{14'}$$

Ca consecinţă: $\dfrac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1.$

Ţinînd seamă de teorema 1, aceste rezultate se transpun imediat în complex:

Teorema 2. *Fie $f(z) = w$ o funcţie olomorfă în z_0, $f(z_0) = w_0$ şi $f'(z_0) \neq 0$. În aceste condiţii există o vecinătate U_{z_0} şi o vecinătate V_{w_0} astfel că ecuaţia $f(z) = w$ are o singură soluţie $z = z(w)$ în V_{w_0}; funcţia $z = z(w)$ astfel definită ia valori numai în U_{z_0}, $z(w_0) = z_0$, este olomorfă în w_0 şi are ca derivată*

$$\frac{dz}{dw} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Funcţia $z(w)$ este *inversa locală* a funcţiei $f(z)$.

Deoarece x_u, x_v, y_u, y_v există şi sînt continue în V_{w_0} avem de verificat numai condiţiile lui Cauchy:

$$x_u = \frac{v_y}{\Delta} = \frac{u_x}{\Delta} = y_v, \quad x_v = \frac{-u_y}{\Delta} = \frac{v_x}{\Delta} = -y_u$$

(ţinînd seamă de (14), (14') şi condiţiile lui Cauchy pentru $f(z)$).
Apoi avem

$$\frac{dz}{dw} = x_u + iy_u = \frac{v_y - iv_x}{u_x v_y - u_y v_x} = \frac{u_x - iv_x}{u_x^2 + v_x^2} = \frac{1}{u_x + iv_x} = \frac{1}{f'(z)}.$$

Ceeace se poate stabili şi ca în cazul funcţiilor reale de o variabilă: Fie Δz şi Δw creşteri corespunzătoare. Deoarece $f(z)$ este olomorfă, fiind dat $\varepsilon > 0$, există $\eta > 0$ aşa că $0 < |\Delta z| < \eta$ atrage

$$\left| \frac{\Delta w}{\Delta z} - f'(z) \right| < \varepsilon.$$

Apoi, $z(w)$ fiind continuă, pentru η precedent există un $\delta > 0$ astfel că $|\Delta w| < \delta$ atrage $|\Delta z| < \eta$ și deci inegalitatea de mai sus. Ceea ce înseamnă $\frac{\Delta w}{\Delta z} \to f'(z)$ sau $\frac{\Delta z}{\Delta w} \to \frac{1}{f'(z)}$ pentru $\Delta w \to 0$.

Mai tîrziu vom demonstra această teoremă cu mijloace proprii teoriei funcțiilor de variabilă complexă și vom studia și cazul cînd $f'(z_0) = 0$.

Observație. Condiția $f'(z_0) \neq 0$ este necesară pentru validitatea teoremei:

Exemplu. $w = z^n$ (n *întreg* > 1). Aici $f'(0) = 0$. În orice V_0 ecuația $w = z^n$ are n rădăcini care iau valori într-o vecinătate U_0 dată. Anume, punînd $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, $w = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, aceste rădăcini sînt

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Ele se vor găsi în U_0 dacă luăm ρ destul de mic (w în V_0). Funcția inversă $\sqrt[n]{w}$ este multiformă în orice V_0, deci nu este olomorfă în $w = 0$.

§ 36. Transformarea domeniilor

Fie $w = f(z)$ olomorfă și $f'(z) \neq 0$ în domeniul D și E mulțimea valorilor funcției: Transformarea (reprezentarea) $z \to w$ efectuată de funcție duce $D \to E$.

1°. E este deschisă. Căci dacă $w_0 \in E$, vecinătatea V_{w_0} din teorema precedentă este acoperită de valori ale funcției adică $V_{w_0} \subset E$.

2°. E este conexă. Aceasta rezultă din corolarul 1, § 34, sau direct cum urmează: Dacă E ar admite o partiție $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 \cap E_2 = \varnothing$ (mulțimea vidă) și E_1, E_2 deschise, fie D_1 și D_2 submulțimile lui D cărora le corespund puncte din E_1, respectiv E_2; $D = D_1 \cup D_2$ ar fi o partiție. Într-adevăr, $D_1 \neq \varnothing$, $D_2 \neq \varnothing$ și $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$ (evident); în sfîrșit, D_1 și D_2 sînt deschise. Căci de exemplu, dacă $z_0 \in D_1$ și $w_0 = f(z_0)$, există o vecinătate $V_{w_0} \subset E_1$ (mulțime deschisă prin ipoteză) și o vecinătate U_{z_0} astfel că la orice $z \in U_{z_0}$ corespunde $w \in V_{w_0}$ (din cauza continuității lui $f(z)$), ceea ce înseamnă $U_{z_0} \subset D_1$, adică D_1 este deschisă. Așadar:

Teorema 1. *(Invarianța domeniilor). O funcție $f(z)$ olomorfă și cu derivata $f'(z) \neq 0$ într-un domeniu D transformă acest domeniu într-un domeniu.*

Mai tîrziu vom elibera această teoremă de restricția $f'(z) = 0$. Vom putea zice atunci: mulțimea valorilor unei funcții olomorfe într-un domeniu este tot un domeniu.

Exemplul 1. În exemplul din § 35 punctul $w = 0$ este interior. Căci la cercul $|z| < R$ corespunde cercul $|w| < R^n$. Corespondența însă nu este biunivocă: fiecare punct $\neq 0$ din al doilea cerc corespunde la n puncte din primul cerc.

În general, corespondența $z \to w$ între D și E nu este biunivocă; ea definește o funcție inversă (globală) $z = z(w)$ multiformă. Teorema 2, paragraful precedent, ne dă „elemente" olomorfe ale acestei funcții în vecinătăți destul de mici ale punctelor din E (corespunzătoare) la puncte din D cu cu $f'(z) \neq 0$. Într-un același punct din E putem avea mai multe asemenea elemente.

Definiție. *Zicem că o funcție $f(z)$ este univalentă în domeniul D dacă orice valoare a ei este luată într-un singur punct din D. Sau: $z \neq z'$ în D atrage $f(z) \neq f(z')$. Mai general, $f(z)$ este p-valentă în D dacă orice valoare a funcției este luată în p puncte distincte din D, cu excepția eventuală a unor valori ale funcției, care corespund la p puncte din D, din care unele sînt confundate.*

Exemplul 2. $f(z) = z^n$ *este* n*-valentă în tot planul.*

Teorema 2. *Inversa unei funcții $f(z)$, olomorfe, univalente și cu derivata $f'(z) \neq 0$ într-un domeniu D, este o funcție cu aceleași proprietăți în domeniul E al valorilor lui $f(z)$.*

Într-adevăr, corespondența $D \to E$ este biunivocă, deci elementele de funcție inversă din vecinătatea fiecărui punct din E coincid în vecinătățile respective cu funcția inversă globală; aceasta este deci olomorfă în E și evident univalentă.

Observație. Univalența nu decurge din celelalte condiții ale teoremei.

Exemplul 3. $f(z) = z^n$ *într-o coroană de centru* O $(n > 1)$.

Dar se va vedea că $f'(z) \neq 0$ este o consecință a univalenței.

Teorema 3. *O funcție $f(z)$, continuă în închiderea $\bar{D}$ a unui domeniu D din planul lui Gauss, olomorfă și cu derivata $f'(z) \neq 0$ în domeniul D, transformă pe $\bar{D}$ în închiderea $\bar{E}_1$ a unui domeniu; punctele frontieră ale lui $\bar{E}_1$ corespund la puncte frontieră ale lui $\bar{D}$.*

Din continuitatea lui $f(z)$ în $\bar{D}$ rezultă mai întîi că mulțimea $\bar{E}_1$ este închisă, în virtutea teoremei 2, § 57. Demonstrație directă: Fie $\lambda \in \operatorname{fr} \bar{E}_1$, w_n un șir convergent la λ în $\bar{E}_1$, z_n puncte unde $f(z_n) = w_n$ și ζ un punct limită al punctelor z_n. Prin ipoteză $\zeta \in \bar{D}$ și avem $w_n = f(z_n) \to f(\zeta) = \lambda$ (din cauza continuității), adică $\lambda \in \bar{E}_1$.

Apoi $\zeta \in \operatorname{fr} \bar{D}$ pentru că la puncte interioare ale lui $\bar{D}$ corespund după teorema 1 puncte interioare ale lui $\bar{E}_1$. Mai departe, λ este punct limită de puncte interioare: Pentru orice V_λ, există o vecinătate U_ζ astfel că punctele din $U_\zeta \cap D$ sînt transformate în puncte interioare ale lui $\bar{E}_1$, conținute în V_λ.

În sfîrșit, int $\bar{E}_1$, este un domeniu pentru că este deschis și conex: int $\bar{E}_1$ corespunde unei mulțimi D_1 intermediară între D și $\bar{D}$ care este conexă (teorema 6, § 60) și deci transformată de f într-o mulțime conexă (teorema 3, § 60). Mai trebuie observat că în cazul nostru fr (int $\bar{E}_1$) = fr $\bar{E}_1$ (ceea ce nu este adevărat în general).

Observație. Nu se poate afirma întotdeauna că la punctele frontieră ale lui $\bar{D}$ corespund puncte frontieră ale lui $\bar{E}_1$. Dacă $f(D) = E$, putem scrie numai: $\bar{E}_1 = E \cup \operatorname{fr} E$, $E \subset \operatorname{int} \bar{E}_1$.

Exemplul 4. $f(z) = z^n$ $(n > 1)$ satisface condițiile teoremei în sectorul $0 \leqslant r \leqslant 1$, $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi/n \cdot \bar{E}_1$ este cercul $|w| \leqslant 1$. Or, la punctele de pe razele sectorului corespund puncte interioare ale lui E_1 (cu excepția celor de pe arcul sectorului). Funcția nu este univalentă în $\bar{D}$.

Corolar. *Dacă funcția $f(z)$ este univalentă în $\bar{D}$, atunci* fr $\bar{D}$ *și* fr $\bar{E}_1$ *se corespund biunivoc și de asemenea interioarele D și E_1 (condițiile teoremei fiind menținute).*

Într-adevăr, deoarece $f(z)$ efectuază o reprezentare biunivocă și continuă, funcția inversă este continuă în $\bar{E}_1$, iar după teorema lui Brouwer (reprezentarea fiind un homeomorfiem) și int $\bar{E}_1$ este transformat în int $\bar{D} = D$. Astfel, int $E_1 = E$, de unde $f(\text{fr } \bar{D}) = \text{fr } \bar{E}_1$.

Observație. Teorema precedentă se aplică în cazul unei funcții olomorfe într-un domeniu închis $\bar{D}$ ($\bar{D}$ conținut într-un domeniu unde funcția este olomorfă).

Exerciții

1. *O funcție olomorfă într-un domeniu, $f(z) = w$, poate lua valori w numai pe o curbă simplă din planul (w)?*

R. Nu, pentru că o curbă simplă nu este un domeniu (nu are puncte interioare, vezi § 5, cap. I). În particular, $f(z)$ nu poate avea numai valori reale sau pur imaginare.

2. *Fiind dată funcția* $w = \dfrac{\beta z^2 - \alpha}{z^2 - 1}$, *ce domeniu corespunde domeniului* $|z| < 1$?

R. $z^2 = \dfrac{w - \alpha}{w - \beta}$; domeniul cerut este $\left|\dfrac{w - \alpha}{w - \beta}\right| < 1$, adică semiplanul determinat de perpendiculara în mijlocul segmentului $\overline{\alpha\beta}$ și care conține punctul α.

3. *Fiind dată funcția* $w = z^2 - 1$, *ce mulțime de puncte din planul* (z) *corespunde domeniului* $|w| < 1$?

R. $|w|^2 = (r^2 \cos 2\theta - 1)^2 + (r^2 \sin 2\theta)^2 = r^4 - 2r^2 \cos 2\theta + 1 < 1$
sau $r^2 < 2 \cos 2\theta$: domeniile interioare celor două bucle ale unei lemniscate Bernoulli.

§ 37. Reprezentări conforme. (Generalități)

Definiție. *Vom zice că o reprezentare (transformare) plană*

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

este regulată în sens larg în (x_0, y_0) *dacă:*

1° *aceste funcții sînt diferențiabile în* (x_0, y_0) *și*

2° $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y_0)} \neq 0.$

Reprezentarea este continuă.

Atunci este indusă între direcțiile prin (x_0, y_0) și (u_0, v_0) o corespondență biunivocă, mai precis omografică, dată de

$$\begin{aligned} du &= u_x\, dx + u_y\, dy, \\ dv &= v_x\, dx + v_y\, dy. \end{aligned} \tag{15}$$

(biunivocă pentru că are determinantul $\neq 0$). Notînd cu θ și φ unghiurile acestor direcții cu axele Ox, Ou, corespondența lor se poate reprezenta și prin ecuația

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_x + v_y \operatorname{tg} \theta}{u_x + u_y \operatorname{tg} \theta}. \tag{15'}$$

Teorema 1. *O transformare regulată duce o curbă local simplă într-o curbă de același fel (dacă prima curbă se află în domeniul de regularitate al transformării).*

Într-adevăr, fie $z = z(t)$ curba dată și $z_0 = z(t_0)$ un punct al ei. Prin ipoteză există o vecinătate U_{z_0} pe care transformarea dată o duce într-un domeniu Δ_0 conținînd punctul w_0 corespunzător lui z_0; se poate presupune (luînd U_{z_0} destul de mică) că corespondența dintre U_{z_0} și Δ_0 este homeomorfă. Există un interval $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ la care corespunde un subdrum $z = z(t)$ conținut în U_{z_0} și simplu; transformarea dată fiind homeomorfă în U_{z_0}, îl va duce într-un arc simplu.

Rezultă că orice valoare a lui t admite un subinterval $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ la care corespunde un arc simplu al transformatei curbei date, care este deci tot o curbă local simplă.

Consecință. *O transformare regulată duce o curbă tot într-o curbă.*

Căci curba dată este o sumă de arce simple consecutive, care sînt duse în curbe local simple, deci în sume de arce simple consecutive.

Exemplul 1. *Transformarea* $w = z^2$ *duce arcul simplu* $z = t(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ *în curba* $w = t^2(-1 \leqslant t \leqslant 1)$, *care nu este local simplă* (căci la un interval $-\varepsilon \leqslant t \leqslant \varepsilon$ nu corespunde un arc simplu). În cazul acesta curba dată trece prin punctul $z = 0$, unde $w' = 0$ și transformarea nu este regulată.

Definiție. *O curbă se numește regulată dacă-i reprezentată printr-o ecuație de forma* $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, *unde funcția* $z(t)$ *are derivata* $z'(t) \neq 0$, ∞ *și continuă în* $[a, b]$.

Teorema 2. *O transformare regulată duce o curbă regulată într-o curbă de asemenea regulată.*

Căci curba dată fiind $z = z(t)$ cu $z'(t) \neq 0$ și continuă, iar transformarea fiind $w = w(z)$ cu $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0$ și derivatele parțiale continue, curba transformată va fi $w = w(z(t))$, și vom avea $w' = u_x x' + u_y y' + i(v_x x' + v_y y')$ continuă și $w' \neq 0$ pentru că altfel ar urma (din $z' \neq 0$), $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0$. Deci transformata este o curbă regulată.

Definiție. *O reprezentare regulată în sens larg se numește conformă dacă păstrează unghiurile a două direcții oarecare prin punctul considerat, sau le schimbă numai semnul.*

În primul caz este evident că două direcții corespunzătoare se rotesc în același sens, adică transformarea este *directă:* în al doilea caz cele două direcții se rotesc în sensuri contrare, adică transformarea este *indirectă.*

Observație. Notînd $m = \operatorname{tg} \theta$, $m' = \operatorname{tg} \varphi$, avem din $m' = \dfrac{v_x + m v_y}{u_x + m u_y}$,

$$\frac{dm'}{dm} = \frac{u_x v_y - u_y v_x}{(u_x + m u_y)^2}$$

deci transformarea este directă (m' crește cu m) sau indirectă (m' descrește cînd m crește), după cum $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(x_0, y_0)}$ este > 0 sau < 0.

Să căutăm condițiile în care transformarea precedentă este conformă (directă sau indirectă). Ele se scriu

$$\theta - \theta' = \pm (\varphi - \varphi')$$

sau

$$\varphi \mp \theta = \varphi' \mp \theta' = \text{const.}$$

sau

$$\operatorname{tg} (\varphi \mp \theta) = C \text{ (const.)}$$

sau, încă, după (15')

$$\frac{v_x + v_y \operatorname{tg} \theta}{u_x + u_y \operatorname{tg} \theta} \mp \operatorname{tg} \theta = C \quad \left(1 \pm \frac{v_x + v_y \operatorname{tg} \theta}{u_x + u_y \operatorname{tg} \theta} \operatorname{tg} \theta\right)$$

sau

$$v_x + (v_y \mp u_x) \operatorname{tg} \theta \mp u_y \operatorname{tg}^2 \theta = C[u_x + (u_y \pm v_x) \operatorname{tg} \theta \pm v_y \operatorname{tg}^2 \theta].$$

$\operatorname{tg} \theta$ fiind arbitrar, aceasta echivalează cu

$$v_x = Cu_x, \quad v_y \mp u_x = C(u_y \pm v_x), \quad u_y = -Cv_y.$$

Relația mijlocie împreună cu

$$C(v_y \mp u_x) + (u_y \pm v_x) = 0,$$

dedusă din celelalte două, ne dau

$$u_x = \pm v_y, \quad u_y = \mp v_x. \tag{16}$$

Invers, aceste relații atrag precedentele, căci ne dau

$$\frac{v_x}{u_x} = -\frac{u_y}{v_y} = C.$$

Ele sînt condițiile lui Cauchy pentru funcția $f(z) = u \pm iv$ de $z = x + iy$. Aceste condiții împreună cu condiția 1° asigură monogeneitatea funcției $f(z)$ în punctul considerat. Pe de altă parte, condiția 2° înseamnă după (13), $f'(z) \neq 0$, deoarece cînd $f(z) = u - iv$ avem (schimbînd v în $-v$)

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = -|f'(z)|^2.$$

Deci

Teorema 3. *O reprezentare regulată în sens larg* (12) *este conformă într-un punct atunci și numai atunci cînd funcția* $f(z) = u \pm iv$ *cu* $z = x + iy$ *este monogenă în acel punct; reprezentarea e directă sau indirectă după cum se ia semnul superior sau inferior.*

Consecință. *O funcție olomorfă și cu derivata* $\neq 0$ *într-un domeniu* D *efectuează o reprezentare conformă directă a domeniului* D *pe domeniul corespunzător* E.

Observație. Condiția $f'(z) \neq 0$ implicată în teorema precedentă este esențială:

Exemplul 2. *Reprezentarea* $w = z^n (n > 1)$ *nu este conformă în* O $\left(\text{unde } \frac{dw}{dz} = 0\right)$.

Căci în timp ce o direcție prin O se rotește de un unghi θ, direcția corespunzătoare se rotește de unghiul $\varphi = n\theta$.

Teorema 7. *O reprezentare conformă este caracterizată și prin condiția ca raportul* $\frac{ds'}{ds}$ *a două elemente de arc corespunzătoare să fie independent de direcție (deci dependent numai de punctul* z*).*

Într-adevăr, avem

$$ds^2 = dx^2 + dy, \quad ds'^2 = du^2 + dv^2$$

și după (15)

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{(u_x^2 + v_x^2)\,dx^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y)\,dx dy + (u_y^2 + v_y^2)\,dy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Acest raport este independent de direcția dy/dx dacă

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2, \quad u_x u_y + v_x v_y = 0.$$

Cum u_x și v_x nu se anulează simultan $\left(\text{fiindcă } \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \neq 0\right)$, a doua condiție este echivalentă cu

$$v_y = k\, u_x, \quad u_y = -\, k v_x,$$

și prima condiție devine

$$u_x^2 + v_x^2 = k^2(u_x^2 + v_x^2) \neq 0$$

sau $k = \pm 1$. Se regăsesc astfel condițiile (16).
Avem

$$\frac{ds'^2}{ds^2} = \frac{u_x^2 + v_x^2}{1} = |f'(z)|^2, \quad \frac{ds'}{ds} = |f'(z)|.$$

arg $f'(z)$ este unghiul de care se rotește o direcție: rezultă din $f'(z) = \frac{dw}{dz}$.

Exerciții

1. *Dacă* $f(z)$ *este olomorfă și* $f'(z) \neq 0$, *curbele* $|f(z)| = \text{const.}$ *și* $\arg f(z) = \text{const.}$ *formează o rețea ortogonală.*

R. Pentru că ele au drept corespunzătoare, în transformarea conformă $w = f(z)$, cercurile de centru O și dreptele prin O, care se taie ortogonal. Se poate verifica și cu ajutorul relațiilor (6), care dau $R_x\theta_x + R_y\theta_y = 0$.

2. *Tot așa curbele* $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$

Observație. În ambele cazuri, familiile de curbe considerate sînt familii echipotențiale, adică pot fi reprezentate prin $\varphi(x, y) = \text{const.}$, unde φ este o funcție armonică (potențial).

3. *Condiția pentru ca* $\varphi(x, y) = \text{const}$, *să fie o familie echipotențială este ca raportul*

$$\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} = \frac{\varphi_{xx} + \varphi_{yy}}{\varphi_x^2 + \varphi_y^2}$$

să fie o funcție de φ.

R. Dacă curbele $\varphi = \text{const}$ coincid cu $\Phi = \text{const}$, avem $\Phi = \Phi(\varphi)$. Liniile $\varphi = \text{const.}$ sînt echipotențiale dacă se poate determina o funcție $\Phi(\varphi)$ armonică. Avem

$$\Delta_2\Phi(\varphi) = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi'\varphi_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi'\varphi_y) = \Phi''\Delta_1\varphi + \Phi'\Delta_2\varphi.$$

Deci condiția este

$$\frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} = \mathcal{F}(\varphi), \quad \mathcal{F}(\varphi) = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi'(\varphi)}.$$

Condiția fiind satisfăcută, vom avea

$$\Phi(\varphi) = c\int e^{-\int\mathcal{F}(\varphi)d\varphi}\,d\varphi + C_1$$

unde se poate lua $C_1 = 0$, $C = 1$).

4. *Pentru funcția* $w = z^2$, curbele $u = \text{const.}$ și $v = \text{const.}$ *formează două familii de hiperbole echilatere ortogonale.*

5. *În care puncte corespondența definită de* $w = z^4 - 4z$ *nu este conformă?*

6. *Fiind dată funcția* $w = \left(\dfrac{z-a}{z+a}\right)^2 (a > 0)$, *există în planul* (z) *două domenii reprezentate conform și biunivoc pe semiplanul superor* (w); *care sînt aceste domenii?*

R. $0 < \arg w < \pi$, sau $0 < \arg(z-a) - \arg(z+a) < \pi/2$; aceasta reprezintă domeniul exterior semicercului superior $|z| > a$, $\operatorname{Im} z > 0$ și semicercul inferior $|z| < a$, $\operatorname{Im} z < 0$. Sau se pune condiția $\operatorname{Im} w > 0$.

7. *Să se arate că* $r = \dfrac{C}{\cos^2\dfrac{\theta}{2}}$ *este o familie de curbe echipotențială. Să se determine funcția* $f(z)$ *pentru care aceste curbe sînt liniile* $u = \text{const.}$

R. Avem pentru $\varphi = r\cos^2\dfrac{\theta}{2}$ (vezi exercițiul 10, § 34):

$$\Delta_1\varphi = \cos^2\frac{\theta}{2}, \quad \Delta_2\varphi = \frac{1}{2r}, \quad \text{deci} \quad \frac{\Delta_2\varphi}{\Delta_1\varphi} = \frac{1}{2\varphi} = \mathcal{F}(\varphi).$$

Curbele date formează deci o familie echipotențială (exercițiul 3). Aplicînd acest exercițiu, avem $\Phi = 2C\sqrt{\varphi} + C_1$. Ecuațiile (4) ne dau pentru $u = 2C\sqrt{r}\cos\dfrac{\theta}{2} + C_1$:

$$v_r = \frac{C}{\sqrt{r}}\sin\frac{\theta}{2}, \quad v_\theta = C\sqrt{r}\cos\frac{\theta}{2},$$

de unde

$$v = 2C\sqrt{r}\sin\frac{\theta}{2} + C'.$$

$$f(z) = 2C\sqrt{r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right) + C'' = 2C\sqrt{z} + C''$$

cu C real. Curbele $u = \text{const.}$ și $v = \text{const.}$ formează un sistem de parabole homofocale, cu focarul în origine.

Transformări liniare (omografice)

§38. Proprietăţi generale

Definiţie. *Se numeşte transformare (reprezentare) liniară (directă) transformare de forma*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \tag{17}$$

unde a, b, c, d sînt numere complexe cu $ad - bc \neq 0$. Se numeşte transformare antiliniară (liniară indirectă), o transformare de forma

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad cu \quad ad - bc \neq 0. \tag{17'}$$

Se atrage atenţia că şi în acest caz la z corespunde $w = \overline{\frac{az + b}{cz + d}} = \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}$.
Schimbînd notaţia, transformarea poate fi scrisă şi

$$w = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}.$$

Transformarea (17) se întinde şi la punctul $z = \infty$, luînd cînd $c = 0$, $w = \infty$ şi cînd $c \neq 0$, $w = a/c$; în acelaşi caz, pentru $z = -d/c$ se ia $w = \infty$. La fel (17').

Condiţia $ad - bc \neq 0$ asigură biunivocitatea transformării. Căci avem $w - w' = \frac{(ad - bc)(z - z')}{(cz + d)(cz' + d)}$, de unde $w \neq w'$ pentru $z \neq z'$. Transformarea inversă este de acelaşi fel. $ad - bc$ se numeşte *determinantul* transformării.

Avem

$$\frac{dw}{dz} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0,$$

deci

Teorema 1. *O transformare liniară sau antiliniară este conformă în toate punctele la distanţă finită.*

Observaţie. Dacă $ad - bc = 0$, ecuaţia (17) se scrie, presupunînd de exemplu $b \neq 0$,

$$adzw - abz + bdw - b^2 = 0$$

sau

$$(az + b)(dw - b) = 0.$$

Avem o corespondenţă singulară, în care la un z generic corespunde $w = b/d$, iar la un w generic, $z = -b/a$.

Teorema 2. *O transformare liniară păstrează birapoartele; o transformare antiliniară schimbă un biraport în conjugatul său.*

Biraportul a patru puncte, z_1, z_2, z_3, z_4 este definit prin

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_3)(z_2 - z_4)}{(z_1 - z_4)(z_2 - z_3)}.$$

Aplicînd (17) avem

$$w_1 - w_3 = \frac{(ad - bc)(z_1 - z_3)}{(cz_1 + d)(cz_3 + d)} \text{ etc.}$$

şi observînd simplificările, găsim

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Pentru o transformare antiliniară avem de asemenea

$$[\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3, \overline{w}_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4],$$

deci

$$\overline{[w_1, w_2, w_3, w_4]} = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Teorema 3. *Există o transformare liniară şi una antiliniară, care duc trei puncte* z_1, z_2, z_3 *distincte respectiv în trei puncte* w_1, w_2, w_3 *distincte. Această transformare este unică şi are ecuaţia*

$$[w_1, w_2, w_3, w] = [z_1, z_2, z_3, z], \quad \textit{respectiv} \tag{18}$$

$$[\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{w}_3, \overline{w}] = [z_1, z_2, z_3, z].$$

După teorema precedentă două puncte corespunzătoare trebuie să verifice această ecuaţie, care este evident de forma (17), respectiv (17'). Apoi determinantul transformării (18) este $\neq 0$ pentru că altminteri cel puţin două dintre punctele z_1, z_2, z_3, ar avea un acelaşi corespunzător w.

Observaţie. Acelaşi raţionament arată că o transformare biunivocă $z \to w$, care păstrează birapoartele, este o transformare liniară.

§ 39. Drepte şi cercuri în planul lui Gauss. Păstrarea lor în transformările liniare

În coordonate carteziene x, y, ecuaţia unui cerc sau a unei drepte reale se scrie

$$\alpha_0(x^2 + y^2) + 2\alpha_1 x + 2\alpha_2 y + \alpha_3 = 0 \quad (\alpha_k \text{ reali})$$

cu $\alpha_0 = 0$ în cazul dreptei şi $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 - \alpha_0\alpha_3 > 0$ în cazul cercului real. Punînd $z = x + iy$ ecuaţia devine

$$\alpha_0 z\bar{z} + \alpha_1(z + \bar{z}) - i\alpha_2(z - \bar{z}) + \alpha_3 = 0,$$

sau schimbînd notaţia:

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0, \tag{19}$$

unde α, γ sînt reali şi β, $\bar{\beta}$ complexe conjugate ($\beta = \alpha_1 + i\alpha_2$, $\bar{\beta} = \alpha_1 - i\alpha_2$) şi $\alpha = 0$ în cazul dreptei, $\beta\bar{\beta} - \alpha\gamma > 0$ în cazul cercului real, ceea ce exprimă că primul membru al ecuaţiei (19) este real pentru orice z (cum se vede anulînd partea imaginară pentru x, y arbitrari).

Împărţind ecuaţia cu $z\bar{z}$ şi făcînd $z \to \infty$, se vede că dreptele apar în planul lui Gauss ca cercuri care trec prin punctul ∞. Vom cuprinde de aici înainte sub denumirea de cerc şi cazul dreptei.

Teorema 1. *O transformare liniară sau antiliniară duce cercuri în cercuri.*

Substituind în cazul transformării liniare (17) $z = \dfrac{dw - b}{a - cw}$ $\left(\text{şi } \bar{z} = \dfrac{\bar{d}\bar{w} - \bar{b}}{\bar{a} - \bar{c}\bar{w}}\right)$ în (19), obţinem o ecuaţie de aceeaşi formă:

$$\alpha' w\bar{w} + \bar{\beta}' w + \beta' \bar{w} + \gamma' = 0.$$

Este clar fără calcul că α', γ' sînt reali şi $\bar{\beta}'$, β' conjugaţi, deoarece primul membru al ecuaţiei (19) este real pentru z arbitrar şi rămîne real, după substituţie, pentru w arbitrar (numitorul comun $(a - cw)(\bar{a} - \bar{c}\bar{w})$, cu care am înmulţit, fiind real).

Tot de aici rezultă şi corespondenţa domeniilor determinate de cercuri.

Această teoremă se poate încă demonstra cu ajutorul ecuaţiei ce vom stabili a cercului determinat de trei puncte.

Să observăm că, fiind date punctele z_1, z_2, z, avem (vezi fig. 18):

$$\arg \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \arg \frac{z - z_1}{z - z_2} = \arg (z - z_1) - \arg (z - z_2) = \widehat{z_2 z z_1}.$$

Acesta este un unghi de semidrepte algebric, adică măsurat prin rotaţia semidreptei zz_2 care descrie unghiul, sau o rotaţie care diferă de acesta prin $2k\pi$.

Dacă aceste puncte sînt pe un cerc, z_1 şi z_2 fiind fixe, cînd z descrie un arc $\overset{\frown}{z_1 z_2}$, unghiul $\widehat{z_2 z z_1}$ are o valoare constantă ω, iar cînd z descrie celălalt arc, el are valoarea constantă $\omega - \pi$ (vezi fig. 18). Din contră, $\widehat{z_2 z z_1} \neq \omega$, $\omega - \pi$ pentru punctele care nu sînt pe cerc (cum vom vedea mai jos). Aşadar ecuaţia

$$\arg \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = \omega + k\pi \quad (\omega = \text{const.}) \tag{20}$$

reprezintă un cerc şi reciproc. În cazul unei drepte avem $\widehat{z_2 z z_1} \neq 0, \pm\pi$ după cum z se află în afara sau în segmentul $\overline{z_1 z_2}$, de unde rezultă că ecuaţia dreptei $\overline{z_1 z_2}$ este

$$\operatorname{Im} \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = 0. \tag{21}$$

Să considerăm acum cercul determinat de trei puncte z_1, z_2, z_3. Avem $\arg \dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} = \omega + k'\pi$ şi ecuaţia (20) pentru un punct oarecare al lui. Putem deci scrie această ecuaţie

$$\arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} - \arg \frac{z_1 - z}{z_2 - z} = k''\pi$$

sau

$$\arg [z_1, z_2, z_3, z] = k''\pi,$$

sau

$$\text{Im } [z_1, z_2, z_3, z] = 0, \tag{22}$$

valabilă și atunci cînd z_1, z_2, z_3 sînt coliniare. Cu alte cuvinte punctele cercului sînt acele care fac real acest biraport. De aici decurge imediat teorema 1,

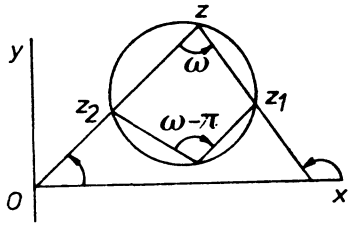

Fig. 18

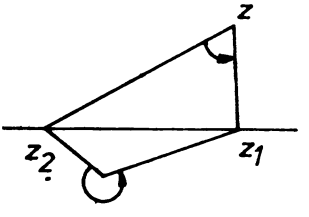

Fig. 19

avînd în vedere conservarea birapoartelor reale în transformările liniare și antiliniare. Condiția ca punctele z_1, z_2, z_3, z_4 să fie conciclice este așadar ca $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ să fie real (vezi și exemplul 3). Se va observa și formula

$$\arg [z_1, z_2, z_3, z_4] = \widehat{z_2 z_3 z_1} - \widehat{z_2 z_4 z_1}.$$

În mod analog, pot fi reprezentate și domeniile determinate de un cerc. O dreaptă $\overline{z_1, z_2}$ determină două semiplane; acela față de care sensul $z_1 z_2$ este direct este format de punctele z pentru care $\widehat{z_2 z z_1}$ este în intervalul $(\pi, 2\pi)$, iar în celălalt semiplan acest unghi este cuprins în intervalul $(0, \pi)$ (vezi fig. 19). Deci semiplanele determinate de dreapta $z_1 z_2$ sînt reprezentate de inegalitățile

$$\text{Im } \frac{z_1 - z}{z_2 - z} \lesseqgtr 0, \tag{23}$$

după cum sensul $z_1 z_2$ este direct sau nu față de semiplan.

Pentru un cerc determinat de z_1, z_2, z_3, se vede că $\widehat{z_2 z z_1}$ este în intervalul $(\omega, \omega + \pi)$ cînd z este interior și în $(\omega - \pi, \omega)$ cînd z este exterior cercului. Să presupunem că z_3 se află pe arcul de cerc pe care $\widehat{z_2 z z_1} = \omega + \pi$, ceea ce, dacă $0 < \omega < \pi$, înseamnă că sensul $z_1 z_2 z_3$ pe cerc este direct față de interior. Atunci putem lua $\arg [z_1, z_2, z_3, z] = \widehat{z_2 z_3 z_1} - \widehat{z_2 z z_1}$ în intervalul $(0, \pi)$ cînd z este interior și în $(\pi, 2\pi)$ cînd z este exterior. Astfel în acest caz $\text{Im } [z_1, z_2, z_3, z] \lesseqgtr 0$ după cum z este interior sau exterior. Dacă însă sensul $z_1 z_2 z_3$ este direct față de exteriorul cercului $(\widehat{z_2 z_3 z_1} = \omega)$, vom avea $\text{Im } [z_1, z_2, z_3, z] \lesseqgtr 0$ după cum z este exterior sau interior.

Cînd $z_1z_2z_3$ sînt coliniare, sensul z_1z_2 coincide sau nu cu sensul $z_1z_2z_3$ (pe dreapta închisă cu punctul ∞) după cum z_3 este în afara sau înăuntrul segmentului z_1z_2. În primul caz, $\widehat{z_2z_3z_1} = 0$, în al doilea, $\widehat{z_2z_3z_1} = \pi$. Semiplanul față de care sensul $z_1z_2z_3$ este direct e reprezentat (cum am văzut mai sus) în primul caz prin $\pi < \widehat{z_2zz_1} < 2\pi$, iar în cazul al doilea (sensul $\overline{z_1z_2}$ indirect) prin $0 < \widehat{z_2zz_1} < \pi$. De unde deducem în ambele cazuri că arg $[z_1, z_2, z_3, z]$ poate fi luat în intervalul $(0, \pi)$, adică Im $[z_1, z_2, z_3, z] > 0$. Din contră, pentru semiplanul față de care sensul z_1, z_2, z_3, este indirect vom avea la fel Im $[z_1, z_2, z_3, z] < 0$.
Așadar:

Teorema 2. *Fiind date punctele z_1, z_2, z_3, avem*

$$\text{(24)} \qquad \text{Im } [z_1, z_2, z_3, z] \begin{cases} = 0 \text{ pe cercul } z_1z_2z_3, \\ > 0 \text{ în domeniul față de care sensul } z_1z_2z_3 \text{ e direct}, \\ < 0 \text{ în domeniul față de care sensul } z_1z_2z_3 \text{ e indirect}. \end{cases}$$

De aici urmează, observînd că o transformare liniară păstrează pe Im $[z_1, z_2, z_3, z]$, iar o transformare antiliniară îi schimbă semnul:

Teorema 3. *Transformarea liniară (antiliniară) care duce $z_1, z_2, z_3 \to w_1, w_2, w_3$ face să se corespundă acele domenii determinate de cercurile (eventual dreptele) $z_1z_2z_3$ și $w_1w_2w_3$, față de care sensurile $z_1z_2z_3$ și $w_1w_2w_3$ sînt la fel (respectiv sînt deosebite).*

Corolarul 1. *O transformare liniară au antiliniară face să corespundă la un sens pe un cerc un sens pe cercul transformat.*

Corolarul 2. *Transformările liniare (antiliniare), care reprezintă (conform) un domeniu circular pe alt domeniu circular (în particular semiplane), depind de trei parametri.*

Căci una din ele este determinată dîndu-se corespunzătoarele pe al doilea cerc a trei puncte de pe primul cerc (cu respectarea condiției relative la sensuri). Acest rezultat mai poate fi enunțat și astfel:

Corolarul 3. *Fiind date două cercuri C și C', există o transformare liniară (antiliniară) și numai una, care transformă între ele două domenii determinate de C și C', ducînd în același timp trei puncte date z_1, z, z_3 de pe C în trei puncte date, w_1, w_2, w_3 pe C', sub condiția ca sensurile $z_1z_2z_3$ și $w_1w_2w_3$ să fie la fel (respectiv deosebite) față de acele domenii.*

Exemple. 1. *Transformarea liniară care duce interiorul cercului $|z| = 1$ în exteriorul lui și totodată păstrează punctele ± 1 și duce punctul i în $-i$ este* $[1, -1, i, z] = [1, -1, -i, w]$ *sau* $w = \frac{1}{z}$. *Ea inversează sensurile pe cerc. Această transformare duce punctul ∞ și vecinătățile lui $(|z| > R)$ în punctul O și vecinătățile lui* $\left(|z| < \frac{1}{R}\right)$.

2. *Transformarea antiliniară* $\overline{w} = \frac{1}{z}$ *este inversiunea față de cercul $|z| = 1$. Ea păstrează toate punctele cercului și deci sensurile. Conform teoremei precedente, ea face să se corespundă interiorul și exteriorul cercului (în particular 0 și ∞).*

3. *Transformarea* $w = \dfrac{z - z_1}{z - z_2}$ *duce* $z_1 \to 0$ *și* $z_2 \to \infty$, *deci cercurile prin* z_1, z_2 *în dreptele prin* 0. *Cum o asemenea dreaptă poate fi reprezentată prin* $\arg w = \omega + k\pi$, *regăsim ecuația* (20) *a cercurilor prin* z_1, z_2. *Cercurile concentrice* $|w| = \text{const.}$ *sînt ortogonale dreptelor prin* 0. *Deci: fiind dat un fascicul de cercuri* (20) *există o familie de cercuri ortogonale, reprezentate de ecuația*

$$\left|\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right| = \text{const.} > 0.$$

Este un fascicul de cercuri de specia II (vezi paragraful următor).

§ 40. Puncte duble. Clasificarea transformărilor liniare

Vom interpreta variabila w tot în planul z. Astfel (17) este o corespondență între plane suprapuse.

Definiție. *Vom numi dublu un punct care este propriul său corespunzător*: $z = w$.

Punctele duble ale transformării (17) sînt date de ecuația

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0. \tag{25}$$

Această ecuație este identică dacă $c = b = d - a = 0$, adică atunci cînd (25) este transformarea identică $w = z$. Acest caz fiind exclus, transformarea liniară are două puncte duble ce se pot confunda.

Vom clasifica transformările liniare după natura punctelor duble. Împărțind (25) cu z^2 și făcînd $z \to \infty$ se vede că transformarea are un punct dublu cînd $c = 0$ și ambele puncte duble confundate în ∞ cînd $c = 0$ și $d = a$. În aceste cazuri, luînd $d = 1$ (coeficienții a, b, c, d sînt determinați pînă la un factor și $d \neq 0$ fiindcă $ad - bc \neq 0$), transformarea are forma întreagă:

$$w = az + b.$$

Vom deosebi deci: transformări liniare pentru care ∞ este punct dublu — *transformările liniare întregi* — și transformările liniare cu punctele duble la distanță finită, *transformările liniare fracționare.*

A. TRANSFORMĂRILE LINIARE ÎNTREGI

A_1. Ambele puncte duble la ∞ : $a = d = 1$,

$$w = z + b \tag{26}$$

este o *translație* de vector b.

A_2. Un singur punct dublu la ∞:

$$w = az + b \quad \text{cu } a \neq 1. \tag{27}$$

Fie z_0 celălalt punct dublu, deci $z_0 = az_0 + b$. Scăzînd aceasta din (27), ecuația transformării se scrie:

$$w - z_0 = a(z - z_0) \quad a \neq 1. \tag{27'}$$

1. Dacă a este real, cu $|a| \neq 1$, avem o *omotetie de centru* z_0 și *raport* a, căci $\arg(w - w_0) = \arg(z - z_0)$ sau $\arg(w - w_0) = \pi + \arg(z - z_0)$ după cum $a > 0$ sau $a < 0$, și $|w - w_0| = |a|\,|z - z_0|$.

2. Dacă a este complex[4] și $|a| = 1$, sau $a = -1$, avem o *rotație de centru* z_0 și *amplitudine* $\omega = \arg a$, căci $|w - w_0| = |z - z_0|$ și $\arg(w - w_0) = \arg(z - z_0) + \omega$.

3. Dacă a este complex și $|a| \neq 1$, avem o *asemănare directă generală de pol* z_0, *raport* $|a|$ *și unghiu de rotație* $\omega = \arg a$.

Cele patru cazuri precedente ne dau toate categoriile de asemănări directe.

Observația 1. O translație păstrează dreptele paralele cu vectorul ei și schimbă între ele dreptele care formează un unghi dat cu cele dintîi. O omotetie păstrează dreptele prin centru și schimbă unul în altul cercurile cu centrul în centrul de omotetie. O rotație păstrează cercurile cu centrul în centrul de rotație și schimbă între ele dreptele prin acest centru. O asemănare generală nu păstrează nici o dreaptă (reală) și nici un cerc, dar păstrează spiralele logaritmice de același pol, avînd ecuația polară

$$\rho = Ce^{m\theta},$$

sau

$$|z - z_0| = Ce^{m \arg (z - z_0)},$$

unde m este determinat prin condiția

$$|a| = e^{m \arg a} \quad \text{sau} \quad m = \frac{\log |a|}{\arg a}$$

și C arbitrar > 0.

B. TRANSFORMĂRI LINIARE FRACȚIONARE

Fie z_1, z_2 punctele duble.

B_1. $z_0 = z_1 = z_2$: Transformările liniare *parabolice.*

Să punem

$$Z = \frac{1}{z - z_0}, \quad W = \frac{1}{w - z_0}.$$

Se constată că prin eliminarea lui z, w între aceste ecuații și (17) se obține o relație liniară, evident biunivocă, între Z și W.

Dacă transformările precedente sînt T, T_1 și S transformarea dată, obținem astfel transformarea $T^{-1}ST_1$ care duce Z în W. Pentru $z = w = z_0$, avem $Z = W = \infty$, care-i singurul punct dublu al transformării liniare $Z \to W$, care este prin urmare o translație $W = Z + b$. Așadar, ecuația unei transformări parabolice de punct dublu z_0 este

$$\frac{1}{w - z_0} = \frac{1}{z - z_0} + b. \tag{28}$$

La fascicule de drepte paralele cu vectorul de translație corespund cercuri prin z_0, care nu au cîte două alt punct comun și deci formează un fascicul de cercuri tangente în z_0. La un fascicul de drepte paralele, egal înclinate

[4] Prin „complex" autorul înțelege în acest paragraf „complex cu partea imaginară diferită de zero" (P.C.).

față de vectorul translației, corespunde un fascicul de cercuri tangente în z_0, izogonale fasciculului precedent. Transformarea parabolică păstrează cercurile primului fascicul și duce unul în altul cercurile celui de-al doilea (vezi și fig. 20).

B_2. $z_1 \neq z_2$. Să punem

$$Z = \frac{z - z_1}{z - z_2}, \qquad W = \frac{w - z_1}{w - z_2}.$$

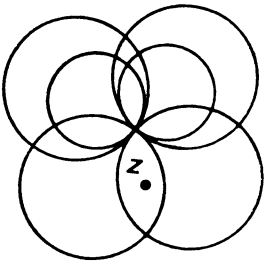

Fig. 20

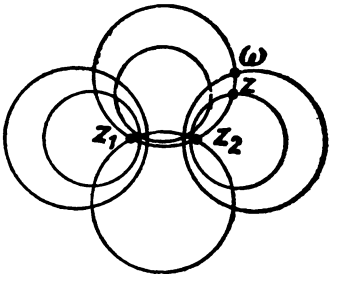

Fig. 21

Se vede din cele de mai sus că transformarea liniară $Z \to W$ are punctele duble 0 și ∞, deci este de forma (27). Transformarea dată, de puncte duble z_1, z_2, are așadar ecuația

$$\frac{w - z_1}{w - z_2} = a \frac{z - z_1}{z - z_2} \qquad (a \neq 1). \tag{29}$$

Corespunzător cazurilor A_2 avem:

1. a real, cu $|a| \neq 1$: transformarea *hiperbolică*. La dreptele prin centru și cercurile concentrice ale omotetiei $Z \to W$ corespund fasciculul de cercuri prin z_1, z_2, păstrate de transformarea hiperbolică și fasciculul ortogonal de cercuri transformate unul în altul (vezi fig. 21).

2. a complex și $|a| = 1$: transformarea *eliptică*. La cercurile concentrice și dreptele prin centrul rotației din cazul transformării $Z \to W$ corespund un fascicul de specia II de cercuri păstrate de transformarea eliptică și fasciculul ortogonal de cercuri care trec prin punctele duble și sînt schimbate unul în altul.

3. a complex și $|a| \neq 1$: transformarea *loxodromică*. Nu păstrează nici un cerc, ci niște curbe care au ca puncte asimptotice cele două puncte duble.

În cazul eliptic, $a = -1$, sînt păstrate individual ambele fascicule de cercuri de mai sus. Două cercuri din fascicule deosebite se taie într-o pereche de puncte ce se corespund (involutiv)[5]. Amintim că o transformare $w = f(z)$ se numește *involutivă* dacă transformarea inversă este tot $z = f(w)$.

[5] Cazul $a = -1$ (care dacă $z_2 = \infty$ se reduce la o simetrie în raport cu z_1) este considerat de autor ca fiind o transformare hiperbolică (respectiv o omotetie). Am preferat să considerăm cazul $a = -1$ ca fiind o transformare eliptică (respectiv o rotație de unghi π) deoarece această modificare, care este în armonie și cu punctul de vedere geometric, care stă la baza clasificării autorului (după cum se vede din observația de mai sus), este impusă de următoarele considerații analitice: Singurele transformări liniare ciclice sînt cele de tip eliptic (inclusiv $a = -1$) (vezi exercițiul 15, § 43). De asemenea, în cazul eliptic, punctele duble z_1, z_2 sînt două numere complexe imaginar conjugate cu partea imaginară diferită de zero (inclusiv în cazul $a = -1$), pe cînd în cazul hiperbolic, z_1 și z_2 sînt reale (vezi exercițiul 14, § 43)(P.C.).

Observația 2. Din (27') și (29) rezultă că biraportul

(30) $$[z_1, z_2, w, z] = a.$$

Biraportul format de punctele duble cu două puncte corespunzătoare este constant (el este egal cu unu cînd punctele duble se confundă). Reciproca este evidentă: Fiind date punctele distincte z_1, z_2, corespondența definită prin condiția (30) este o transformare liniară cu punctele duble z_1, z_2. Rezultă că a este un invariant al transformării liniare.

§ 41. Simetrii față de drepte și cercuri

Punctele duble ale unei transformări antiliniare (17) sînt date de ecuația

(31) $$cz\bar{z} - az + d\bar{z} - b = 0,$$

care nu poate fi identic zero. Egalînd cu zero partea reală și cea imaginară, obținem două cercuri (cum este vizibil din forma ecuației), nu amîndouă drepte, decît dacă $c = 0$, ale căror intersecții sînt punctele duble. Deci putem avea unul sau două puncte duble, sau ∞ puncte duble care formează un cerc C. Vom examina numai ultimul caz.

Cercul C de puncte duble este reprezentat de ecuația (31). Rezultă că acest caz are loc atunci și numai atunci cînd coeficienții a, b, c, d (definiți pînă la un factor arbitrar) pot fi luați astfel:

$$b, c \text{ reali}, \quad a + \bar{d} = 0, \quad ad - bc < 0.$$

Vom observa că transformarea păstrează cercurile ortogonale cercului C, fiindcă păstrează intersecțiile lor cu C și ortogonalitatea.

Urmează că cercurile ortogonale la C printr-un punct z trec și prin punctul corespunzător w; ele constituie un fascicul care cuprinde dreapta zw, ortogonală la C. Dacă C este o dreaptă, rezultă că w este simetricul lui z față de acea dreaptă. Dacă C este un cerc nedegenerat de centru α, două puncte corespunzătoare sînt aliniate cu α și satisfac condiția

$$\overline{\alpha z} \cdot \overline{\alpha w} = R^2,$$

R fiind raza cercului (vezi fig. 22). Transformarea este atunci *o inversiune* față de C. Așadar:

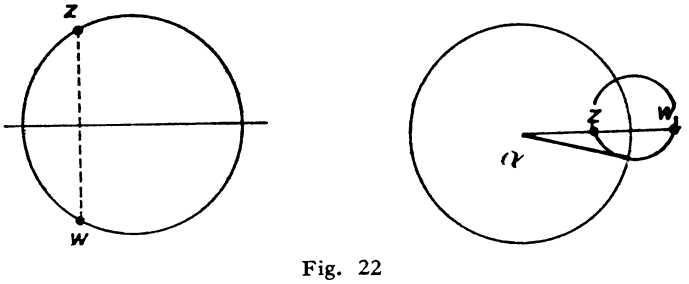

Fig. 22

Teorema 1. *Transformările antiliniare care au mai mult decît două puncte duble, și deci o infinitate, sînt simetriile față de drepte și inversiunile.*

Este obiceiul în teoria funcțiilor de variabilă complexă să se numească aceste transformări cu un cuvînt: *simetrii* (față de cercuri sau drepte). Astfel, două puncte inverse față de un cerc se vor numi și simetrice față de acel cerc.

Simetriile sînt transformări involutive.
Din cele de mai sus urmează imediat (comparînd (31) cu (17')):
Simetria în raport cu cercul

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$$

(α, γ reali; $\beta, \bar{\beta}$ conjugaţi, $\beta\bar{\beta} - \alpha\gamma > 0$) este

$$w = -\frac{\bar{\beta}z + \gamma}{\alpha z + \beta}. \tag{32}$$

Să considerăm un cerc dat prin centrul z_0 şi raza R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - R^2 = 0$$

sau

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z}_0) - R^2 = 0,$$

de unde $\alpha = 1$, $\beta = -z_0$, $\gamma = z_0\bar{z}_0 - R^2$. Simetria în raport cu acest cerc se scrie deci:

$$w = \frac{\bar{z}_0 z - z_0\bar{z}_0 + R^2}{z - z_0}$$

sau

$$w - \bar{z}_0 = \frac{R^2}{z - z_0}. \tag{33}$$

Teorema 2. *Dacă o transformare liniară sau antiliniară duce un cerc C într-un cerc C', ea duce o pereche de puncte simetrice faţă de C într-o pereche simetrică faţă de C' (sau transmută simetria faţă de C în simetria faţă de C').*

Rezultă din faptul că cercurile ce trec prin două puncte simetrice faţă de cercul C sînt ortogonale acestuia şi reciproc.

Am văzut (§ 39, exemplul 3) că cercurile care admit o pereche dată de puncte simetrice, z_1, z_2, şi care sînt ortogonale cercurilor prin z_1 şi z_2, au ecuaţia

$$\left|\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right| = \text{const.} > 0.$$

De aici urmează că există un cerc şi numai unul care admite o pereche simetrică dată z_1, z_2 şi trece printr-un punct dat $\neq z_1, z_2$. Acest punct fiind ζ, ecuaţia acelui cerc se scrie

$$\left|\frac{z_1 - z}{z_2 - z}\right| = \left|\frac{z_1 - \zeta}{z_2 - \zeta}\right| \quad \text{sau} \quad |[z_1, z_2, \zeta, z]| = 1. \tag{34}$$

De aici şi din teorema precedentă rezultă:

Teorema 3. *Există o transformare liniară şi una antiliniară bine determinate, care transformă un disc dat într-un disc dat, făcînd să se corespundă totodată două puncte date pe cele două circumferinţe şi două puncte date în acele discuri.*

Fie date perechile corespunzătoare $z_1 \to w_1$ în discuri și $\zeta \to \zeta'$ pe cercuri (vezi fig. 23). După teorema precedentă cunoaștem încă o pereche, $z_2 \to w_2$, formată din simetricele punctelor z_1, w_1 în raport cu cercurile respective.

Transformarea definită prin aceste perechi,

$$[z_1, z_2, \zeta, z] = [w_1, w_2, \zeta', w],$$

respectiv

$$[z_1, z_2, \zeta, z] = [\overline{w}_1, \overline{w}_2, \overline{\zeta'}, \overline{w}],$$

va duce primul cerc într-un cerc care coincide cu al doilea cerc dat pentru că are în comun cu acesta o pereche simetrică, și un punct al cercului. Apoi discul determinat de primul cerc, în care se află z_1, va fi dus în discul determinat de al doilea cerc, în care se află w_1 (§ 39, teorema 2).

Exemplu. $w = i\dfrac{1-z}{1+z}$ *duce interiorul cercului* $|z| = 1$ *în semiplanul superior*, pentru că duce punctele $0, \infty, 1$ în $i, -i, 0$.

Observație. Fiind date două discuri circulare și două puncte în ele, transformările liniare (antiliniare), care fac să se corespundă aceste discuri și cele două puncte, depind de un parametru.

După teorema precedentă putem dispune de acest parametru pentru a face să se corespundă și două puncte de pe cercurile frontieră ale discurilor și aceasta în mod unic.

În locul acestei condiții putem impune să se corespundă două direcții date prin punctele interioare date. Mai precis:

Teorema 4. *Există o transformare liniară și una antiliniară, unice, care fac să se corespundă două discuri și totodată două puncte din aceste discuri și două direcții orientate prin acele puncte.*

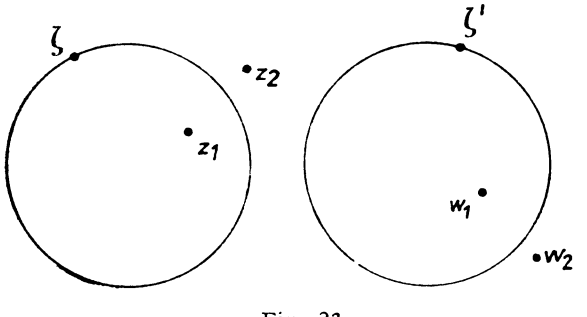

Fig. 23

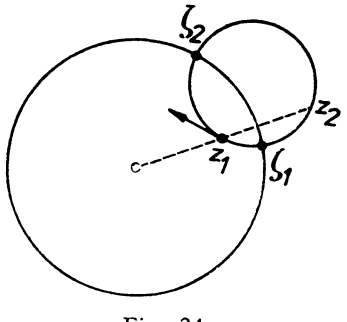

Fig. 24

Într-adevăr, fie z_1, w_1 punctele date; prin ele putem duce cîte un cerc tangent direcțiilor date și ortogonal cercului frontieră al discului respectiv (acest cerc este determinat prin condiția de a trece și prin punctul simetric celui considerat). Aceste cercuri taie cercurile frontieră în perechile de puncte ζ_1, ζ_2 și ζ_1', ζ_2' pe care le notăm astfel ca sensurile $\zeta_1 z_1 \zeta_2$ și $\zeta_1' w_1 \zeta_2'$ să concorde cu direcțiile orientate date (fig. 24). După teorema 3 există o transformare liniară (antiliniară) unică, care face să se corespundă cele două discuri și

$z_1 \to w_1$, $\zeta_1 \to \zeta_1'$. Ea va duce cercul ortogonal în ζ_1, prin z_1 în cercul ortogonal în ζ_1' prin w_1, deci direcția dată prin z_1 în cea dată prin w_1. Această transformare este evident unică (pentru că trebuie să satisfacă condițiile precedente).

§ 42. Reprezentări conforme de discuri pe discuri

Problema de a reprezenta conform un disc pe alt disc este rezolvată cu transformări liniare sau antiliniare, în teorema 3 § 39 și teoremele 3, 4 § 41, sub diverse condiții suplimentare. Vom vedea mai tîrziu că transformările liniare (antiliniare) sînt singurele care rezolvă această problemă.

Vom studia aici cîteva cazuri particulare mai importante.

I. *SEMIPLANUL* $y > 0$ *PE EL ÎNSUȘI SAU PE* $y < 0$

Transformarea liniară trebuie să dea pentru z real oarecare, w real. Pentru $z = 0, \infty, 1$, vom avea deci în (17), $\frac{b}{d}$, $\frac{a}{c}$, $\frac{a+b}{c+d}$ reali, de unde urmează că a, b, c, d sînt proporționale cu numere reale. Așadar, transformările liniare care reprezintă semiplanul $y > 0$ pe el însuși sau pe semiplanul $y < 0$ sînt de forma

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \tag{35}$$

cu coeficienți a, b, c, d reali (și $ad - bc \neq 0$) (rezultă și din ecuația transformării sub forma $[m, n, p, z] = [m', n', p', w]$ cu m, n, p, m', n', p', reali). Mai precis, aceste transformări păstrează cele două semiplane cînd $ad - bc > 0$ și le schimbă între ele cînd $ad - bc < 0$. Într-adevăr, ele induc pe axa reală transformarea

$$u = \frac{ax + b}{cx + d}$$

și din

$$\frac{du}{dx} = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2},$$

rezultă că în primul caz sensul pe axa reală este păstrat, iar în al doilea este inversat (vezi teorema 3, § 39), sau se consideră corespunzătorul lui $z = i$, $w = \frac{ai + b}{ci + d}$, pentru care $\operatorname{Im} w = \frac{ad - bc}{c^2 + d^2}$.

Printre transformările precedente să căutăm pe acele care duc un punct α într-un punct α'. În loc de a impune direct această condiție coeficienților a, b, c, d, vom aplica teorema 3 § 41. Fie m (real) corespunzătorul lui 0.

Transformarea este

$$[\alpha, \bar{\alpha}, 0, z] = [\alpha', \bar{\alpha}', m, w],$$

sau

$$\frac{\alpha(\bar{\alpha} - z)}{\bar{\alpha}(\alpha - z)} = \frac{(\alpha' - m)(\bar{\alpha}' - w)}{(\bar{\alpha}' - m)(\alpha' - w)}.$$

Să punem

$$\frac{\bar{\alpha}(\alpha' - m)}{\alpha(\bar{\alpha}' - m)} = k.$$

Avem $|k| = 1$ (k fiind raportul a două numere conjugate). Invers,

$$m = \frac{\bar{\alpha}\alpha' k - \alpha\bar{\alpha}'}{\bar{\alpha}k - \alpha}$$

este real dacă

$$(\bar{\alpha}\alpha' k - \alpha\bar{\alpha}')(\alpha\bar{k} - \bar{\alpha}) = \alpha\bar{\alpha}(\alpha' k\bar{k} + \bar{\alpha}') - (\alpha^2\bar{\alpha}'\bar{k} + \bar{\alpha}^2\alpha' k)$$

este real, deci (al doilea termen fiind real) dacă $\alpha' k\bar{k} + \bar{\alpha}'$ este real, ceea ce cere

$$\alpha' k\bar{k} + \bar{\alpha}' = \bar{\alpha}' k\bar{k} + \alpha' \text{ sau } (\alpha' - \bar{\alpha}')(k\bar{k} - 1) = 0,$$

de unde $|k| = 1$. Aşadar transformările liniare, care duc $\alpha \to \alpha'$ (α, α' complecşi) şi semiplanele determinate de axa reală în care se află aceste puncte unul într-altul, sînt

$$\frac{w - \alpha'}{w - \bar{\alpha}'} = k\frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \text{ cu } |k| = 1. \tag{36}$$

II. *SEMIPLANUL* $y > 0$ *PE DISCUL* $|w| < R$

Fie α punctul din semiplan care se transformă în $w = 0$. Atunci $\bar{\alpha}$ se transformă în $w = \infty$ (teorema 2, § 41). Deci transformarea liniară este de forma

$$w = Rk\frac{z - \alpha}{z - \bar{\alpha}} \tag{37}$$

(căci $a\alpha + b = 0$, $\bar{c}\alpha + d = 0$, în (17)). Rămîne să punem condiţia ca axa reală să fie transformată în cercul $|w| = R$:

$$\left| Rk\frac{x - \alpha}{x - \bar{\alpha}} \right| = R \qquad (x \text{ real}),$$

de unde $|k| = 1$. Deci transformările liniare care duc semiplanul $y > 0$ în domeniul circular $|w| < R$ şi punctul $z = \alpha$ (Im $\alpha > 0$) în $w = 0$ sînt (37) cu $|k| = 1$.

Să punem $k = \frac{a}{\bar{a}}$ (unde a are modulul arbitrar şi argumentul $= \frac{1}{2}$ arg k) şi $a\alpha = -\bar{b}$; dacă lăsăm la o parte condiţia suplimentară a şi b rămîn arbitrari şi ecuaţia (37) se scrie

$$w = R\frac{az + b}{\bar{a}z + \bar{b}}, \qquad a \neq 0, \quad a\bar{b} - b\bar{a} > 0. \tag{38}$$

Ea defineşte reprezentările liniare ale semiplanului $y > 0$ pe domeniul $|w| < R$.

Fie α punctul care se transformă în $w = 0$ ($|\alpha| < R$); deci simetricul său $\frac{R^2}{\bar{\alpha}}$ se transformă în $w = \infty$ (presupunem $\alpha \neq 0$). Transformarea liniară este deci de forma

$$w = h\frac{z - \alpha}{z - \frac{R^2}{\bar{\alpha}}} = h\bar{\alpha}\frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - R^2}.$$

Urmează să punem condiția ca pentru $|z| = R$ să corespundă $|w| = R$. Pentru $|z| = R$, $R^2 = z\bar{z}$ și

$$R = |w| = |h\bar{\alpha}|\left|\frac{z - \alpha}{z(\bar{\alpha} - \bar{z})}\right| = \frac{|h\bar{\alpha}|}{R}$$

(căci $\left|\frac{z - \alpha}{\bar{\alpha} - \bar{z}}\right| = 1$). Condiția este deci $|h\bar{\alpha}| = R^2$ și revine la $h\bar{\alpha} = R^2k$ cu $|k| = 1$. Ecuația reprezentării căutate este deci de forma

$$w = R^2k\frac{z - \alpha}{\bar{\alpha}z - R^2} \tag{39}$$

cu $|k| = 1$ și $|\alpha| < R$. Se vede că ea convine și în cazul $\alpha = 0$ (atunci transformarea este o rotație). Ca mai sus, o putem scrie

$$w = R^2\frac{az - b}{\bar{b}z - \bar{a}R^2}, \qquad a \neq 0, \quad \left|\frac{b}{a}\right| < R, \tag{40}$$

sau (înmulțind termenii fracției cu i)

$$w = R^2\frac{cz + d}{\bar{d}z + \bar{c}R^2} \qquad \left|\frac{d}{c}\right| < R.$$

Observație. Celelalte cazuri pot fi reduse la precedentele, transformînd domeniile date în cele considerate mai sus: Un semiplan determinat de o dreaptă paralelă cu axa reală poate fi transformat în semiplanul $y > 0$ sau $y < 0$ printr-o translație, iar orice alt semiplan printr-o rotație (în jurul punctului comun dreptei date și axei reale). Un cerc oarecare poate fi transformat într-un cerc cu centrul în origine printr-o translație.

§ 43. Proprietăți grupale ale transformărilor liniare și antiliniare

Teorema 1. *Transformările liniare constituie un grup: grupul lui Möbius.* Aceasta se poate vedea verificîndu-se proprietățile grupului.

Transformarea inversă

$$z = \frac{dw - b}{a - cw}$$

este de asemenea liniară.

Produsul a două transformări liniare este tot o transformare liniară. Considerăm transformarea:

$$W = \frac{a'w + b'}{c'w + d'}. \tag{41}$$

Ca să obținem produsul, eliminăm pe w între (17) și (41) și obținem o transformare liniară de aceeași formă

$$W = \frac{a''z + b''}{c''z + d''}.$$

Transformarea unitate este $w = z$, iar asociativitatea este evident verificată.

Teorema 2. *Transformările liniare și antiliniare formează un grup, care are ca subgrup grupul lui Möbius.*

Asociativitatea este verificată. Transformarea unitate este $w = z$. Inversa transformării antiliniare (17′) este

$$\bar{z} = \frac{\bar{d}w - \bar{b}}{-\bar{c}w + \bar{a}},$$

adică tot o transformare antiliniară.

Produsul a două transformări liniare este o transformare liniară, iar produsul dintre o transformare antiliniară și una liniară (sau una liniară și una antiliniară) este o transformare antiliniară.

Exerciții

1. *Biraportul a patru puncte de pe un cerc nedegenerat este egal cu biraportul dreptelor ce proiectează acele puncte dintr-un punct oarecare al cercului.*

R. Prin inversiune cu centrul în ultimul punct, cercul se transformă într-o dreaptă, iar cele patru puncte în proiecțiile lor pe această dreaptă. Biraportul fiind real se păstrează în inversiune.

O rotație aduce dreapta pe axa reală, unde biraportul are aceeași expresie cu biraportul din geometria proiectivă, și deci este egal cu biraportul dreptelor proiectante (rotite și ele).

2. *Pentru ca două perechi de puncte, z_1, z_2 și z_3, z_4, de pe un cerc (nedegenerat) să fie armonice (adică $[z_1, z_2, z_3, z_4] = -1$) este necesar și suficient ca dreptele z_1z_2 și z_3z_4 să fie conjugate față de cerc (adică una din ele să treacă prin polul celeilalte).*

R. Dreapta $\overline{z_3z_4}$ intersectează tangenta în z_1 și dreapta $\overline{z_1z_2}$ în puncte ζ, ζ' armonice cu z_3, z_4 (exercițiul 1), deci ζ este polul dreptei $\overline{z_1z_2}$; și reciproc.

3. *Pentru ca două perechi de puncte, z_1, z_2 și z_3, z_4, de pe un cerc să se separe (z_3, z_4 în arce deosebite față de z_1, z_2 sau vice-versa) este necesar și suficient ca $[z_1, z_2, z_3, z_4] < 0$.*

R. Dacă z_3, z_4 separă z_1, z_2, $\arg \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$ și $\arg \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$ diferă prin $(2k + 1)\pi$, în cazul contrar prin $2k\pi$.

4. *Centrul și raza cercului* $\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$ $(\alpha \neq 0)$.

R. Centrul: $-\frac{\beta}{\alpha}$; raza: $R = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\beta\bar{\beta} - \alpha\gamma}$.

5. *Condiția pentru ca cercurile*

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0,\ \alpha' z\bar{z} + \bar{\beta}'z + \beta'\bar{z} + \gamma' = 0$$

să fie ortogonale.

6. *Condiția necesară și suficientă pentru ca triunghiurile* $\alpha_1\beta_1\gamma_1$ *și* $\alpha_2\beta_2\gamma_2$ *să fie asemenea este*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & 1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

R. Condiția este să existe o asemănare $z_2 = az_1 + b$ care să ducă $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ în $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$:

$$\alpha_2 = a\alpha_1 + b, \quad \beta_2 = a\beta_1 + b, \quad \gamma_2 = a\gamma_1 + b;$$

condiția de compatibilitate a acestor ecuații este cea de mai sus.

7. *Să se găsească condiția necesară și suficientă pentru ca triunghiul* $\alpha\beta\gamma$ *să fie echilateral.*

R. După exercițiul 6, ea este

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 & 1 \\ \beta & \omega & 1 \\ \gamma & \omega^2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ω fiind o rădăcină cubică imaginară a unității, sau $\omega\alpha + \omega^2\beta + \gamma = 0$. De unde $\omega\alpha - (1 + \omega)\beta + \gamma$, și deci

$$\omega = \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \beta}, \quad (\beta - \gamma)^3 - (\alpha - \beta)^3 = 0$$

sau (cum $\beta - \gamma = \alpha - \beta$, înseamnă că β este mijlocul lui $\alpha\gamma$)

$$(\beta - \gamma)^2 + (\beta - \gamma)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2 = 0,$$

adică

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \beta\gamma + \gamma\alpha + \alpha\beta$$

(și reciproc).

8. *Dacă*

$$(\alpha - \beta)(\alpha' - \beta') = (\beta - \gamma)(\beta' - \gamma') = (\gamma - \alpha)(\gamma' - \alpha'),$$

triunghiurile $\alpha\beta\gamma$ *și* $\alpha'\beta'\gamma'$ *sînt echilaterale.*

R. Din $\frac{\alpha - \beta}{\beta - \gamma} = \frac{\beta' - \gamma'}{\alpha' - \beta'}$ etc. se deduce că triunghiurile sînt asemenea, deci $|\alpha' - \beta'| = k|\alpha - \beta|$ etc. și urmează $|\alpha - \beta|^2 = |\beta - \gamma|^2 = |\gamma - \alpha|^2$.

9. *Să se demonstreze teorema lui Ptolemeu: Dacă* $O\alpha\beta\gamma$ *este un patrulater convex, inscriptibil într-un cerc, avem* $\overline{O\alpha} \cdot \overline{\beta\gamma} + \overline{O\gamma} \cdot \overline{\beta\alpha} = \overline{O\beta} \cdot \overline{\alpha\gamma}$.

R. Revine la $|\alpha||\beta - \gamma| + |\gamma||\beta - \alpha| = |\beta||\gamma - \alpha|$, care rezultă din relația (vezi exercițiul 3):

$$\arg[\gamma, \alpha, 0, \beta] = \arg\frac{\gamma}{\alpha} - \arg\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta} = (2k + 1)\pi \text{ sau } \arg\alpha(\gamma - \beta) = \arg\gamma(\alpha - \beta) + (2k + 1)\pi.$$

(Cum punctele $\alpha(\gamma - \beta)$ și $\gamma(\alpha - \beta)$ sînt coliniare cu O și de părți deosebite față de O, modulul diferenței $\alpha(\gamma - \beta) - \gamma(\alpha - \beta) = \beta(\gamma - \alpha)$ este egal cu suma modulilor.)

10. *Să se reprezinte conform semiplanul* Im $z > 0$ *pe discul* $|w| < 1$, *astfel ca punctele* $w = -1, i, -i$ *să corespundă, respectiv, punctelor* $z = 0, -1, 1$.

R. Reprezentarea este dată de $[-1, i, -i, w] = [0, -1, 1, z]$ sau $w = \frac{z - i}{z + i}$. Ea face să se corespundă cele două domenii pentru că sensurile $-1, i, -i$ și $0, -1, 1$ sînt indirecte față de domenii.

11. *Transformările liniare care păstrează cercul* $|z| < 1$ *și punctele* $z = \pm 1$.

R. Transformarea este de forma $\frac{w-1}{w+1} = a\frac{z-1}{z+1}$, unde $\arg a = k\pi$ (deoarece cercul este reprezentat de $\arg\frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{2} + k'\pi$). Urmează: $w = \frac{cz-1}{c-z}$, cu c real, finit ($c = \frac{a+1}{a-1}$). Sau se pun în ecuațiile (39) condițiile pentru punctele duble ± 1).

12. *Să se dea condiția ca transformarea* $w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ *să fie hiperbolică sau eliptică și să se exprime biraportul invariant* a.

R. Fie z_1, z_2 punctele duble, rădăcini ale ecuației $\gamma z^2 + (\delta - \alpha)z - \beta = 0$; biraportul fiind $a = [z_1, z_2, z, w] = \frac{(z_1 - z)(z_2 - w)}{(z_1 - w)(z_2 - z)}$, formăm

$$\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2 = \left[\frac{2z_1z_2 + 2zw - (z_1 + z_2)(w + z)}{(z_1 - z_2)(w - z)}\right]^2 =$$

$$= \left[\frac{2\gamma zw - 2\beta + (\delta - \alpha)(w + z)}{(w - z)\sqrt{(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma}}\right]^2$$

sau, înlocuind pe $2\gamma zw - 2\beta$ din ecuația transformării:

$$\left(\frac{1+a}{1-a}\right)^2 = \frac{(\alpha + \delta)^2}{(\delta - \alpha)^2 + 4\beta\gamma} = \frac{I^2}{\Delta},$$

formulă care determină pe a (sau $\frac{1}{a}$). Transformarea este hiperbolică dacă $\Delta\gamma \neq 0$ și $\frac{I^2}{\Delta} > 0$; eliptică dacă $\Delta\gamma \neq 0$ și $\frac{I^2}{\Delta} \leqslant 0$; loxodromică dacă $\Delta\gamma \neq 0$ și $\frac{I^2}{\Delta}$ este complex. Transformarea este involutivă cînd $I = 0$. I și Δ sînt invarianți relativi, legați cu $D = \alpha\delta - \beta\gamma$ prin relația

$$I^2 - \Delta = 4D.$$

Mai putem scrie

$$\frac{a}{(1-a)^2} = \frac{D}{\Delta}, \quad \frac{(1+a)^2}{a} = \frac{I^2}{D}.$$

Se calculează direct mai repede

$$a + \frac{1}{a} = \frac{I^2}{D} - 2.$$

13. *Dacă o transformare liniară păstrează o dreaptă sau un cerc dat, punctele ei duble sînt pe aceasta sau simetrice în raport cu cercul; transformarea păstrează atunci o infinitate de drepte sau cercuri, care formează un fascicul sau două fascicule atunci cînd ea este involutivă. Clasificarea transformărilor de acest fel.*

14. *Să se clasifice transformările* $w = \frac{az + b}{cz + d}$ *cu* a, b, c, d *reali și* $ad - bc = 1$ *(adică transformările care păstrează semiplanul superior).*

R. (I) $c = 0$: translația în lungul axei reale cînd $|a| = 1$, omotetie cu centrul pe axa reală și raport pozitiv cînd $|a| \neq 1$. (II) $c \neq 0$: (vezi exercițiul 12) transformare hiperbolică dacă $|a + d| > 2$, cu punctele duble reale; transformare eliptică dacă $|a + d| < 2$, cu punctele duble conjugate; transformare parabolică dacă $|a + d| = 2$, cu punctul dublu real și constantă reală.

15. *Să se determine transformările liniare ciclice* ($T^n = 1$).

R. Ele sînt de tip eliptic (cele de tip hiperbolic, loxodromic sau parabolic nu pot fi ciclice, cum se vede din ecuațiile canonice) și reductibile la una din formele

$$w = \omega z + b, \text{ sau } \frac{w - z_1}{w - z_2} = \omega \frac{z - z_1}{z - z_2},$$

cu ω rădăcina primitivă a unității, de indice $n > 1$.

16. *$w = f(z)$ fiind o transformare liniară neidentică se consideră punctele $z_0, z_1 = f(z_0), z_2 = f(z_1)$ ... (iteratele lui z_0). Să se arate că în cazul cînd transformarea păstrează un semiplan sau interiorul unui cerc, aceste puncte sînt pe același cerc (dreaptă). În ce caz ele converg către un punct?*

R. Transformarea dată fiind S, iteratele se obțin aplicînd lui z_0 transformările S^n (n întreg $\geqslant 0$). Dacă z_0 este punct dublu, ele se confundă cu acesta, caz pe care îl excludem. Cu ajutorul unei transformări liniare putem transforma pe S într-o asemănare. În cazul considerat aceasta va fi o rotație, translație sau omoteție și iteratele sînt evident pe un cerc cu centrul în centrul de rotație, pe o dreaptă paralelă cu direcția translației sau pe o dreaptă prin centrul de omotetie; această proprietate o au transformările de tip hiperbolic, eliptic sau parabolic. Se vede de asemenea că în cazurile hiperbolic, loxodromic și parabolic, dacă S nu este ciclică, iteratele converg către un punct dublu (punct atractiv) îndepărtîndu-se de celălalt (punct repulsiv); o transformare ciclică are un număr finit de iterate; o transformare eliptică neciclică nu are puncte de convergență.

17. *O asemănare directă generală păstrează ∞^1 spirale logaritmice avînd același pol.*

R. Putem considera asemănarea $z' = az$, unde $a = \rho(\cos\alpha + i \sin\alpha)$. O spirală logaritmică $r = k e^{m\theta}$ va fi păstrată de asemănare dacă pentru orice θ, $r\rho = ke^{m(\theta+\alpha)}$ este o consecință a relației $r = k e^{m\theta}$. Aceasta are loc dacă $\rho = e^{m\alpha}$ sau $m = \frac{1}{\alpha} \log \rho$.

Funcții elementare

Sînt numite astfel funcțiile z^n (n întreg), e^z, funcțiile circulare cos z, sin z, funcțiile hiperbolice ch z, sh z, inversele acestor funcții, $\sqrt[n]{z}$, log z, arc cos z, arc sin z, arg ch z, arg sh z, precum și funcțiile formate din acestea prin operații aritmetice în număr finit (ajunge să considerăm z^n, $\sqrt[n]{z}$, e^z, log z). Vom studia funcțiile elementare mai ales din punctele de vedere ale olomorfiei, univalenței și multiformității, și al reprezentărilor conforme ce efectuează.

§ 44. Funcțiile z^n (n întreg), $\sqrt[n]{z}$ (n întreg > 1). Polinoame și funcții raționale

Am observat că z^n pentru n întreg > 0 este olomorfă în tot planul complex, avînd derivata nz^{n-1}. Pentru $z \to \infty$ $z^n \to \infty$ (pentru că $|z^n| \to \infty$), iar $\frac{1}{z^n} \to 0$. Putem atribui funcției valoarea ∞ pentru $z = \infty$, făcînd-o astfel continuă în acest punct în sens larg. Ea însă nu este monogenă în $z = \infty$ (pentru că nu este finită). Pentru că funcția tinde la ∞ în $z = \infty$ se zice că acest punct este un *pol*, anume de ordinul n.

În general orice polinom de gradul n,

$$P(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0),$$

este o funcție olomorfă în tot planul, afară de $z = \infty$, unde are un pol de ordinul n. Aceasta se vede scriind

$$P(z) = z^n \left(a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n} \right),$$

ceea ce arată că în $z = \infty$, $P(z) \to \infty$ ca z^n.

Mai general, să considerăm o funcție rațională

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + \ldots + a_n}{b_0 z^p + \ldots + b_p} \qquad (a_0 \neq 0,\ b_0 \neq 0),$$

unde presupunem că $P(z)$ și $Q(z)$ nu au factori comuni. Funcția este olomorfă în toate punctele care nu anulează pe $Q(z)$. În aceste puncte ea nu este definită prin expresia precedentă, dar tinde la ∞ și îi vom atribui această valoare. Dacă, de exemplu, α este un zero de ordinul μ al lui $Q(z)$, adică

$$Q(z) = (z - \alpha)^\mu Q_1(z) \quad \text{și} \quad Q_1(\alpha) \neq 0,$$

atunci funcția tinde la ∞ ca $(z - \alpha)^{-\mu}$, deci ca $z^{-\mu}$, și α este un pol de ordinul μ. Funcția are limită și în $z = \infty$. Anume, scriind

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = z^{n-p} \frac{a_0 + \frac{a_1}{z} + \cdots + \frac{a_n}{z^n}}{b_0 + \frac{b_1}{z} + \cdots + \frac{b_p}{z^p}},$$

se vede că limita este ∞ cînd $n > p$ (de ordinul $n - p$), $\frac{a_0}{b_0}$ cînd $n = p$ și 0 cînd $n < p$ (zero de ordinul $p - n$). Și în acest punct se ia limita ca valoare a funcției. În cazurile $n \leqslant p$ funcția este olomorfă în ∞ pentru că

$$\frac{P\left(\frac{1}{z}\right)}{Q\left(\frac{1}{z}\right)} = z^{p-n} \frac{a_0 + a_1 z + \ldots a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots b_p z^p}$$

este olomorfă în $z = 0$ (vezi § 34, exemplul 9). De exemplu, $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$ $(n > 0)$ este olomorfă în tot planul lui Gauss afară de $z = 0$, unde are un pol de ordinul n.

Să considerăm funcția $z^n = w$ și inversa ei, $z = \sqrt[n]{w}$ (n întreg > 1). În coordonate polare (vezi și fig. 25) avem pentru două valori corespunzătoare

$$\rho = r^n, \quad \omega = n\theta - 2k\pi,$$

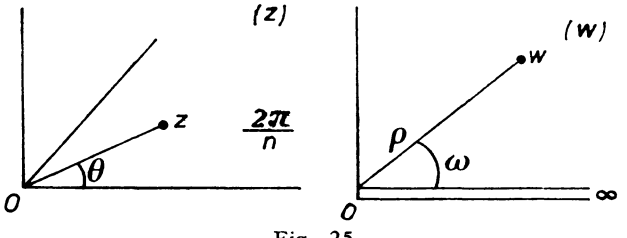

Fig. 25

de unde

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \theta = \frac{\omega + 2k\pi}{n} \qquad (k = 0, 1, \ldots, n - 1).$$

Din aceste formule se vede că funcţia z^n ia o valoare dată în punctele $z_1, \ldots, z_n$ (formînd un poligon regulat cu centrul în O), confundate numai pentru $w = 0$ şi $w = \infty$:

$$(42) \qquad z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\omega + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\omega + 2k\pi}{n}\right) \quad (k=0, \ldots, n-1).$$

Argumentele (reduse) ale acestor puncte diferind între ele prin multipli de $\frac{2\pi}{n}$, rezultă că un sector de centru O şi deschidere $\frac{2\pi}{n}$, $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \frac{2\pi}{n}$, este un domeniu de univalenţă al funcţiei z^n; în timp ce un sector de deschidere mai mare nu poate fi domeniu de univalenţă. Funcţia va fi deci univalentă într-un domeniu dat numai dacă acesta poate fi cuprins într-un sector de centru O şi deschidere $\frac{2\pi}{n}$.

Un asemenea sector este reprezentat conform şi biunivoc prin $w = z^n$, pe planul (w) minus semidreapta $w = n\theta_0$ care conţine valorile funcţiei pe laturile sectorului (egale cîte două). Se zice că semidreapta este o *tăietură* în planul (w).

Să considerăm acum funcţia inversă, $\sqrt[n]{w}$. Pentru w dat, ea are n valori (42). La cele n sectoare de univalenţă în care este împărţit planul (z) prin semidreptele $\theta = \theta_0$, $\theta_0 + \frac{2\pi}{n}$, ..., $\theta_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}$ corespund n funcţii inverse olomorfe în planul (w) tăiat după semidreapta $\omega = n\theta_0$ (§ 36, teorema 2). Aceste n funcţii olomorfe sînt date de (42), cu $n\theta_0 < \omega < n\theta_0 + 2\pi$. Ele constituie împreună funcţia multiformă $\sqrt[n]{w}$, cu excepţia valorilor ei în punctele tăieturii $\omega = n\theta_0$ (care de altfel poate fi o semidreaptă oarecare unind O cu ∞ în planul (w)). Vom zice că cele n_n funcţii olomorfe sînt *ramurile* sau *determinările* funcţiei $\sqrt[n]{w}$ în domeniul format de planul (w) minus tăietura făcută.

Vom zice, de asemenea, că determinările funcţei $\sqrt[n]{w}$ sînt *separate* în acest domeniu. Ele sînt separate (constituie n funcţii olomorfe) şi în orice domeniu care poate fi cuprins într-un domeniu de felul considerat. De exemplu, într-un cerc care nu conţine originea (sau într-o vecinătate destul de mică a unui punct $\neq 0, \infty$).

Din contră, într-o vecinătate oarecare a punctelor 0 şi ∞ separarea determinărilor este imposibilă. Căci ω putînd varia oricum, dacă w descrie un circuit (curbă închisă simplă) în acea vecinătate, în jurul lui $w = 0$, plecînd cu o determinare z_k a funcţiei, vom obţine la întoarcerea în punctul de plecare, prin continuitate, determinarea z_{k+1} (ω a crescut cu 2π). Or, dacă determinarea iniţială ar face parte dintr-o funcţie olomorfă (deci uniformă şi continuă) în vecinătatea considerată, ar fi trebuit să obţinem aceeaşi determinare finală (cum se întîmplă într-o vecinătate excluzînd originea a unui punct $\neq 0, \infty$). Un punct în vecinătatea căruia determinările unei funcţii multiforme nu pot fi separate se numeşte *punct critic* al funcţiei. În cazul de faţă avem n determinări legate prin continuitate între ele (permutîndu-se ciclic atunci cînd punctul ω înconjoară originea). De aceea se zice că 0 şi ∞ sînt *puncte critice algebrice*, de ordinul n, ale funcţiei $\sqrt[n]{w}$, sau că în aceste puncte (adică de fapt în vecinătatea lor) funcţia are cicluri de ordinul n.

Pentru aceleași motive funcția $\frac{1}{\sqrt[n]{w}}$ are punctele critice 0 și ∞, algebrice de ordinul n.

Un punct critic algebric se numește *punct critic polar* cînd limita funcției în acel punct este ∞. Astfel, $w = \infty$ este punct critic polar pentru $\sqrt[n]{w}$, iar $w = 0$ de asemenea pentru $\frac{1}{\sqrt[n]{w}}$.

Dacă $f(z)$ este o funcție olomorfă într-un domeniu D, și $w = f(z)$ descrie domeniul E, $\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{f(z)}$ este o funcție în general cu n valori în D. Aceasta se întîmplă cu siguranță cînd $f(z)$ este univalentă în D (corespondența $z \to w$ este biunivocă). În particular, acesta este cazul într-o vecinătate destul de mică a unui punct unde $f(z)$ este olomorf și $f'(z) \neq 0$ (vezi § 35, teorema 2).

În aceste condiții, punctele unde $f(z) = 0$ sînt puncte critice algebrice pentru funcția $\sqrt[n]{f(z)}$. Vom vedea mai tîrziu că, dacă α este un zero al funcției olomorfe $f(z)$, putem scrie $f(z) = (z - \alpha)^{\mu} f_1(z)$, unde $f_1(z)$ este de asemenea olomorfă în α și $f_1(\alpha) \neq 0$. Aceasta ne este de altfel cunoscut din algebră în cazul cînd $f(z)$ este un polinom. μ se numește *multiplicitatea* lui α ca zero al lui $f(z)$. Avem acum $\sqrt[n]{f(z)} = \sqrt[n]{(z-\alpha)^{\mu}}\,\sqrt[n]{f_1(z)}$, unde al doilea factor este olomorf în α. Cînd μ este un multiplu de n, $\mu = kn$, primul factor este $= (z - \alpha)^k$ și funcția este olomorfă în α. Cînd cel mai mic divizor comun $(\mu, n) = h < n$, se vede că primul factor are $\frac{n}{h}$ determinări care se permută ciclic în jurul punctului α. Funcția $\sqrt[n]{f(z)}$ are deci în α un punct critic de ordinul $\frac{n}{h}$. El este de ordin n cînd $f'(\alpha) \neq 0$ ($\mu = 1$).

Exemple. 1. $\sqrt{z^2+1}$ *are două puncte critice,* $z = \pm i$, *în jurul cărora se permută cele două determinări ale funcției. Punctul* $z = \infty$ *nu este critic, pentru că un circuit într-o vecinătate de rază* > 1, *readuce determinarea inițială; acest punct este însă un pol de ordinul* 1.

2. $\cos \sqrt{z}$ *nu are puncte critice (este uniformă).*

§ 45. Funcția e^z (exponențială)

Pentru a construi în domeniul complex o funcție $f(z)$ care să fie analoagă cu funcția e^x din domeniul real, vom impune acelei funcții următoarele condiții pe care e^x le satisface:

1°. $f(z)$ monogenă în tot planul complex (afară de ∞);

2°. $f(z)\, f(z') = f(z + z')$ pentru orice $z, z' \neq \infty$;

3°. $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$;

4°. $f(x) = e^x$ pentru x real.

Condiția 4° este dealtfel în esență o consecință a celorlalte. După 1°, 3°, 2°, $f(x)$ este o funcție reală continuă, care satisface ecuația funcțională $f(x)\, f(x') = f(x + x')$; se demonstrează că o asemenea funcție nu poate fi decît e^{ax} (a real). Astfel, 4° poate fi înlocuită, de exemplu, prin $f(1) = e$. Pe de altă parte se va vedea mai tîrziu (principiul de simetrie al lui Schwarz) că din 1° și 4° urmează 3°.

Avem, aplicînd pe rînd 3°, 2°, 4°,

$$|f(z)| = \sqrt{f(z)\overline{f(z)}} = \sqrt{f(z)f(\bar{z})} = \sqrt{f(2x)} = e^x.$$

Astfel,

$$f(z) = e^x(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{43}$$

După 1° sînt satisfăcute condiţiile lui Cauchy ($u = e^x\cos\varphi$, $v = e^x\sin\varphi$):

$$\begin{cases} e^x(\cos\varphi - \sin\varphi\varphi_x) = e^x\cos\varphi\varphi_y, \\ e^x(\sin\varphi + \cos\varphi\varphi_x) = e^x\sin\varphi\varphi_y, \end{cases} \tag{44}$$

de unde

$$1 - \varphi_y = 0, \quad \varphi_x = 0,$$

deci

$$\varphi = y + C.$$

Pentru $y = 0$, (43) ne dă, ţinînd seamă de 4°,

$$e^x = e^x(\cos C + i\sin C),$$

de unde $C = 2k\pi$. Astfel, funcţia căutată trebuie să fie

$$f(z) = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Definiţie. $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$.

Ceea ce se mai scrie

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}, \arg e^z = \operatorname{Im} z + 2k\pi. \tag{45}$$

Vom verifica mai întîi că funcţia astfel definită posedă proprietăţile cerute.

1°. e^z *este olomorfă în tot planul afară de* ∞, deoarece funcţiile $u(x, y)$ şi $v(x, y)$ au derivatele u_x, u_y, v_x, v_y continue, care verifică condiţiile lui Cauchy (44) (se aplică teorema 2, § 33 şi teorema 2, § 34). Derivata este $\dfrac{de^z}{dz} = \dfrac{de^z}{dx} = e^z$.

$e^{f(z)}$ este olomorfă în punctele unde $f(z)$ este.

2°. $e^z e^{z'} = e^{z+z'}$.

Rezultă imediat din (45).

3°. $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$.

Se vede din definiţie schimbînd y în $-y$.

4°. *Pentru* $y = 0$, e^z *devine funcţia reală* e^x.

Alte proprietăţi:

5°. $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$.

Urmează din 2°, luînd $z' = -z$ $\quad (e^0 = 1)$.

6°. $e^z \neq 0$ *pentru orice* z.

Rezultă din $e^z e^{-z} = 1$, sau din $|e^z| = e^x$.

7°. e^z *ia toate valorile complexe afară de* 0, ∞. Căci modulul e^z poate lua toate valorile pozitive finite și argumentul y toate valorile reale.

e^z *nu este definit pentru* $z = \infty$.

8°. e^z *are perioada* $2\pi i$, *precum și toți multiplii* $2k\pi i$ (k *întreg*), *și nu mai are alte perioade.* $\left(e^{\alpha z}\right.$ are perioada $\left.\frac{2\pi i}{\alpha}.\right)$

Într-adevăr,

$$e^{z+2k\pi i} = e^{x+i(y+2k\pi)} = e^x(\cos(y + 2k\pi) + i \sin(y + 2k\pi))$$

sau

$$e^{z+2k\pi i} = e^z.$$

Pe de altă parte

$$e^z = e^{z'} \quad \text{atrage} \quad z' = z + 2k\pi i,$$

căci atrage $e^{x'} = e^x$ deci $x' = x$ și $y' = y + 2k\pi$ după (45).

În particular (deoarece $e^0 = 1$),

$$e^{2k\pi i} = 1;$$

reciproc, ecuația $e^z = 1$ are soluțiile $z = 2k\pi i$.

9°. *Urmează că funcția* e^z *ia toate valorile* $\neq 0$, ∞ *o singură dată, într-o bandă limitată de două paralele la axa reală, de lărgime* 2π, *și completată cu una din marginile ei.* O asemenea bandă (și orice domeniu ce poate fi acoperit de o asemenea bandă) este cu alte cuvinte un *domeniu de convergență* (vezi fig. 26). Banda cu margine este deci reprezentată conform și biunivoc prin $w = e^z$, pe planul (w) minus punctele O și ∞ $\left(\text{deoarece } \frac{de^z}{dz} = e^z \neq 0\right)$. Planul ($z$) poate fi împărțit în ∞ benzi cu aceiași proprietate, fiecare conținînd cîte unul din punctele $z + 2k\pi i$ în care e^z are o aceeași valoare.

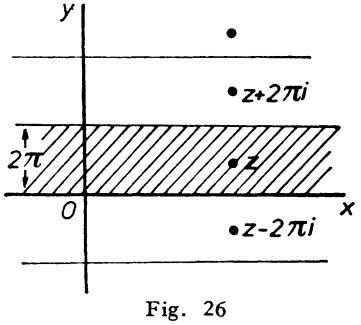

Fig. 26

10°. e^z *nu are limită în* $z = \infty$. Pentru că orice V_∞ conține benzi de univalență, adică funcția ia în orice V_∞ toate valorile (afară de 0, ∞). De aceea se zice că $z = \infty$ este un punct singular esențial al funcției e^z.

11°. *Pentru* $x = 0$ *avem din definiție*

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y, \qquad (46)$$
$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

de unde formulele lui Euler:

$$\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \quad \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \qquad (46')$$

12° *Putem scrie un număr complex*

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

Astfel: $1 = e^{2k\pi i} = e^0$, $-1 = e^{\pi i}$, $i = e^{\frac{\pi}{2}i}$ etc. Un număr de modul 1 este de forma $e^{i\theta}$.

§ 46. Funcția log z.

Definiție. *Definim funcția* $w = \log z$ *ca inversă a funcției exponențiale:* $z = e^w$. *Deci*

$$e^{\log z} = z$$

1°. *Deoarece* $e^w \neq 0, \infty$, $\log z$ *nu e definit pentru* $z = 0, \infty$.

2°. *Punînd* $w = u + iv$, *avem*

$$|z| = |e^w| = e^u, \quad \arg e^w = \arg z = v, \tag{45'}$$

deci

$$w = \log z = \log|z| + i\arg z, \tag{46}$$

($\log|z|$ *este aici logaritm aritmetic*).

3°. *Deoarece* $\arg z$ *este determinat pînă la un multiplu de* 2π, $\log z$ *este o funcție multiformă cu o infinitate numărabilă de valori. Una din ele fiind* $(\log z)_0$, *avem*

$$\log z = (\log z)_0 + 2k\pi i. \tag{47}$$

Pe axa reală una din valori este reală pentru $z = x > 0$. *Numerele* <0 *au logaritmi imaginari.*

4°. *Am văzut că planul* (w) *poate fi împărțit în benzi de univalență a funcției* e^w, *paralele cu axa Ou și de lărgime* 2π. *O astfel de bandă, de exemplu*

$$2k\pi < v < 2(k+1)\pi,$$

este în corespondență biunivocă cu planul (z) *minus semiaxa reală (inclusiv punctele* 0 *și* ∞); *punctele* $\neq 0$, ∞ *ale acestei semiaxe corespund punctelor de pe marginile benzii* $v = 2k\pi$ *și* $v = 2(k+1)\pi$ — *cum se vede din* (45'). Astfel e^w fiind considerată într-o bandă, are ca inversă o funcție olomorfă în planul (z) tăiat după semiaxa pozitivă, funcție care este o determinare a funcției multiforme $\log z$ (teorema 2 §35) (rezultă și din faptul că $\ln|z|$ și $\arg z$ sînt funcții armonice conjugate).

Dealtfel tăietura poate fi făcută de-a lungul oricărei semidrepte de origine O: Dacă deplasăm benzile precedente, adică considerăm benzile

$$\theta_0 + 2k\pi < v < \theta_0 + 2(k+1)\pi,$$

marginile lor vor corespunde semidreptei $\arg z = \theta_0$. Așadar:

Determinările funcției $\log z$ sînt separate în planul (z) tăiat după o semidreaptă de origine O. Ele constituie în acest domeniu o infinitate de funcții olomorfe, care diferă între ele prin multipli de $2\pi i$ (după (45)) și care formează împreună funcția multiformă $\log z$, cu excepția valorilor luate pe

tăietură. De asemenea, determinările funcției log z pot fi separate în orice domeniu care lasă în afara lui o semidreaptă de origine O; de exemplu un cerc care nu conține punctul O. Mai tîrziu se va demonstra riguros (vezi prelungirea analitică, teorema monodromiei) că aceeași proprietate o are orice domeniu simplu conex care nu conține punctele 0 și ∞.

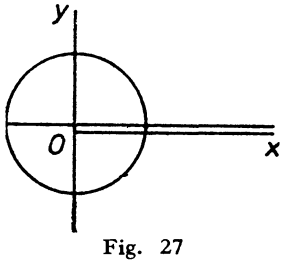

Fig. 27

În planul tăiat arg z nu poate varia continuu decît într-un interval de amplitudine $< 2\pi$ (vezi fig. 27). O determinare va fi reprezentată de

$$w_k = \log |z| + i\theta$$

cu

$$\theta_0 + 2k\pi < \theta < \theta_0 + 2(k+1)\pi.$$

Să mai observăm că determinările lui log z nu pot fi separate în întregul plan (minus, bineînțeles, punctele 0 și ∞ unde funcția nu este definită). Cu alte cuvinte nu există o funcție olomorfă în (z) care să ia în toate punctele (afară de 0 și ∞) valori ale lui log z (tocmai acesta este motivul pentru care determinările lui log z constitue o singură funcție multiformă). Căci funcția fiind continuă pe un cerc de centru 0, partea imaginară a ei este o funcție continuă de unghiul θ, deci ea este $\theta + 2k\pi$ unde k nu poate varia; cînd θ crește cu 2π (adică cercul a fost descris în sens direct) $\theta + 2k\pi$ ar trebui să revie la valoarea inițială (funcția presupusă olomorfă fiind uniformă), ceea ce este absurd.

5°. *Același raționament se aplică și în interiorul unui cerc dat de centru O. Deci determinările lui* log z ***nu pot fi separate în nici o vecinătate a punctului*** 0 *sau a punctului* ∞. Pentru acest motiv se zice că acestea sînt *puncte critice logaritmice* ale funcției logaritmice pentru că funcția are o infinitate de determinări legate între ele prin continuitate în vecinătatea considerată.

Anume, dacă plecăm dintr-un punct z_0 cu o valoare $w_k = (\log z)_k$ și descriem un cerc (sau o curbă simplă închisă) în jurul lui O, ne întoarcem cu valoarea w_{k+1} sau w_{k-1} după cum am parcurs circuitul în sensul pozitiv sau cel negativ.

6°. *Derivata uneia din determinările olomorfe în vecinătatea unui punct* $z \neq 0$, *este* (teorema 2, § 35):

$$\frac{d \log z}{dz} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}. \tag{48}$$

Ea este astfel independentă de determinarea considerată.

7°. *Pentru* $z \to 0$ *sau* $z \to \infty$, log $z \to \infty$. *Căci din* (46) $|\log z| \geqslant |\log |z|| \to \infty$.

8°.

$$\log z + \log z' = \log (zz') \tag{49}$$

dacă se ia o determinare convenabilă a logaritmului din membrul al doilea.

Căci din $e^w = z$ și $e^{w'} = z'$ urmează $e^{w+w'} = zz'$, de unde $w + w' = \log z + \log z' = \log zz' + 2k\pi i$.

9°. *Dacă $f(z)$ este o funcție olomorfă în vecinătatea unui punct α și $f(\alpha) = 0$, $\log f(z)$ are în α punct critic logaritmic. De asemenea dacă α este un pol.*

Într-adevăr, admițînd (ceea ce se va demonstra mai tîrziu) că putem scrie $f(z) = (z - \alpha)^{\mu} f_1(z)$ ($\mu \geqslant 1$), cu $f_1(z)$ olomorfă în α și $f_1(\alpha) \neq 0$, se vede că, atunci cînd z descrie un cerc de centru α în sens direct, $\arg (z - \alpha)^{\mu}$ crește cu $2\pi\mu$, iar $\arg f_1(z)$ revine la valoarea inițială dacă cercul este destul de mic (așa ca $f_1(z)$ să rămînă într-o vecinătate a lui $\xi = f_1(\alpha)$, care exclude originea $\zeta = 0$); astfel, $\arg f(z)$ crescînd cu $2\pi\mu$, $\log f(z)$ crește cu $2\pi\mu i$, ceea ce dovedește că determinările funcției nu pot fi separate în nici o vecinătate a lui $z = \alpha$. Cînd α este un pol al funcției $f(z)$, raționamentul rămîne același, fiind sprijinit pe faptul că în acest caz putem scrie $f(z) = (z - \alpha)^{-\mu} f_1(z)$ ($\mu \geqslant 1$), cu $f_1(z)$ olomorfă în α și $f_1(\alpha) \neq 0$ (cum se va vedea mai tîrziu). Concluzia subsistă și în cazul $\alpha = \infty$, cum se vede considerînd funcția $\log f\left(\frac{1}{z}\right)$ în $z = 0$.

Observație. Punctele critice legînd între ele determinările unei funcții multiforme, conferă acestei funcții o individualitate proprie.

Cînd asemenea puncte nu există, se poate întîmpla (nu întotdeauna) ca determinările funcției să fie, în tot planul, funcții olomorfe de sine stătătoare (despre aceasta a se vedea capitolul „Prelungirea analitică").

Exemplul 1. $\log e^z = \log |e^z| + i \arg e^z = \log e^x + i(y + 2k\pi) = z + 2k\pi i$.

Această funcție nu este decît o colecție de funcții olomorfe în tot planul, fără legătură între ele.

§ 47. Funcțiile a^z și z^{α}

Definiție. $a^z = e^{z \log a}$ (a complex $\neq 0$).

Și această funcție este o colecție de funcții separate, corespunzătoare valorilor lui $\log a$. De aceea se preferă a se considera numai notația $e^{z \log a}$, care cu o valoare precizată a lui $\log a$, reprezintă o funcție exponențială uniformă și deci oloformă în tot planul.

Derivata ei este $e^{z \log a} \cdot \log a$.

Definiție. $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$ ($z \neq 0$).

$\alpha = a + ib$ fiind un număr complex oarecare. Se adaugă $0^{\alpha} = 0$ cînd α este rațional >0 și $0^{\alpha} = \infty$ cînd α este rațional <0.

Cînd $\alpha = a$ (real), definiția ne dă

$$z^a = e^{a[\log |z| + i \arg z]} = |z|^a e^{ia \arg z},$$

ceea ce concordă cu definițiile anterioare în cazul a rațional.

Funcția este în general uniformă. Dacă $(z^{\alpha})_0$ este o valoare a ei, toate valorile sînt

$$z^{\alpha} = (z^{\alpha})_0 e^{2k\pi i\alpha};$$

numărul lor depinde de factorul $e^{2k\pi i\alpha} = e^{2k\pi(-b + ia)}$.

Funcția z^{α} este uniformă numai cînd α este întreg, căci în acest caz factorul precedent trebuind să fie $= 1$, pentru k oarecare, avem $b = 0$ și $2k\pi ai = 2h\pi i$, ceea ce cere (pentru k întreg arbitrar) a întreg.

Cînd α este raţional, $\alpha = \frac{p}{q}$ cu p, q primi între ei, $z^\alpha = z^{\frac{p}{q}}$ are, cum ştim, q determinări.

În toate celelalte cazuri z^α are ∞^1 determinări distincte corespunzătoare valorilor lui k. Într-adevăr, dacă $b \neq 0$, $|e^{2k\pi i\alpha}| = e^{-2k\pi b}$ are valori distincte. Iar dacă $b = 0$, $\arg e^{2k\pi i\alpha} = 2k\pi a$ ia valori distincte (care nu diferă prin multiple de 2π) pentru că în cazul contrar, $2k\pi a - 2k'\pi a = 2h\pi$, ar urma $a = \frac{h}{k - k'}$ raţional.

Cînd z descrie un circuit direct în jurul originei, $\log z$ creşte cu $2\pi i$, deci z^α se înmulţeşte cu $e^{2\pi i\alpha}$ şi astfel determinările lui z^α trec în determinările următoare (w_k în w_{k+1}). De unde se conchide că 0 şi ∞ sînt puncte critice ale funcţiei z^α cînd α nu este întreg şi anume, algebrice cînd α este raţional (cum ştiam), logaritmice cînd α nu este raţional.

Determinările funcţiei pot fi separate tăind planul (z) după o semidreaptă cu originea în O. Atunci determinările lui $\log z$ sînt separate şi ne vor da funcţii $e^{\alpha \log z}$ olomorfe.

Derivata unei determinări este (§ 34, teorema 3).

$$\frac{dz^\alpha}{dz} = e^{\alpha \log z}\,\alpha\,\frac{1}{z} = \alpha e^{(\alpha - 1)\log z} = \alpha\frac{z^\alpha}{z}$$

sau

$$\frac{dz^\alpha}{dz} = \alpha z^{\alpha - 1}, \tag{50}$$

unde se înţelege că luăm determinarea $\alpha\frac{z^\alpha}{z}$.

Cînd z descrie un circuit direct în jurul originei, $\arg z^\alpha$ creşte (cum am văzut) cu $2\pi a$ ($a = \mathrm{Re}\alpha$). Dacă $\alpha = a < 1$ ($b = 0$), avem $|z^\alpha| = |z|^a$ şi planul (z) tăiat este reprezentat conform şi biunivoc pe sectorul de deschidere $2\pi a$ şi centru O din planul (w). Reprezentarea nu mai este biunivocă dacă $a > 1$.

Exemplu. $i^i = e^{i\log i} = e^{i\left[0 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right]} = e^{-\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)}$.
Această expresie deci nu este determinată; ea are o infinitate de valori reale.

§ 48. Funcţiile circulare cos z şi sin z

Definiţie. $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$,

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})} = \frac{\sin z}{\cos z}, \qquad \mathrm{cotg}\, z = i\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{e^{iz} - e^{-iz}} = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Pe axa reală ($z = x$) aceste funcţii sînt egale cu funcţiile circulare reale, după cum rezultă din formulele lui Euler:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

1°. $\cos z$ *şi* $\sin z$ *sînt olomorfe în tot planul afară de* ∞ *unde nu sînt definite.*

Rezultă din expresia lor prin exponenţiale.

2°. $$\frac{d}{dz}\cos z = -\sin z, \qquad \frac{d}{dz}\sin z = \cos z,$$

căci $\frac{d}{dz}\cos z = \frac{ie^{iz} - ie^{-iz}}{2} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z$ şi la fel pentru $\sin z$.

3°. $\overline{\cos z} = \cos \bar{z}$, $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$.

Rezultă din proprietatea analoagă a exponenţialei:

$$\overline{\cos z} = \frac{1}{2}(\overline{e^{iz}} + \overline{e^{-iz}}) = \frac{1}{2}(e^{\overline{iz}} + e^{\overline{-iz}}) = \frac{1}{2}(e^{-i\bar{z}} + e^{i\bar{z}}) = \cos \bar{z}.$$

4°. $\cos z$ *este o funcţie pară,* $\sin z$ *o funcţie impară:*

$$\cos(-z) = \cos z, \quad \sin(-z) = -\sin z.$$

Rezultă imediat din definiţie.

5° $\cos(z \pm z') = \cos z \cos z' \mp \sin z \sin z'$,

$\sin(z \pm z') = \sin z \cos z' \pm \sin z' \cos z$.

Din formulele cu semnul superior urmează cele cu semnul inferior aplicînd 4°. Verificăm prima formulă:

$$\cos z \cos z' - \sin z \sin z' = \frac{1}{4}(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz'} + e^{-iz'}) + \frac{1}{4}(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz'} - e^{-iz'}) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{i(z+z')} + e^{-i(z+z')}) = \cos(z + z').$$

Din prima formulă 5° cu semnul inferior şi $z' = z$ obţinem:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1.$$

La fel se stabileşte şi a doua formulă.

Din 4°, 5° şi

$$\cos 2k\pi = 1, \qquad \sin 2k\pi = 0,$$

$$\cos k\pi = (-1)^k, \qquad \sin k\pi = 0,$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0, \qquad \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

(care rezultă imediat din definiție ținînd socoteală de $e^{2k\pi i} = 1$, $e^{k\pi i} = (-1)^k$, $e^{\pm\frac{\pi}{2}i} = \pm i$), urmează toate formulele cunoscute din trigonometrie:

6°. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \sin z$, $\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \cos z$,

7°. $\cos(\pi - z) = -\cos z$, $\sin(\pi - z) = \sin z$,

8°. $\cos(z + 2k\pi) = \cos z$, $\sin(z + 2k\pi) = \sin z$,

$\cos(z + k\pi) = (-1)^k \cos z$, $\sin(z + k\pi) = (-1)^k \sin z$ etc.

Penultimele (cuprinse în ultimele) exprimă că funcțiile cos z și sin z au perioada 2π (și deci perioadele $2k\pi$). Ceea ce este o consecință imediată a periodicității exponențiale.

Vom arăta că acestea sînt singurele perioade ale celor două funcții. Vom rezolva ecuația $\cos z = w$ în raport cu z. Ea se mai scrie:

$$e^{iz} + e^{-iz} = 2w \quad \text{sau} \quad e^{2iz} - 2we^{iz} + 1 = 0,$$

de unde

$$e^{iz} = w \pm \sqrt{w^2 - 1}, \quad z = \frac{1}{i}\log(w \pm \sqrt{w^2 - 1}) \tag{51}$$

pentru orice $w \neq 0, \infty$ (conform definiției lui e^z), dar, deoarece $w \pm \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$, ecuația în e^{iz} avînd rădăcinile $\neq 0$ rezultă că este suficient să presupunem w finit. Cum aceste rădăcini sînt inverse pornind de la rădăcina ce corespunde semnului superior, mai putem scrie

$$z = \pm\frac{1}{i}\log(w + \sqrt{w^2 - 1}),$$

$\sqrt{w^2 - 1}$ avînd o determinare fixată. Această formulă pune în evidență paritatea lui cos z și arată că rădăcinile ecuației $\cos z = w$ sînt de forma $z = \pm z_0 + 2k\pi$, de unde se vede că funcția cos z nu poate avea alte perioade decît $2k\pi$.

Tot așa ecuația $\sin z = w$ sau

$$e^{2iz} - 2iwe^{iz} - 1 = 0$$

ne dă pentru orice w finit

$$z = \frac{1}{i}\log(iw \pm \sqrt{1 - w^2}). \tag{51'}$$

Din faptul că rădăcinile ecuației în e^{iz} au produsul -1 se deduce că ecuația $\sin z = w$ are soluțiile de forma $z = z_0 + 2k\pi$ și $z = (2k + 1)\pi - z_0$. (căci $\log\left(-\frac{1}{\alpha}\right) = -\log\alpha + (2k + 1)\pi i$). De unde se vede că nici sin z nu poate avea alte perioade decît $2k\pi$. Totodată a rezultat din cele de mai sus (deoarece logaritmii din (51) și (51') sînt definiți pentru orice w finit: căci $w \pm \sqrt{w^2 - 1} \neq 0$ și $iw \pm \sqrt{1 - w^2} \neq 0$ pentru orice w finit):

9° *Funcțiile* cos z *și* sin z *iau toate valorile* w *finite și nu iau valoarea* ∞. *Mai precis:* cos z *ia toate valorile finite, o singură dată, într-o bandă* $0 < \mathrm{Re}\, z < \pi$ *plus semidreptele frontieră* $z = iy$, $z = \pi - iy$ cu $y \geqslant 0$ (vezi fig. 28).

Într-adevăr, toate punctele z, unde $\cos z$ ia o valoare w, se pot obține din unul dintre ele z_0, aplicînd acestuia o translație $2k\pi$ (în direcția axei reale), ceea ce ne dă punctele $z_0 + 2k\pi$, și eventual simetria față de O, ceea ce ne mai dă punctele $-z_0 + 2k\pi$. Astfel, z_0 fiind dat, printr-o translație $2k\pi$ vom obține un punct z echivalent în banda $-\pi < \mathrm{Re}\, z < \pi$ plus semidreptele $z = -\pi + iy$, $z = \pi - iy$ $(y \geqslant 0)$; iar dacă acest punct nu e în banda din enunț, simetricul său față de O va fi un alt punct echivalent cu z_0 în această bandă. Pe de altă parte, un punct din această bandă nu poate fi echivalent cu nici un alt punct al benzii: pentru că translațiile $2k\pi$ și simetria față de O ne dau puncte în afara ei.

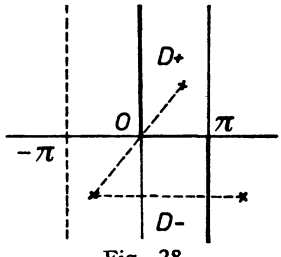

Fig. 28

Pe scurt: banda $0 < \mathrm{Re}\, z < \pi$ este un domeniu fundamental sau de univalență al funcției $\cos z$.

Orice reprezentare biunivocă a acestui domeniu împreună cu frontierele are aceeași proprietate. De exemplu un domeniu obținut printr-o translație în direcția axei reale. Tot planul poate fi împărțit în asemenea domenii, definite prin $(k-1)\pi < \mathrm{Re}\, z < k\pi$, la fiecare adăugîndu-se jumătatea superioară a frontierei din stînga și jumătatea inferioară a frontierei din dreapta.

Funcția $\cos z = w$ efectuează o reprezentare conformă a domeniului $0 < \mathrm{Re}\, z < \pi$ pe planul (w) minus semidreptele $v = 0$, $|u| \geqslant 1$, care corespund celor două semidrepte adăugate domeniului.

Aceasta rezultă din formulele evidente

$$\cos iy = \mathrm{ch}\, y \qquad \sin iy = i\, \mathrm{sh}\, y \tag{52}$$

Avem deci pentru $z = iy$ $(y \geqslant 0)$, $w = \mathrm{ch}\, y$, ceea ce arată că la semidreapta $z = iy$ $(y \geqslant 0)$ corespunde semidreapta $v = 0$, $u \geqslant 1$ biunivoc (căci ecuația $u = \mathrm{ch}\, y$ cu $u \geqslant 1$ are o singură rădăcnă $y \geqslant 0$). Tot așa, la semidreapta $z = \pi - iy$ $(y \geqslant 0)$ corespunde biunivoc $w = \cos(\pi - iy) = -\cos iy = -\mathrm{ch}\, y$, adică semidreapta $v = 0$, $u \leqslant -1$. Așadar, la domeniul $D(0 < \mathrm{Re}\, z < \pi)$ din planul (z) corespunde biunivoc (w) tăiat după semidreptele precedente. Corespondența e conformă pentru că în D, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \cos z = -\sin z \neq 0$.

Adăugînd lui D semidreptele $z = iy$ $(y \geqslant 0)$ și $z = \pi - iy$ $(y \geqslant 0)$ avem corespondență biunivocă cu întregul plan (w) — ∞, dar care nu e conformă în punctele $z = 0$, π la care corespund $w = 1$, -1. Ceea ce reise din faptul că la segmentul $z = x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$ corespunde segmentul $w = u(-1 \leqslant u \leqslant +1)$ deci la unghiul de $\dfrac{\pi}{2}$ din O, al frontierei lui D cu primul segment, corespunde un unghi de deschidere π.

Pentru a găsi ecuațiile corespondenței vom folosi formulele

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos x\, \mathrm{ch}\, y - i \sin x\, \mathrm{sh}\, y, \\ \sin z &= \sin x\, \mathrm{ch}\, y + i \cos x\, \mathrm{sh}\, y, \end{aligned} \tag{53}$$

care rezultă din formulele de adunare și (52). Ecuațiile reprezentării sînt deci:

$$u = \cos x\, \mathrm{ch}\, y, \qquad v = -\sin x\, \mathrm{sh}\, y. \tag{54}$$

Ele ne dau $v < 0$ pentru $0 < x < \pi$ și $y > 0$: La semibanda D_+ a lui D din semiplanul superior corespunde semiplanul (w) inferior și vice-versa. (Se mai poate observa că la valori z conjugate corespund valori w conjugate.)

Astfel funcția cos z rezolvă problema de a reprezenta conform o semibandă de lărgime π pe un semiplan. (După cum e^z reprezintă conform o bandă întreagă de aceiași lărgime, pe un semiplan: de exemplu $0 < \operatorname{Im} z < \pi$ pe $\operatorname{Im} w > 0$.)

Să mai observăm că la semidreapta $z = \frac{\pi}{2} + iy$ din D corespunde axa imaginară din planul (w): $w = -i \operatorname{sh} y$ (corespunzîndu-se semidreptele superioare cu cele inferioare). De aici sau din (54) reese că cele patru sferturi în care D e împărțit de dreptele $y = 0$ și $x = \frac{\pi}{2}$, corespund celor patru cadrane în care planul (w) e împărțit de axele sale; și anume așa cum se vede în figura 29.

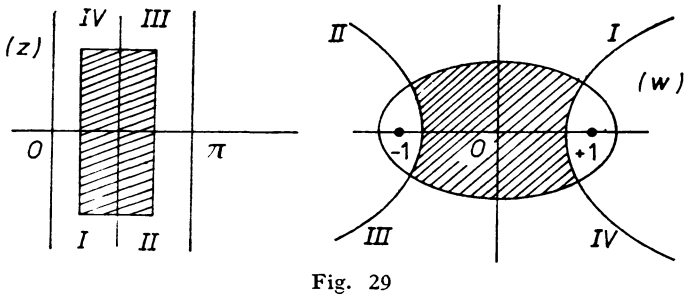

Fig. 29

Să eliminăm din ecuațiile (54) pe x sau pe y; obținem

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 y} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 y} = 1 \qquad (y \neq 0),$$

$$\frac{u^2}{\cos^2 x} - \frac{v^2}{\sin^2 x} = 1 \qquad \left(x \neq k\frac{\pi}{2}\right).$$

Aceste ecuații reprezintă elipse și hiperbole de focare $w = \pm 1$, care corespund respectiv dreptelor $y = \text{const.}$ și $x = \text{const.}$ Se regăsesc astfel, cu ajutorul unei corespondențe conforme, proprietăți cunoscute ale sistemelor omofocale de conice cu centru: printr-un punct exterior axelor trece o elipsă și o hiperbolă a sistemului, ce se taie sub unghi drept.

Să mai observăm că o elipsă corespunde la două drepte $y = \pm y_0$; mai precis, jumătatea superioară a elipsei corespunde biunivoc segmentului din D al dreptei inferioare și vice-versa (vezi fig. 29). Apoi cele două ramuri ale unei hiperbole corespund biunivoc la două drepte din D, simetrice față de dreapta $x = \frac{\pi}{2}$ și paralele cu ea. Astfel la interiorul unui dreptunghi din D, cu laturi paralele axelor și centrul în $z = \frac{\pi}{2}$, corespunde domeniul limitat de o elipsă și o hiperbolă. Se vede cum, atunci cînd dreptunghiul tinde către banda D, ultimul domeniu tinde către planul (w) tăiat.

Reprezentarea $w = \sin z$ se poate studia la fel. Considerînd translaţiile $2k\pi$ şi simetria faţă de punctul $z = \frac{\pi}{2}$ care lasă neschimbată valoarea funcţiei ($z' = z + 2k\pi$ şi $z' = \pi - z$) se ajunge la domeniul fundamental $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ (la care se adaugă semidreptele $z = -\frac{\pi}{2} + iy$ ($y \geqslant 0$) şi $z = \frac{\pi}{2} - iy$ ($y \geqslant 0$)). De altfel rezultatele pot fi deduse imediat din cele ce preced observînd că simetria faţă de punctul $z = \frac{\pi}{4}\left(z' = \frac{\pi}{2} - z\right)$ transformă $\cos z$ în $\sin z$. (Ea duce domeniul D fundamental pentru $\cos z$ în domeniul definit mai sus, fundamental pentru $\sin z$.)

10°. *Din formulele* (53) *rezultă*

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x \operatorname{ch}^2 y + \sin^2 x \operatorname{sh}^2 y.$$
$$|\sin z|^2 = \sin^2 x \operatorname{ch}^2 y + \cos^2 x \operatorname{sh}^2 y.$$

Folosind relaţiile $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$, *mai putem scrie*

$$|\cos z|^2 = \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x, \tag{55}$$
$$|\sin z|^2 = \sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y = \operatorname{ch}^2 y - \cos^2 x.$$

Se deduc inegalităţile

$$|\cos x|, |\operatorname{sh} y| \leqslant |\cos z| \leqslant \operatorname{ch} y, \tag{56}$$
$$|\sin x|, |\operatorname{sh} y| \leqslant |\sin z| \leqslant \operatorname{ch} y.$$

Consecinţă: $\cos z$ *şi* $\sin z$ *sînt mărginite într-o bandă paralelă cu axa reală.*

11°. $$\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1.$$

În adevăr, în real avem cum se ştie $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{y \to 0} \frac{\operatorname{sh} y}{y} = 1$. Atribuind funcţiilor $\frac{\sin x}{x}$ şi $\frac{\operatorname{sh} y}{y}$ valoarea 1 pentru $x = 0$, respectiv $y = 0$, ele devin continue în origină. Putem scrie după (53)

$$\frac{\sin z}{z} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)\frac{x}{z} \operatorname{ch} y + i\left(\frac{\operatorname{sh} y}{y}\right)\frac{y}{z} \cos x$$

valabil şi pentru $x = 0$ sau $y = 0$ (dar $z \neq 0$). Pentru $z \to 0$, $\frac{\sin x}{x} \to 1$, $\frac{\operatorname{sh} y}{y} \to 1$, $\operatorname{ch} y \to 1$, $\cos x \to 1$, deci putem scrie

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{x}{z}(1 + \varepsilon) + i\frac{y}{z}(1 + \varepsilon') = 1 + \varepsilon\frac{x}{z} + i\varepsilon'\frac{y}{z},$$

unde $\varepsilon \to 0$, $\varepsilon' \to 0$. Cum $\left|\frac{x}{z}\right| < 1$, $\left|\frac{y}{z}\right| < 1$, urmează $\frac{\sin z}{z} \to 1$. (Se poate obține direct considerînd raportul derivatelor pentru $z = 0$.)

Vom mai observa că funcția $\frac{\sin z}{z}$, definită cu valoarea 1 în $z = 0$, este olomorfă în acest punct și are derivata egală cu 0. În adevăr, se știe (formula lui Taylor) că

$$\frac{\sin x}{x} = 1 + \eta_1 x, \quad \operatorname{ch} y = 1 + \eta_2 y$$

$$\cos x = 1 + \eta_1' x, \quad \frac{\operatorname{sh} y}{y} = 1 + \eta_2' y$$

unde η_1, η_2, η_1', $\eta_2' \to 0$ cînd $z \to 0$. Raportul incrementar al funcției considerate, în $z=0$, este (pentru $\Delta z = z$) $\frac{1}{z}\left(\frac{\sin z}{z} - 1\right) = \frac{x}{z^2}(\eta_1 x + \eta_2 y + \eta_1 \eta_2 xy) +$ $+ \frac{iy}{z^2}(\eta_1' x + \eta_2' y + \eta_1' \eta_2 xy)$. Ținînd socoteală că $|x|$, $|y|$ și $\left|\frac{x}{z}\right|, \left|\frac{y}{z}\right|$ sînt mărginiți se vede că acest raport tinde la zero.

12°. Funcția $\sin z$ se anulează în punctele $z = k\pi$ și numai în acestea. Căci $z = 0$ fiind unul din acele puncte, toate celelalte sînt $0 + 2k\pi$ și $(2k + 1)\pi - 0$.

Într-un zero $k\pi$ al funcției avem

$$\lim_{z \to k\pi} \frac{\sin z}{z - k\pi} = (-1)^k. \tag{57}$$

Putem scrie

$$\frac{\sin z}{z - k\pi} = (-1)^k \frac{\sin (z - k\pi)}{z - k\pi} = (-1)^k \frac{\sin z'}{z'} \qquad (z' = z - k\pi).$$

Tot de aici rezultă, avînd în vedere observația de mai sus, că funcția $\frac{\sin z}{z - k\pi}$, definită cu valoarea $(-1)^k$ pentru $z = k\pi$, este olomorfă în acest punct și are derivata nulă. Astfel putem scrie în vecinătatea unui zero al funcției $\sin z$:

$$\sin z = (z - k\pi)\,\varphi(z),$$

unde $\varphi(z)$ e olomorfă în $z = k\pi$ și $\varphi(k\pi) = (-1)^k \neq 0$. Din acest motiv $z = k\pi$ este un zero de ordin 1 (simplu) al funcției.

Schimbînd pe z în $\frac{\pi}{2} - z$ se deduce că funcția $\cos z$ are zerourile simple $z = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ și în vecinătatea unui zero

$$\cos z = \left(z - \frac{2k + 1}{2}\pi\right)\varphi(z),$$

unde $\varphi(z)$ e olomorfă în $z = \frac{2k + 1}{2}\pi$ și $\varphi\left(\frac{2k + 1}{2}\pi\right) = (-1)^{k+1}$.

§ 49. Funcţiile ciclometrice arc cos z şi arc sin z.

Definiţie. $w = \arccos z$ *este inversa funcţiei* $z = \cos w$; *deci* $\cos(\arccos z) = z$.

1°. Deoarece $\cos w$ şi $\sin w$ iau numai valori finite, $\arccos z$ şi $\arcsin z$ *nu sînt definite decît la distanţă finită.*

2°. *Aceste funcţii sînt multiforme, cu o infinitate numărabilă de valori, care sînt date de formulele* (51), (51'), *unde schimbăm* z *şi* w *între ele* (formulele obţinute rezolvînd ecuaţiile $z = \cos w$ respectiv $z = \sin w$):

$$\arccos z = \frac{1}{i}\log(z + \sqrt{z^2 - 1}),$$

(58)

$$\arcsin z = \frac{1}{i}\log(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

După cum am văzut, dacă notăm cu w_0 o determinare, toate determinările acestor funcţii pot fi reprezentate prin formulele:

$$(58')\quad \arccos z = \begin{cases} w_0 + 2k\pi = w_{2k}, \\ -w_0 + 2k\pi = w_{2k-1}, \end{cases} \qquad \arcsin z = \begin{cases} w_0 + 2k\pi = w_{2k}, \\ -w_0 + (2k+1)\pi = w_{2k-1} \end{cases}$$

(k întreg oarecare).

3°. *Comportarea acestor determinări reise din studiul, făcut în paragraful precedent, al corespondenţei* $z = \cos w$ *respectiv* $z = \sin w$ *(rolul celor două plane este aici inversat).* În ce priveşte prima funcţie, am văzut că planul (w) poate fi împărţit în domeniile fundamentale $D_k(k\pi < \operatorname{Re} w < (k+1)\pi)$ şi fiecare dintre aceste domenii e reprezentat biunivoc şi conform prin $z = \cos w$, pe planul (z) minus tăieturile $z = x(x \leqslant -1)$ şi $z = x(x \geqslant +1)$.

Rezultă de aici că în planul (z) astfel tăiat determinările funcţiei arc cos z sînt separate în funcţii olomorfe; derivata uneia din aceste ramuri este dată de teorema funcţiilor inverse, avînd în vedere că $\frac{dz}{dw} = -\sin w$ nu se anulează decît în punctele $w = k\pi$, care corespund la $z = \cos k\pi = \pm 1$. Aşadar $\frac{d}{dz}\arccos z = -\frac{1}{\sin w}$ sau ţinînd socoteală de $z = \cos w$,

$$(59)\qquad \frac{d}{dz}\arccos z = -\frac{1}{\sqrt{1 - z^2}},$$

formulă în care determinarea radicalului urmează a fi precizată. Anume, valoarea lui $w = \arccos z$, în care $z = 0$, fiind $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, avem $\sin w = (-1)^k = \sqrt{1 - z^2}$ în $z = 0$; deci determinarea radicalului este aceea care ia valoarea 1 în origine cînd k este par şi cealaltă cînd k este impar. (Se va observa că tăieturile noastre separă şi determinările radicalului.)

Cele de mai sus nu se aplică direct punctelor de pe tăieturi, în care $\operatorname{Re} w = k\pi$, cu k par pentru prima tăietură şi k impar pentru a doua. Totuşi şi acestea pot fi înglobate, cu excepţia punctelor $z = \pm 1$, în domenii unde determinările lui arc cos z sînt separate. De exemplu, pentru un punct de pe semidreapta $z = x$, $(x > 1)$ şi o determinare $w = iv$, $(v > 0)$ vom considera

domeniul $-\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}v < \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Im}w > 0$, care corespunde biunivoc și conform semiplanului $\mathrm{Re}z > 0$ (cum rezultă din formulele de transformare (54), sau din corespondența sferturilor domeniului fundamental cu cadranele planului (z). Deci și în asemenea puncte determinările lui arc cos z sînt funcții olomorfe și au derivate date de aceiași formulă.

4°. *Determinările lui* arc cos z *fiind notate cu* w_k, *ca mai sus, să observăm că trecerea de la* w_{2k} la w_{2k-1}, *se face prin simetria* $w' = -w + 2k\pi$ *față de punctul* $w = k\pi$. *Aceste determinări corespund în planul* (w) *la domenii* D_{2k}, D_{2k-1} *adiacente, al doilea la stînga primului. De la* w_{2k} *la* w_{2k+2} *se trece prin translația* 2π, *care duce* D_{2k} în D_{2k+2} (fig. 30).

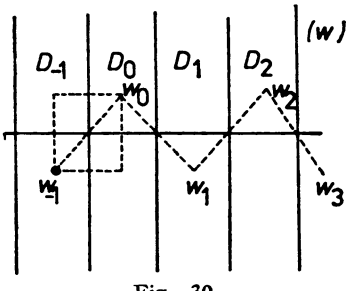

Fig. 30

Să presupunem că punctul z trece peste tăietura $z = x(x \geqslant +1)$, mergînd de exemplu pe un arc al unei elipse de focare $z = \pm 1$. Dacă în (z) considerăm determinarea w_k, la arcul de elipsă, va corespunde un segment paralel cu axa reală, în planul (w), cu o extremitate în D_k. Deoarece acest arc intersectează numai tăietura $z = x(x \geqslant +1)$, care corespunde dreptei $\mathrm{Re}\, w = k\pi$, cînd k e par, a doua extremitate a segmentului corespunzător va fi atunci în D_{k-1}. Așadar, trecerea peste tăietura $z = x(x \geqslant +1)$, într-un sens sau altul, duce o determinare w_k în cea precedentă, w_{k-1}, sau cea următoare după cum k este par sau impar. Pentru același motiv, cînd z trece prin tăietura $z = x(x \leqslant -1)$, o determinare w_k este dusă în cea următoare, w_{k+1} respectiv cea precedentă.

Rezultă de aici că, dacă z descrie un circuit în jurul lui $z = +1$, care nu înconjoară și pe $z = -1$, o determinare w_k urmărită prin continuitate devine w_{k-1}, respectiv. w_{k+1}; iar în urma unui circuit în jurul lui $z = -1$ ea devine w_{k+1}, respectiv w_{k-1}. De exemplu la un circuit în jurul lui $z = +1$, format dintr-un arc de elipsă și altul de hiperbolă de focare $z = \pm 1$, corespunde un drum format dintr-un segment paralel cu axa reală și altul paralel cu axa imaginară care duce cînd k este par, de la punctul w_k la punctul w_{k-1} simetric față de $w = k\pi$ (sau invers). Pentru acest motiv punctele $z = \pm 1$ sînt puncte critice logaritmice.

Acest efect nu se poate produce într-o vecinătate (destul de mică) a unui punct $\neq \pm 1$, la distanță finită. Pentru că un asemenea punct poate fi înglobat într-un domeniu unde determinările sînt funcții olomorfe separate. În vecinătatea punctului ∞, un circuit direct care înconjoară amîndouă punctele ± 1 nu va readuce determinarea inițială: cum se vede ușor, el este echivalent cu un circuit în jurul lui -1 urmat de altul în jurul lui $+1$, ceea ce duce succesiv w_k (k par) în w_{k+1} și pe aceasta în w_{k+2}. (Exemplu: o elipsă de focare ± 1.) Așadar:

Funcția arc cos z *posedă trei puncte logaritmice,* $z = \pm 1$, ∞, *și numai pe acestea. În jurul fiecărui punct critic toate determinările funcției sînt legate prin continuitate.*

Observație. Rezultă din discuția de mai sus că determinările lui arc cos z pot fi separate în orice domeniu simplu conex care nu conține nici un punct critic. De exemplu în exteriorul unei hiperbole de focare ± 1.

5°. *Rezultatele precedente pot fi transportate la funcția* arc sin z, *observînd că, deoarece* $\sin w = \cos\left(\frac{\pi}{2} - w\right)$, *avem*

$$\arcsin z = \frac{\pi}{2} - \arccos z. \tag{60}$$

Pentru a vedea cum se corespund determinările celor două funcții în această formulă, să notăm cu accente pe acelea ale lui arc cos z și să presupunem că w_0 și w_0' se corespund: $w_0 = \frac{\pi}{2} - w_0'$. Avem atunci

$$w_{2k} = w_0 + 2k\pi = \frac{\pi}{2} - (w_0' - 2k\pi) = \frac{\pi}{2} - w'_{-2k},$$

$$w_{2k-1} = -w_0 + (2k+1)\pi = +\frac{\pi}{2} - (-w_0' - 2k\pi) = \frac{\pi}{2} - w'_{-2k-1}.$$

Se vede acum că un circuit în jurul punctului $+1$ duce pe w_k (par) în $\frac{\pi}{2} - w'_{-k-1} = w_{k+1}$ și un circuit în jurul punctului -1 duce pe w_k în w_{k-1}. Așadar și funcția arc sin z posedă punctele critice logaritmice $z = \pm 1, \infty$, și numai pe acestea, determinările ei fiind legate prin continuitate în vecinătatea fiecărui punct critic.

§ 50. Funcțiile circulare tg z și ctg z

1°. *Aceste funcții sînt și ele reale pe axa reală, unde coincid cu funcțiile reale* tg x *și* cotg x. *Apoi avem*:

$$\overline{\operatorname{tg} z} = \operatorname{tg} \bar{z}, \quad \overline{\operatorname{ctg} z} = \operatorname{ctg} \bar{z}.$$

Acestea rezultă din proprietățile analoge ale funcțiilor cos z, sin z și din expresiile $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$.

2°. tg z *nu este definită în* ∞ *(punct singular esențial) și în punctele* $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ *care anulează numitorul* cos z; *în toate celelalte puncte este olomorfă (ca raport de funcții olomorfe)*. Deoarece în vecinătatea unui punct $z = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ avem

$$\cos z = \left(z - (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)\varphi(z), \quad \varphi\left((2k+1)\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^{k-1},$$

unde $\varphi(z)$ este olomorfă și $\neq 0$ în acel punct, putem scrie în vecinătatea acelui punct

$$\operatorname{tg} z = \frac{1}{z - \frac{2k+1}{2}\pi}\psi(z), \qquad \psi\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = -1$$

cu $\psi(z)$ olomorfă și $\neq 0$ în acel punct. Aceasta înseamnă că punctele $z = \frac{2k+1}{2}\pi$ sînt poli de ordin 1 (simpli) ai funcției $\operatorname{tg} z$.

Într-un pol $\operatorname{tg} z \to \infty$ (cum arată formula precedentă).

La fel se vede că funcția $\operatorname{ctg} z$ este nedefinită în ∞ (punct singular esențial) și în punctele $z = k\pi$, care sînt poli simpli; în vecinătatea unuia din ei avîndu-se

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z - k\pi}\psi(z), \quad \psi(k\pi) = 1$$

cu $\psi(z)$ olomorfă și $\neq 0$ în acel punct. În toate celelalte puncte funcția $\operatorname{ctg} z$ e olomorfă. Vom conveni să atribuim valoarea ∞ funcției $\operatorname{tg} z$ sau $\operatorname{ctg} z$ într-un pol.

3°. *Derivatele acestei funcții în punctele unde sînt olomorfe (derivate obținute cu ajutorul regulei de derivare a unui cît) sînt:*

$$\frac{d}{dz}\operatorname{tg} z = \frac{1}{\cos^2 z}, \quad \frac{d}{dz}\operatorname{ctg} z = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

4°. $\operatorname{tg} z$ *și* $\operatorname{ctg} z$ *sînt funcții impare:*

$$\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z, \quad \operatorname{ctg}(-z) = -\operatorname{ctg} z.$$

5°. *Împărțind formulele pentru* $\cos(z \pm z')$ *și* $\sin(z \pm z')$ *obținem formulele de adunare:*

$$\operatorname{tg}(z+z') = \frac{\operatorname{tg} z \pm \operatorname{tg} z'}{1 \pm \operatorname{tg} z \operatorname{tg} z'}, \quad \operatorname{ctg}(z \pm z') = \frac{\operatorname{ctg} z \operatorname{ctg} z' \pm 1}{\operatorname{ctg} z' \pm \operatorname{ctg} z}$$

Din 4°, 5° și

$$\operatorname{tg} k\pi = 0, \quad \operatorname{ctg}\frac{k+1}{2}\pi = 0$$

urmează toate celelalte formule cunoscute:

6°. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{ctg} z, \quad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - z\right) = \operatorname{tg} z,$

7°. $\operatorname{tg}(\pi - z) = -\operatorname{tg} z, \quad \operatorname{ctg}(\pi - z) = -\operatorname{ctg} z,$

8°. $\operatorname{tg}(z + k\pi) = \operatorname{tg} z, \operatorname{ctg}(z + k\pi) = \operatorname{ctg} z$; etc.

Ultima spune că funcțiile $\operatorname{tg} z$ și $\operatorname{ctg} z$ admit perioada π (și deci perioadele $k\pi$). Aceasta se vede și din expresiile

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)}, \quad \operatorname{ctg} z = i\frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$$

observînd că e^{2iz} are perioada π.

Vom arăta că acestea sînt singurele perioade ale funcțiilor, adică din $\operatorname{tg} z' = \operatorname{tg} z$ urmează $z' = z + k\pi$. Deoarece $\operatorname{ctg} z = \frac{1}{\operatorname{tg} z}$, este destul să ne ocupăm de $\operatorname{tg} z$. Ecuația $\operatorname{tg} z = w$ sau

$$e^{2iz}(1 - iw) - (1 + iw) = 0$$

ne dă

$$z = \frac{1}{2i} \log \frac{1 + iw}{1 - iw}. \tag{61}$$

Rădăcinile ecuației $\operatorname{tg} z = w$ sînt deci de forma $z = z_0 + k\pi$. Ceea ce înseamnă că $\operatorname{tg} z$ are numai perioadele $k\pi$. Formula (61) este valabilă cît timp logaritmul din membrul II este definit, adică pentru $\frac{1 + iw}{1 - iw} \neq 0, \infty$, ceeace înseamnă $w \neq \pm i$. Așadar:

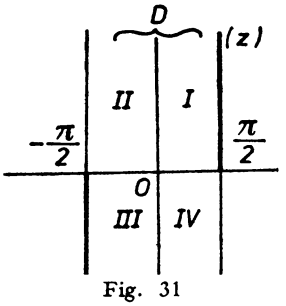

Fig. 31

9° *Funcțiile* $\operatorname{tg} z$ *și* $\operatorname{ctg} z$ *iau toate valorile afară de* $w = \pm i$ (*valoarea* $w = \infty$ *fiind luată în poli*). *Mai precis:*

Funcția $\operatorname{tg} z$ *ia orice valoare* $w \neq \pm i$, *o singură dată, în banda* D: $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}$ *plus semidreptele* $z = \frac{\pi}{2} + iy (y \geqslant 0)$ *și* $z = -\frac{\pi}{2} + iy (y < 0)$. (*Tot așa în orice bandă dedusă din aceasta printr-o translație în direcția axei reale* (vezi fig. 31.))

În adevăr, deoarece punctele unde $\operatorname{tg} z$ ia o valoare dată $w \neq \pm i$ se obțin unul din altul prin translații $k\pi$, unul și numai unul din ele se va afla în banda D sau pe una din semidreptele adăugate.

Aplicînd acestei benzi toate translațiile $k\pi$ vom obține o împărțire a planului (z) în benzi D_k cu aceiași proprietate ($D = D_0$). Banda D este așadar un domeniu fundamental al funcției $\operatorname{tg} z$.

Ea este reprezentată conform și biunivoc pe planul (w) minus tăieturile: $w = iv (v \geqslant 1)$ și $w = iv$ $(v \leqslant -1)$.

În adevăr: mai întîi $\frac{d}{dz} \operatorname{tg} z = \frac{1}{\cos^2 z} \neq 0$, deci corespondența este conformă. Apoi, avînd în vedere rezultatele de mai sus, rămîne să cercetăm ce corespunde semidreptelor adăugate. Pentru $z = \frac{\pi}{2} + iy (y \geqslant 0)$ avem după (52)

$$w = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + iy\right) = -\operatorname{ctg} iy = -\frac{\operatorname{ch} y}{i \operatorname{sh} y} = i \operatorname{cth} y \text{ (sau } u = 0,\ v = \operatorname{cth} y).$$

Pentru $y > 0$, $v = \operatorname{cth} y = \frac{e^{2y} + 1}{e^{2y} - 1} > 1$ și pe de altă parte pentru $v > 1$, ecuația

$$\operatorname{cth} y = v \quad \text{sau} \quad e^{2y}(v - 1) - (v + 1) = 0$$

are o soluție unică, $y = \frac{1}{2} \log \frac{v + 1}{v - 1} > 0$. Deci semidreapta $z = \frac{\pi}{2} + iy$ $(y > 0)$ corespunde biunivoc tăieturii $w = iv (v > 1)$; la extremitatea ei $z = \frac{\pi}{2}$ (pol) corespunde $w = \infty$. La fel se va vedea că la semidreapta $z = -\frac{\pi}{2} + iy$ $(y < 0)$ corespunde tăietura $w = iv$ $(v < -1)$.

În sfîrșit extremitățile $w = \pm i$ ale tăieturilor nu corespund nici unui punct din planul (z) (fig. 32).

Ecuațiile reprezentării $w = \operatorname{tg} z$ se vor obține ușor folosind (53):

$$w = \frac{\sin z \overline{\cos z}}{|\cos z|^2} = \frac{1}{|\cos z|^2}(\sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y)(\cos x \operatorname{ch} y + i \sin x \operatorname{sh} y),$$

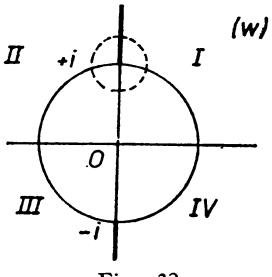

Fig. 32

de unde

$$(62) \qquad u = \frac{\sin 2x}{2|\cos z|^2}, \quad v = \frac{\operatorname{sh} 2y}{2|\cos z|^2}$$

$|\cos z|^2$ fiind dat de (55). Cu ajutorul lor se constată următoarele:

La axa imaginară $z = iy$ corespunde biunivoc $u = 0$, $v = \operatorname{th} y$, adică segmentul $w = iv$ $(-1 < v < +1)$ de extremități $\pm i$ din planul (w).

La segmentul $z = x \left(-\frac{\pi}{2} < x < +\frac{\pi}{2}\right)$ corespunde biunivoc $v = 0$, $u = \operatorname{tg} x$, adică axa reală din planul (w).

La sferturile în care domeniul D este împărțit de axe corespund cadranele planului (w), corespondența fiind aceea indicată în figuri.

La aceleași concluzii se poate ajunge și cu ajutorul formulei (61), care e echivalentă cu

$$2x = \arg \frac{1 + iw}{1 - iw}, \quad 2y = -\log \left| \frac{1 + iw}{1 - iw} \right|,$$

sau

$$(63) \qquad 2x = \pi + \arg \frac{w - i}{w + i}, \quad 2y = -\log \left| \frac{w - i}{w + i} \right|.$$

De aici se mai vede că:

La o dreaptă $x = x_0$ (const) corespunde un arc de cerc de extremități $\pm i$, situat la stînga sau la dreapta axei imaginare, după cum $\frac{\pi}{2} < x_0 < \pi$ sau $\pi < x_0 < \frac{3\pi}{2}$.

La o dreaptă $y = y_0$ (const) sau numai la segmentul ei din D corespunde un cerc care admite punctele simetrice (inverse) $\pm i$ și este situat deasupra sau dedesubtul axei reale, după cum $y_0 > 0$ sau $y_0 < 0$ (vezi § 39, Ex. 3). Aceste familii (fascicole) de cercuri sînt ortogonale. Ecuațiile lor se pot obține astfel: avem din (55),

$$|w|^2 = u^2 + v^2 = \frac{|\sin u|^2}{|\cos z|^2}, \text{ sau } u^2 + v^2 = \frac{\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y}{\cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y} = \frac{\operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x}{\operatorname{ch}^2 y - \sin^2 x},$$

de unde

$$\operatorname{sh}^2 y = \frac{\sin^2 x - (u^2 + v^2)\cos^2 x}{u^2 + v^2 - 1}, \quad \sin^2 x = \frac{(u^2 + v^2)\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y}{u^2 + v^2 + 1},$$

$$|\cos z|^2 = -\frac{\cos 2x}{u^2 + v^2 - 1} = \frac{\operatorname{ch}^2 y}{u^2 + v^2 + 1}$$

și introducînd în (62) obținem

$$u^2 + v^2 + 2u \operatorname{ctg} 2x - 1 = 0, \quad u^2 + v^2 - 2v \operatorname{cth} 2y + 1 = 0,$$

ecuații echivalente cu (63).

Rezultatele precedente se transportă ușor la funcția ctg z, observînd că simetria față de $z = \frac{\pi}{4}\left(z' = \frac{\pi}{2} - z\right)$ transformă $\operatorname{tg} z$ în $\operatorname{ct} z$. Se găsește astfel ca domeniu fundamental pentru ct z, domeniul $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, care va fi completat cu semidreptele $z = iy$ $(y \leqslant 0)$ și $z = \pi + iy$ $(y > 0)$ etc.

10°

$$|\operatorname{tgh} y| \leqslant \frac{|\operatorname{tg} z|}{|\operatorname{ctg} z|} \leqslant |\operatorname{cth} y| \qquad \text{pentru } |y| \neq 0. \tag{64}$$

Rezultă din (56) sau direct din expresiile funcțiilor. De aici și din periodicitatea celor două funcții deducem:

11°. tg z *și* ctg z *sînt mărginite în tot planul minus cercurile cu centrele în polii funcției și de rază* r *arbitrar de mică.*

În adevăr, pentru $|y| > y_0 > 0$ avem $|\operatorname{cth} y| < |\operatorname{cth} y_0|$ (căci cth y este o funcție descrescătoare, avînd derivata <0). Deci $|\operatorname{tg} z|$ și $|\operatorname{ctg} z|$ sînt mărginite pentru $|y| > y_0$. Să considerăm acum, în banda $|y| < y_0$, un dreptunghi Δ de lățime π și înălțime $2y_0$, din care scoatem cercurile de rază r cu centrele în polii funcției. În mulțimea închisă $\overline{\Delta}_1$ astfel obținută, funcția e olomorfă și deci modulul ei este $<M$ fix. Aplicînd lui $\overline{\Delta}_1$ toate translațiile $k\pi$, obținem o acoperire a benzii $|y| < y_0$ minus cercurile de mai sus, cu multimi în care modulul funcției este $<$ același M (din cauza periodicității). Astfel funcția este mărginită în această bandă minus cercurile considerate.

12° *Limite importante.* Am observat că funcția exponențială nu are limită în $z = \infty$. Aceasta este adevărat și pentru funcțiile circulare; motivul este același: o vecinătate V_∞ conține întotdeauna domenii în care funcția ia toate valorile de care e capabilă (obținute prin translație dintr-un domeniu fundamental). Aceasta însă nu împiedică să existe limită în raport cu domenii mai restrînse (avînd pe ∞ ca punct frontieră). Vom arăta că în adevăr este așa, și că pentru domenii convenabile funcțiile considerate au ca limită valorile pe care nu le pot lua (valorile excepționale).

Să considerăm întîi pe e^z care are valorile excepționale 0 și ∞. Avem $|e^z| = e^x = e^{R\cos\theta}$ $(R = |z|,\ \theta = \arg z)$. De aici se vede că, dacă $\cos\theta > 0$, $e^z \to \infty$, iar dacă $\cos\theta < 0$, $e^z \to 0$. Cu alte cuvinte:

Într-un unghi închis, cu centrul în 0 și care lasă în afară axa imaginară, $\lim_{z\to\infty} e^z$ este egală cu ∞ sau cu 0, după cum acel unghi se află la dreapta sau la stînga axei imaginare.

Pe axa imaginară și deci într-un unghi care o conține, $e^z = \cos y + i \sin y$ nu are limită.

Tot așa: într-un unghi cu centrul în 0 și care lasă în afară axa reală, $\lim_{z\to\infty} e^{iz}$ este egală cu 0 sau ∞, după cum acel unghi se află deasupra sau dedesubtul axei reale. Pe axa reală e^{iz} nu are limită.

De aici urmează imediat:

În orice unghi cu centrul în 0, care lasă în exterior axa reală $\lim_{z\to\infty} \sin z = \infty$ și $\lim_{z\to\infty} \cos z = \infty$. Pe axa reală aceste funcții nu au limită.

În ce privește tg z și ctg z, scriind

$$\operatorname{tg} z = \frac{e^{2iz} - 1}{i(e^{2iz} + 1)} = \frac{1 - e^{-2iz}}{i(1 - e^{-2iz})}$$

și aplicînd rezultatul precedent relativ la e^{iz}, vedem că:

Într-un unghi de centru 0, care lasă în exteriorul său axa reală și se află în semiplanul pozitiv $\lim_{z\to\infty} \operatorname{tg} z = +i$, $\lim_{z\to\infty} \operatorname{ctg} z = -i$; într-un unghi de vîrf 0, care se află în semiplanul negativ, $\lim_{z\to\infty} \operatorname{tg} z = -i$, $\lim_{z\to\infty} \operatorname{ctg} z = +i$. Pe axa reală aceste funcții nu au limită.

§ 51. **Funcțiile ciclometrice** arc tg z și arc ctg z

Definiție. $w = \operatorname{arc\,tg} z$ *este inversa funcției* $z = \operatorname{tg} w$.

$w = \operatorname{arc\,ctg} z$ *este inversa funcției* $z = \operatorname{ctg} w$.

1°. *Aceste funcții sînt definite în tot planul lui Gauss afară de punctele* $z = \pm i$ *(în* $z = \infty$, $\operatorname{arc\,tg} z = \frac{k+1}{2}\pi$ *și* $\operatorname{arc\,ctg} z = k\pi$*)*.

2°. *Ele sînt funcții multiforme cu* ∞ *valori, date de formula* (61) *și formula analogă (unde* z *este schimbat cu* w*)*:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}, \quad \operatorname{arc\,ctg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{z+i}{z-i} \tag{65}$$

(a doua formulă s-a obținut schimbînd în (61) w *în* $\frac{1}{w}$ *și apoi* w *în* z*). Cum am observat, dacă* w_0 *e una din aceste valori, toate valorile sînt cuprinse în formulele:*

$$\operatorname{arc\,tg} z = w_0 + k\pi = w_k, \quad \operatorname{arc\,ctg} z = w_0 + k\pi = w_k$$

3°. *Din studiul reprezentării* $z = \operatorname{tg} w$ *făcut în paragraful precedent (aici rolul celor două plane sînt inversate) a reieșit că planul* (w) *este împărțit în domeniile fundamentale* $D_k\left(\frac{2k-1}{2}\pi < \operatorname{Re} w < \frac{2k+1}{2}\pi\right)$*, fiecare fiind reprezentat conform și biunivoc pe planul* (z) *minus tăieturile* $z = iy (y \geqslant 1)$ *și* $z = iy (y \leqslant -1)$*. Deci în planul* (z) *astfel tăiat funcția* $\operatorname{arc\,tg} z$ *se separă în funcții olomorfe* $w_k(z)$*, care iau respectiv valorile din domeniile* D_k*. În planul tăiat* $\frac{dz}{dw} = \frac{1}{\cos^2 w} \neq 0$ *și derivata este dată de teoria funcțiilor inverse; pentru fiecare determinare a funcției* $\operatorname{arc\,tg} z$ *ea este aceeași și anume*

$$\frac{d}{dz}\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{1+z^2}.$$

Formula este valabilă pentru orice z *finit și* $\neq \pm i$, deoarece și punctele tăieturilor, cu excepția acestora, pot fi înglobate în domenii unde determinările funcției pot fi separate în funcții olomorfe.

4°. Considerînd o vecinătate a punctului $z = +\mathrm{i}$, care exclude punctul $z = -\mathrm{i}$, să presupunem că z descrie în această vecinătate un circuit direct în jurul punctului. Atunci $\arg(1 + \mathrm{i}z) = \arg \mathrm{i}(z - \mathrm{i})$ crește cu 2π, iar $\arg(1 - \mathrm{i}z) = \pi + \arg \mathrm{i}(z + \mathrm{i})$ revine la valoarea inițială. Deci, cum arată formula (65), o determinare w_k urmărită prin continuitate de-a lungul circuitului crește cu π, adică devine w_{k+1}; ea devine w_{k-1} în urma unui circuit indirect. Tot așa, un circuit direct într-o vecinătate a punctului $z = -\mathrm{i}$, care exclude pe $z = +\mathrm{i}$, duce w_k în w_{k-1} iar un circuit indirect, în w_{k+1}. *Deci* $z = \pm\mathrm{i}$ *sînt puncte critice ale funcției* arc tg z, *în vecinătatea cărora toate determinările funcției sînt legate prin continuitate: așadar sînt puncte critice logaritmice. Acestea sînt singurele puncte critice, căci același raționament ne arată că un circuit în jurul ambelor puncte* $z = \pm\mathrm{i}$ *readuce determinarea inițială, așa că* ∞ *nu e punct critic.*

5°. *Toate acestea se pot aplica și funcției* arc ctg z, observînd că

$$\operatorname{arc\,ctg} z = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} z.$$

(vezi § 50, 6°). Se vede astfel că funcția arc ctg z are aceleași puncte critice.

§ 52. Funcțiile hiperbolice

Definiție.

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},$$

$$\operatorname{th} z = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Studiul funcțiilor hiperbolice este perfect analog cu acela al funcțiilor circulare. De altfel proprietățile unora pot fi ușor deduse din proprietățile celorlalte cu ajutorul formulelor de legătură:

$$\begin{aligned} &\cos \mathrm{i}z = \mathrm{i} \operatorname{ch} z, \quad \sin \mathrm{i}z = \mathrm{i} \operatorname{sh} z, \\ &\operatorname{tg} \mathrm{i}z = \mathrm{i} \operatorname{th} z, \quad \operatorname{ctg} \mathrm{i}z = -\mathrm{i} \operatorname{cth} z. \end{aligned} \tag{66}$$

Va fi deajuns să enunțăm rezultatele.

1°. *Pe axa reală aceste funcții coincid cu funcțiile hiperbolice reale și avem* $\overline{\operatorname{ch} z} = \operatorname{ch} \bar{z}$ etc.

2°. *Ele nu sînt definite în* ∞, *care e punct singular esențial. Funcțiile* ch z *și* sh z *sînt olomorfe în tot planul la distanță finită.*

th z *are polii simpli* $z = \dfrac{2k+1}{2}\pi i$.

cth z *are polii simpli* $z = k\pi\mathrm{i}$.

Valorile acestei funcții se definesc în poli egale cu ∞.

3°. *Derivatele funcțiilor hiperbolice în punctele unde sînt olomorfe*:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{ch} z = \operatorname{sh} z, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{sh} z = \operatorname{ch} z,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{th} z = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 z}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \operatorname{cth} z = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 z}.$$

4°. ch z *e funcție pară*; sh z, th z, cth z *funcții impare.*

5°. *Avem formulele de adunare:*

$$\operatorname{ch}(z \pm z') = \operatorname{ch} z \operatorname{ch} z' \pm \operatorname{sh} z \operatorname{sh} z',$$

$$\operatorname{sh}(z \pm z') = \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z' \pm \operatorname{sh} z' \operatorname{ch} z,$$

$$\operatorname{th}(z \pm z') = \frac{\operatorname{th} z \pm \operatorname{th} z'}{1 \pm \operatorname{th} z \operatorname{th} z'}, \quad \operatorname{cth}(z \pm z') = \frac{\operatorname{cth} z \operatorname{cth} z' \pm 1}{\operatorname{cth} z' \pm \operatorname{cth} z}$$

6°. $\operatorname{ch} k\pi i = (-1)^k$, $\operatorname{sh} k\pi i = 0$, $\operatorname{th} k\pi i = 0$,

$$\operatorname{ch}\frac{k+1}{2}\pi i = 0, \quad \operatorname{sh}\frac{k+1}{2}\pi i = (-1)^k i, \quad \operatorname{cth}\frac{k+1}{2}\pi i = 0.$$

Din 5° și 6° urmează:

7°. $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

8°. $\operatorname{ch}\left(\frac{\pi}{2} i \pm z\right) = \pm i \operatorname{sh} z$, $\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{2} i \pm z\right) = i \operatorname{ch} z$, $\operatorname{th}\left(\frac{\pi}{2} i \pm z\right) = \pm \operatorname{cth} z$.

9°. $\operatorname{ch}(k\pi i \pm z) = (-1)^k \operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh}(k\pi i \pm z) = \pm(-1)^k \operatorname{sh} z$,
$\operatorname{th}(k\pi i \pm z) = \pm \operatorname{th} z$ etc.

Ultima arată că ch z și sh z au perioada $2\pi i$, iar th z și cth z perioada πi. Se vede apoi că acestea sînt singurele perioade; mai precis, dacă z_0 dă o valoare w unei funcții hiperbolice, toate valorile lui z pentru care funcția ia aceeași valoare sînt:

$$z = \pm z_0 + 2k\pi i \qquad \text{pentru } w = \operatorname{ch} z,$$

$$z = \begin{cases} z_0 + 2k\pi i \\ -z_0 + (2k+1)\pi i \end{cases} \qquad \text{pentru } w = \operatorname{sh} z,$$

$$z = z_0 + k\pi i \qquad \text{pentru } w = \operatorname{th} z \text{ sau } w = \operatorname{cth} z.$$

10°. *Ca domeniu fundamental avem pentru* ch z, $0 < \operatorname{Im} z < \pi$, *reprezentat conform și biunivoc pe planul* (w) *minus semidreptele* $u = 0$, $|v| \geqslant 1$
La fel $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im} z < +\frac{\pi}{2}$ *pentru* sh z.

Exerciții

1. $$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z.$$

R. Putem presupune $y \neq 0$.

$$\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right| = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left[1+\left(\frac{y}{x+n}\right)^2\right]^{\frac{n}{2}} = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left\{\left[1+\frac{1}{\left(\frac{x+n}{y}\right)^2}\right]^{\left(\frac{x+n}{y}\right)^2}\right\}^{\frac{ny^2}{2ex+n^2}} \to e^x,$$

$$\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = n \operatorname{arc tg}\frac{y}{x+n} \to y,$$

determinarea argumentului fiind aceea din interval $\left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$ pentru n destul de mare.

Deci $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$.

2. $$\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos z} - \operatorname{tg} z\right) = 0$$

R. $\lim\limits_{z\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{1-\sin z}{\cos z} = \dfrac{-\cos\frac{\pi}{2}}{-\sin\frac{\pi}{2}} = 0.$

3. $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{ch} z = \infty$ *într-un unghi* $-\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon < \arg z < \dfrac{\pi}{2}-\varepsilon$ *sau* $\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}-\varepsilon$.

4. $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{sh} z = \infty$ *în aceleași unghiuri ca în exercițiul precedent.*

5. $\lim\limits_{z\to\infty} \operatorname{th} z = \begin{cases} 1 \text{ într-un unghi } -\dfrac{\pi}{2}+\varepsilon < \arg z < \dfrac{\pi}{2}-\varepsilon, \\ -1 \text{ într-un unghi } \dfrac{\pi}{2}+\varepsilon < \arg z < \dfrac{3\pi}{2}-\varepsilon. \end{cases}$

6. $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{e^z}{e^z-1} = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$ *în aceleași unghiuri ca în exercițiul* 5.

R. Pentru exercițiile 3—6 vezi § 50, 12°.

7. $\lim\limits_{z\to\infty} z^{-a}e^{iz} = 0$ *în semiplanul superior, dacă* $a > 0$.

R. $|z^{-a}e^{iz}| = R^{-a}e^{-R\sin\theta} < R^{-a} \to 0$. (Am pus $z = Re^{i\theta}$).

8. *Liniile de modul constant și cele de argument constant ale funcției* $e^{\frac{1}{z}}$.

R. $\operatorname{Re}\dfrac{1}{z} = \dfrac{x}{x^2+y^2} = \text{const}$ și $\operatorname{Im}\dfrac{1}{z} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} = \text{const}$;

familiile de cercuri tangente în 0 la axa imaginară și cea reală.

9. *Ce curbe reprezintă ecuațiile următoare, unde coeficienții sînt reali și* t *ia toate valorile reale?*

$$z = e^{(a+bi)t} \quad (b \neq 0).$$

R. Spirală logaritmică: $r = e^{\frac{a}{b}\theta}$.

$$z = a(1+it)e^{-it}.$$

R. Evolventa cercului $|z| = a$: $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t + t\cos t)$.

$$z = Rt + ire^{it} \quad (R \neq 0).$$

R. $x = Rt - r\sin t$, $y = r\cos t$ cicloidă ordinară ($R = r$), scurtată ($R > r$) sau alungită ($R < r$).

$$z = \frac{a}{(1+e^{it})^2} \quad (a \neq 0).$$

R. $x = \dfrac{a}{4\cos^2\frac{t}{2}}$, $y = -\dfrac{a}{2}\operatorname{tg}\dfrac{t}{2}$ parabolă.

$$z = ae^{it} + be^{-it} \quad (a^2 \neq b^2).$$

R. $x = (a+b)\cos t$, $y = (a-b)\sin t$ elipsă.

10. *Funcția* $e^{\frac{1}{z}}$ *admite un grup (discontinuu) de transformări liniare care îi păstrează valoarea (este o funcție automorfă). Domenii fundamentale.*

R. Avem $e^{\frac{1}{z'}} = e^{\frac{1}{z}}$ pentru $z' = \dfrac{z}{2k\pi i z + 1}$; aceste transformări liniare constituie un grup ciclic infinit, generat de transformarea corespunzînd la $k = 1$. Domeniile fundamentale se deduc din acelea ale funcției e^{ζ} prin transformarea $z = \dfrac{1}{\zeta}$; unul din ele este domeniul cuprins

între $Im\ z = 0$ și $\operatorname{Im} \frac{1}{z} = 2\pi$, din care se deduce prin transformările grupului precedent un șir de lunule.

Generalizare: $e^{\frac{az+b}{cz+d}}$ $(ad - bc = 1)$.

11. *Să se determine funcția olomorfă în planul* (z) *cu excepția punctelor* $z = k\pi$ *și* $z = \infty$, *pentru care*

$$\operatorname{Re} w = \frac{2 \sin 2x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2 \cos 2x}, \quad w(0) = \infty.$$

R. $w = \operatorname{cotg} z$.

12. *Să se determine funcția olomorfă în planul* (z) *cu* $z \neq 0$, *pentru care* $\operatorname{Re} w = F(\theta)$.

R. $ai \log z + \alpha$, a real, α complex oarecare,

13. *Să se determine funcția olomorfă în planul* (z) *cu* $z \neq 0$, *pentru care*

$$\operatorname{Im} w = F(r).$$

R. $ai \log z + \alpha$, a real, α oarecare.

14. *Să se studieze funcția multiformă* $w = \sqrt{1 - z^2}$.

R. Două puncte critice algebrice: $z = \pm 1$. Cele două determinări pot fi separate prin tăietura $(-1, +1)$ sau prin tăieturile $(-\infty, -1)$ și $(+1, +\infty)$ pe axa reală. În ultimul caz, ele reprezintă conform și biunivoc planul (z) tăiat, pe planul (w) tăiat după semidreapta superioară sau inferioară a axei imaginare.

15. *Să se studieze funcția multiformă* $w = \sqrt[3]{z^2(z - 1)}$.

R. Puncte critice: $z = 0, 1$ (∞ nu e critic). Numerotînd cu 1, 2, 3 determinările egale cu $\omega^k \sqrt[3]{x^2(x - 1)}$ pe semidreapta $x > 1$, (ω o rădăcină cubică imaginară a unității), un circuit direct în jurul lui 1 produce ciclul (1, 2, 3), iar în jurul lui 0, ciclul (1, 3, 2).

16. *Determinările funcției* $w = \sqrt[3]{z^2(z - 1)}$ *fiind separate prin tăietura* (0, 1) *pe axa reală, se consideră aceeea care ia valori pozitive pe semidreapta* $x > 1$ *a axei reale. Se cer valorile acestei determinări*

1° *pe marginea superioară a tăieturii,*

2° *pe marginea inferioară,*

3° *în punctul* $z = i$.

R. 1°. Urmărind determinarea prin continuitate de-a lungul axei reale, în sens negativ, și înconjurînd punctul 1 în sens direct pe un semicerc, obținem $w = e^{\frac{\pi i}{3}} \sqrt[3]{x^2(1 - x)}$ (arg w, care era 0, a devenit $\frac{\pi}{3}$ în urma semicircuitului căci, arg $\sqrt[3]{x - 1}$ crește cu $\frac{\pi}{3}$, iar arg $\sqrt[3]{x^2}$ rămîne nul ca și cînd am trece prin 1 fără a ocoli acest punct) (vezi fig. 33).

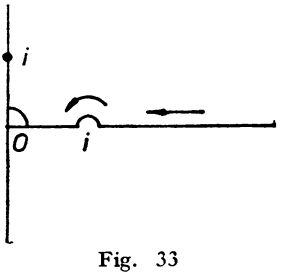

Fig. 33

2°. $w = e^{-\frac{\pi i}{3}} \sqrt[3]{x^2(1 - x)}$.

3°. Plecînd de pe marginea superioară a tăieturii, trecem pe axa imaginară făcînd un ocol de $\frac{\pi}{2}$ în jurul lui 0. În urma acestuia $z = r e^{i\theta}$ trece de la valoarea $r = x$, la $z = r e^{\frac{\pi i}{2}} = ri$ și determinarea 1° devine $e^{\frac{2\pi i}{3}} r^{\frac{2}{3}} (1 - ir)^{\frac{1}{3}}$. Făcînd apoi ca r să varieze pînă la 1, obținem ca valoare în $z = i$: $w_1 = e^{\frac{2\pi i}{3}} (1 - i)^{\frac{1}{3}}$, unde $(1 - ir)^{\frac{1}{3}}$ a fost urmărit prin continuitate. Pentru a obține valoarea lui $\sqrt[3]{1 - z}$, observăm că, trecînd pe axa imaginară, argumentul acestei expresii variază foarte puțin cînd r este foarte mic, și el rămîne $< \frac{2\pi}{3}$ cît vreme nu înconjoară punctul $z = 1$.

Deci, cînd parcurgem segmentul (ir, i), el va lua valoarea $\frac{7\pi}{12} < \frac{2\pi}{3}$ (căci arg $(1 - i) = \frac{7\pi}{4}$). Aşadar $w_1 = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{2\pi i}{3} + \frac{7\pi i}{12}} = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{5\pi i}{4}} = -\frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt{2}}(1 + i) = -\frac{1 + i}{\sqrt[3]{2}}$.

Mai scurt: valorile factorilor $z^{\frac{2}{3}}$ şi $(z - 1)^{\frac{1}{3}}$ într-un punct oarecare sînt determinate printre cele trei valori pe care le pot avea, de faptul că argumentele lor variază cu mai puţin decît $\frac{2\pi}{3}$ cînd z nu înconjoară punctele 0 respectiv 1.

Să se studieze funcţiile:

17. $w = \sqrt[3]{1 - z^3}$

18. $w = \sqrt{z\,\frac{1 - z}{1 + z}}$.

19. $w = \sqrt{(1 - z)(1 - z^2)\,(1 - z^3)}$.

20. $w = \log\,(z + \sqrt{z^2 + 1})$

R. E inversa funcţiei $z = \operatorname{ch} w$ şi va fi studiată ca funcţia arc cos z (puncte critice logaritmice: $z = \pm i, \infty$).

21. *Să se reprezinte conform şi biunivoc un unghi pe semiplanul superior.*

R. Funcţia $w = z^{\frac{1}{\alpha}}$ $(0 < \alpha < 2)$, cu determinarea reală pe semiaxa reală pozitivă, reprezintă conform şi biunivoc unghiul $0 < \arg z < \alpha\pi$ pe semiplanul superior. În cazul general, unghiul dat va fi adus în situaţia precedentă cu ajutorul unei transformări liniare de forma $z' = a(z - z_0)$. Pentru $\alpha = 2$ obţinem $w = \sqrt{z}$, care reprezintă planul (z) tăiat după semiaxa reală pozitivă, pe semiplanul superior.

La fel se reprezintă un unghi pe un unghi. Dacă deschiderile acestor unghiuri sînt $\alpha\pi$ şi $\beta\pi$, avînd fiecare ca una din laturi semiaxa reală pozitivă, reprezentarea este efectuată de $w = z^{\frac{\beta}{\alpha}}$, cu determinarea reală pe semiaxa pozitivă.

22. *Să se reprezinte conform şi biunivoc o lunulă pe semiplanul superior.*

R. Fie $\alpha\pi$ unghiul lunulei, a şi b vîrfurile ei. Vom duce întîi a, b în $0, \infty$ prin transformarea liniară $z' = k\,\frac{z - a}{z - b}$; lunula e dusă într-un unghi de aceiaşi deschidere. Dispunînd de $k = e^{i\theta}$ putem aduce acest unghi în situaţia din exerciţiul 21. Transformarea cerută va fi $w = e^{\frac{i\theta}{\alpha}}\left(\frac{z - a}{z - b}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ cu determinarea pe semiaxă reală pozitivă.

23. *Să se reprezinte conform şi biunivoc banda $a < y < b$, pe semiplanul superior. Cazul unei benzi oarecare.*

R. Plecăm de la faptul că $w = e^{z'}$ duce banda $0 < y < \pi$ în semiplanul superior. Cu o transformare de forma $z' = \alpha z + \beta$ ducem banda dată în precedenta, anume $z' = \pi\,\frac{z - ai}{b - a}$. Reprezentarea aceasta este deci $w = e^{\pi\frac{z - ai}{b - a}}$, Cea mai generală se va obţine aplicînd lui w o transformare liniară care păstrează semiplanul superior, $w' = \frac{mw + n}{pw + q}$ cu m, n, p, q reali şi $mq - np > 0$.

Pentru o bandă simetrică faţă de axa reală $-h < y < h$, $w = ie^{\frac{\pi z}{2h}}$.

Fie acum o bandă oarecare, dată printr-un punct z_0 pe linia ei mijlocie, direcția α și lărgimea $2h$. Cu o translație ducem z_0 în 0, iar cu o rotație facem banda paralelă cu axa reală (fără a-i schimba lărgimea); transformarea va fi $z' = \frac{|\alpha|}{\alpha}(z - z_0)$. Noua bandă fiind $-h < y < h$, reprezentarea cerută este

$$w = ie^{\pi \frac{|\alpha|}{2h\alpha}(z - z_0)}$$

De exemplu, pentru banda $0 < x < \pi$ găsim, luînd $\alpha = -i$, $h = \frac{\pi}{2}$, $z_0 = \frac{\pi}{2}$: $w = e^{iz}$.

24. *Să se reprezinte conform și biunivoc semibanda* $a < x < b$, $y > 0$, *pe un semiplan. De asemenea, semibanda* $a < y < b$, $x > 0$.

R. 1°. Pentru $0 < x < \pi$, se știe că reprezentarea pe semiplanul superior e dată de $w = -\cos z$. (§ 48). Pentru semibanda dată reprezentarea va fi $w = -\cos\left(\pi \frac{z - a}{b - a}\right)$ (conform exercițiului 23).

2°. Printr-o rotație de $\frac{\pi}{2}$ obținem pentru $0 < y < \pi$, $x > 0$: $w = -\operatorname{ch} z$ și în cazul general $w = -\operatorname{ch}\left(\pi \frac{z - ai}{b - a}\right)$.

Observații 1) Alte formule simple de transformări se obțin reprezentînd convenabil pe el însuși semiplanul superior (w) Astfel, punînd $w_1 = \frac{w + 1}{2}$, obținem pentru $0 < x < \pi$, $y > 0$: $w_1 = \sin^2 \frac{z}{2}$; apoi punînd $w_2 = 1 - \frac{1}{w_1}$, mai obținem $w_2 = -\operatorname{ctg}^2 \frac{z}{2}$.

2) De aici, punînd $w = \sqrt{w_1}$ sau $w = \sqrt{w_2}$, formulele $w = \sin \frac{z}{2}$ și $w = i \operatorname{ctg} \frac{z}{2}$, care reprezintă aceeași semibandă pe cadranul I.

25. *Să se reprezinte conform și biunivoc planul tăiat după semidreptele* $(-\infty, a)$ *și* $(b, +\infty)$ *ale axei reale* $(a < b)$ *pe un semiplan.*

R. Reprezentăm întîi planul (z) tăiat după semidreptele din enunț pe planul (w) tăiat după semiaxa reală pozitivă. Pentru aceasta e destul să ducem printr-o transformare liniară cu coeficienți reali, punctele a, b în ∞, 0: $w_1 = c \frac{z - b}{z - a}$ $(c > 0)$. Rămîne să contractăm planul (w_1) în semiplanul superior prin $w = \sqrt{w_1}$, cu determinarea pozitivă pentru $w_1 > 0$. Reprezentarea cerută este așadar $w = k \sqrt{\frac{z - b}{z - a}}$ $(k > 0)$ cu determinarea pozitivă pentru marginea superioară a tăieturii $z = x > b$.

26. *Să se reprezinte conform și biunivoc planul tăiat după segmentul* (a, b) *al axei reale pe un semiplan.*

R. Se găsește la fel $w = k \sqrt{\frac{z - b}{a - z}}$, cu determinarea pozitivă pe marginea superioară a tăieturii.

27. *Să se reprezinte conform și biunivoc, discul* $|z| < 1$, *tăiat după raza* $(0, 1)$, *pe un semiplan.*

R. Prin $w_1 = \frac{1 + z}{1 - z}$ ducem tăietura $(0, 1)$ în $(1, +\infty)$ și cercul în axa imaginară (punctele 1, -1, $i \to \infty$, 0, i). Prin $w_2 = w_1^2$ obținem planul (w_2) cu tăieturile $(-\infty, 0)$ și $(1, +\infty)$. Prin $w = \sqrt{\frac{w_2 - 1}{w_2}}$ obținem, luînd determinarea pozitivă pentru $w_2 > 1$ semiplanul superior

(exercițiul 26). Așadar: $w = \frac{2\sqrt{z}}{1+z}$ cu determinarea pozitivă a radicalului pe marginea superioară a tăieturii.

Verificarea: Cînd z descrie marginea superioară a tăieturii, $w = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ $(0 < x < 1)$ descrie $(0,1)$; cînd z descrie cercul $z = \cos\theta + i \sin\theta$ $(0 < \theta < 2\pi)$, $w = \frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}$ descrie $(1,+\infty)$ și $(-\infty, -1)$; cînd z parcurge marginea inferioară a tăieturii, determinarea lui $\sqrt{z}$ avînd semnul schimbat, w descrie $(-1,0)$. La $z = -\frac{1}{2}$ din domeniul dat, corespunde $w = 2i\sqrt{2}$ din semiplanul superior (căci determinarea considerată a lui z are în acest punct valoarea $\frac{i}{\sqrt{2}}$).

28. *Să se reprezinte conform și biunivoc sectorul circular* $|z| < R$, $0 < \arg z < \alpha\pi$ *pe un semiplan.*

R. Prin $z^2 = z$, semicercul $|z| < 1$, $0 < \arg z < \pi$ se transformă în cercul $|z| < 1$ tăiat după $(0,1)$; deci (exercițiul 27) acest semicerc este dus în semiplanul superior de transformarea $w = \frac{2z}{1+z^2}$ (sau de cele ce se deduc din ea printr-o reprezentare a semiplanului pe el însuși, cum ar fi $w = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$ etc.). Din acest rezultat deducem reprezentarea sectorului dat:

$$w = \frac{2\left(\frac{z}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}}{1+\left(\frac{z}{R}\right)^{\frac{2}{\alpha}}}$$

cu determinarea lui $\left(\frac{z}{R}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ care este pozitivă pe marginea superioară a razei (O, R).

29. *Să se reprezinte conform și biunivoc planul* (z) *tăiat după semidreapta* $(1, +\infty)$ *pe cercul* $|w| < 1$.

R. Prin $w_1 = z - 1$ ducem planul (z) tăiat în planul (w) tăiat după $(0, +\infty)$; prin $w_2 = \sqrt{w_1}$ cu determinarea pozitivă pe marginea superioară a tăieturii, acesta este dus în semiplanul superior (w_2); prin $w = \frac{i - w_2}{i + w_2}$ obținem $|w| < 1$. Reprezentarea cerută este deci:

$$w = \frac{i - \sqrt{z-1}}{i + \sqrt{z-1}}$$

cu determinarea pozitivă a radicalului pe marginea superioară a tăieturii.

Transformarea inversă este $z = \frac{4w}{(w+1)^2}$.

30. *Să se reprezinte conform și biunivoc discul* $|z| < 1$ *pe discul* $|w| < 1$ *tăiat după segmentul* $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

R. Vom duce discul $|w| < 1$ cu tăietura $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$ în discul $|w_1| < 1$ cu tăietura $(0,1)$. Avînd în vedere principiul simetriei aceasta se va face prin transformarea liniară $\left[\frac{1}{2}, 2, 1, w\right] =$

$= [0, \infty, 1, w_1]$ sau $\dfrac{2-w}{2w-1} = \dfrac{1}{w_1}$ sau $w = \dfrac{2w_1+1}{w_1+2}$. Trecem apoi la semiplanul superior w_2 (exercițiul 27) prin transformarea $w_2 = \dfrac{2\sqrt{w_1}}{1+w_1}$, de unde $w_1^2 w_2^2 + 2w_1(w_2^2-2) + w_2^2 = 0$, $w_1 = \dfrac{2 - w_2^2 - 2\sqrt{1-w_2^2}}{w_2^2}$; sau $w_1 = \left(\dfrac{1-\sqrt{1-w_2^2}}{w_2}\right)^2$; [cum marginea superioară a tăieturii corespunde segmentului $0 < w_2 < 1$ (exercițiul 27) și rădăcinile ecuației pătratice în w_1 au produsul 1, va trebui ca, în acest segment, să luăm rădăcina cea mai mică, adică determinarea radicalului pozitivă în (0.1)]. În sfîrșit trecem la discul $|z| < 1$ prin transformarea $w_2 = -i\dfrac{z+1}{z-1}$. Obținem

$$w = \frac{4 - w_2^2 - 4\sqrt{1-w_2^2}}{2 + w_2^2 - 2\sqrt{1-w_2^2}} = \frac{10 - w_2^2 - 6\sqrt{1-w_2^2}}{8 + w_2^2}$$

$$w = \frac{11z^2 - 18z + 11 + 6(z-1)\sqrt{2(z^2+1)}}{7z^2 - 18z + 7}$$

sau $w = \dfrac{[3(z-1) + \sqrt{2(z^2+1)}]^2}{7z^2 - 18z + 7}$.

Pentru a fixa determinarea radicalului, considerăm $z = 0$, pentru ca $w = \dfrac{11 \pm 6\sqrt{2}}{7}$; de unde se vede că trebuie să luăm determinarea care e pozitivă în $z = 0$.

31. *Să se reprezinte conform și biunivoc semiplanul* Im $z > 0$ *în semiplanul* Im $w > 0$ *cu tăietura* (0,i).

R. Păstrînd semiplanul din (w), vom duce tăietura (0,i) în (i, i∞) pe axa imaginară, ceea ce se face prin $w_1 = -\dfrac{1}{w}$. Apoi dublînd argumentele prin $w_2 = w_1^2 = \dfrac{1}{w^2}$, obținem planul ($w_2$) cu tăieturile $(-\infty, -1)$ și $(0, +\infty)$. De la acesta trecem la semiplanul superior din (z) prin $z = \sqrt{\dfrac{w_2}{w_2+1}}$ (exercițiul 25). Urmează reprezentarea căutată:

$w = \sqrt{\dfrac{1}{z^2} - 1}$ cu determinarea pozitivă pentru $z > 0$. (Cum se vede pentru $z = 2$).

32. *Să se reprezinte conform și biunivoc discul* $|z| < 1$ *cu tăieturile* $-1 < x < -a$ *și* $b < x < 1$ $(0 < a,\ b < 1)$ *pe semiplanul superior.*

R. Prin $w_1 = i\dfrac{1-z}{1+z}$ ducem domeniul dat în semiplanul superior cu tăieturile $\left(i\dfrac{1+a}{1-a}, i\infty\right)$ și $\left(0, i\dfrac{1-b}{1+b}\right)$. Cu rotația $w_2 = -iw_1$ acesta e dus în semiplanul $Rw_2 > 0$, cu tăieturile $\left(\dfrac{1+a}{1-a}, +\infty\right)$ și $\left(0, \dfrac{1-b}{1+b}\right)$. Prin $w_3 = w_2^2 = -w_1^2$ acesta este dus în planurile cu tăieturile $\left(\left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^2, +\infty\right)$, $\left(0, \left(\dfrac{1-b}{1+b}\right)^2\right)$. În sfîrșit trecem la semiplanul superior din (w) prin

$$w = \sqrt{\frac{w_3 - \left(\dfrac{1+a}{1-a}\right)^2}{w_3 - \left(\dfrac{1-b}{1+b}\right)^2}} = \frac{1+b}{1-a}\sqrt{\frac{(z+a)(1+az)}{(z-b)(1-bz)}}$$

cu determinarea pozitivă pe marginea inferioară a tăieturii a doua, sau negativă pe marginea superioară a tăieturii întîia (cum se vede luînd de exemplu $z = 0$).

Cele două tăieturi corespund respectiv la $(0,1)$ și $(k, +\infty)$, $k = \dfrac{(1+b)(1+a)}{(1-b)(1-a)}$. În cazul $a = b$, pentru mai multă simetrie, să punem $W = -\dfrac{\sqrt{k} - w}{\sqrt{k} + w}$, ceea ce păstrează semiplanul superior, atunci

$$W = -\frac{\sqrt{(z-a)(1-az)} - \sqrt{(z+a)(1+az)}}{\sqrt{(z-a)(1-az)} + \sqrt{(z+a)(1+az)}} = \frac{(1+a^2)z - \sqrt{(z^2-a^2)(1-a^2z^2)}}{a(z^2+1)}$$

cu aceeași determinare a radicalului. Tăieturile din planul (z) corespund acum segmentelor $(-1, -a)$, $(a, +1)$.

33. *Să se reprezinte conform și biunivoc domeniul exterior sau cel interior parabolei $y^2 = 4x$, pe semiplanul superior.*

R. Plecăm de la reprezentarea parametrică $x = u^2$, $y = 2u$. Luînd $u = \mathrm{Re}w$, parabola va corespunde axei reale $(x = u)$ în reprezentarea definită de

$$z = w^2 + 2iw \quad \text{sau} \quad w = i(-1 + \sqrt{1-z}).$$

Punctul critic $z = 1$ fiind interior și $z = \infty$ pe parabolă, determinările lui w pot fi separate în exterior. Luînd determinarea radicalului pozitiv pentru $z < 1$, vom avea deci o reprezentare biunivocă a exteriorului.

Verificare: Fie $\sqrt{1-z} = \xi + i\eta$, deci $x = \eta^2 - \xi^2 + 1$, $y = -2\xi\eta$. Punctul z este exterior parabolei dacă

$$y^2 - 4x = 4(\xi^2 - 1)(\eta^2 + 1) > 0, \text{ adică } |\xi| > 1.$$

Cum $v = \xi - 1$ se anulează numai pe parabolă și este > 0 pentru $z < 0$ (unde $\eta = 0$ și $\xi > 1$), vom avea $v > 0$ în tot exteriorul parabolei. Invers, la un z corespund două puncte w, w' astfel că $w + w' = -2i$, deci simetrice față de $w = -i$; numai unul din ele are $v > 0$: reprezentarea este deci biunivocă. În această simetrie semiplanul superior e transformat în $v < -2$, care va fi descris de cealaltă determinare a funcției w.

Spre a putea utiliza funcția $w = i(-1 + \sqrt{1-z})$ în interiorul parabolei, trebuie să ducem o tăietură de la punctul critic $z = 1$ pînă la curbă, de exemplu $(0,1)$. Luînd $\sqrt{1-z} > 0$ pe marginea superioară a tăieturii, vom avea în domeniul considerat $u = -\eta > 0$ (căci $\eta \neq 0$ în tot domeniul și $\eta < 0$ pentru $z > 1$, cum se vede descriindu-se un semicerc în sens indirect, în jurul lui $z = 1$, plecînd de la un punct al marginii superioare a tăieturii) și $-2 < v < 0$ (deoarece $|\xi| < 1$ în interior). Așadar funcția

$$w_1 = i(-1 + \sqrt{1-z})$$

cu $\sqrt{1-z} > 0$ pe marginea superioară a tăieturii $(0,1)$ reprezintă conform și biunivoc interiorul tăiat pe semibanda $u > 0$, $-2 < v < 0$. (Cealaltă determinare îl va reprezenta pe semibanda complementară.)

Se deduce reprezentarea biunivocă a aceluiași domeniu pe semiplanul superior (exercițiul 24):

$$w_2 = -\operatorname{ch}\frac{\pi i}{2}(1 + \sqrt{1-z}) = \sin\frac{\pi}{2}\sqrt{1-z}.$$

Pentru a obține o reprezentare biunivocă a întregului interior, reprezentăm semiplanul superior (w_2) pe discul $|w| < 1$ tăiat după raza $(0,1)$ (exercițiul 27), așa ca aceasta să corespundă tăieturii:

$$w = \left(\frac{1 - \sqrt{1 - w_2^2}}{w_2}\right)^2 = \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\sqrt{1-z}.$$

Această funcție este uniformă în interiorul parabolei (netăiat!), iar inversa ei,

$$z = 1 - \left(\frac{4}{\pi}\operatorname{arc\,tg}\sqrt{w}\right)^2,$$

cu determinarea principală a lui arc tg w, este uniformă în discul $|w|<1$. Am obținut astfel o reprezentare biunivocă a interiorului parabolei pe discul $|w|<1$. Putem trece apoi la semiplanul superior prin transformarea $W = i\dfrac{1-w}{1+w}$, adică

$$W = i\cos\frac{\pi}{2}\sqrt{1-z}.$$

Verificare: Pentru $z = t^2 + 2it$, avem $1 - z = -(t+i)^2$ și $W = i\cos\dfrac{\pi}{2}(it-1) = -\operatorname{sh}\dfrac{\pi}{2}t$.

34. *Aceeași problemă pentru elipsa* $\dfrac{x^2}{\operatorname{ch}^2\alpha} + \dfrac{y^2}{\operatorname{sh}^2\alpha} = 1\ (\alpha > 0)$.

R. Plecînd de la reprezentarea parametrică $x = \operatorname{ch}\alpha\cos u$, $y = -\operatorname{sh}\alpha\sin u$, sîntem conduși la

$$z = \cos(w_1 + i\alpha), \quad w_1 = -i\alpha + \arccos z.$$

Funcția w_1 are punctele critice $z = \pm 1$ interioare elipsei (focarele) și $z = \infty$; putem deci s-o separăm în exterior trăgînd tăietura $(\operatorname{ch}\alpha, +\infty)$. Avem

$$x = \cos u\operatorname{ch}(v+\alpha), \quad y = -\sin u\operatorname{sh}(v+\alpha)$$

iar z este exterior elipsei dacă

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2\alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2\alpha} - 1 = \left(\frac{\sin^2 u}{\operatorname{sh}^2\alpha} + 1\right)\left(\frac{\operatorname{ch}^2(v+\alpha)}{\operatorname{ch}^2\alpha} - 1\right) > 0,$$

adică dacă $v > 0$ sau dacă $v < -2\alpha$. Avînd în vedere periodicitatea putem lua $0 < u < 2\pi$, ceeace corespunde tocmai tăieturii precedente, care se obține pentru $u = 0$, 2π și $v > 0$ respectiv $v < -2\alpha$. Se delimitează astfel două semibenzi: $0 < u < 2\pi$, $v > 0$ și $0 < u < 2\pi$, $v < -2\alpha$, care corespund fiecare, biunivoc, domeniului de mai sus din planul (z). Considerăm pe cea dintîi, care e descrisă de determinarea lui w_1, cu arc cos z pur imaginar pe marginea superioară a tăieturii. Ca în exemplul 24 vom duce această semibandă în semiplanul superior (w_2) prin

$$w_2 = -\cos\frac{1}{2}w_1 = \sqrt{\frac{z-1}{2}}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{z+1}{2}}\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}$$

cu determinările convenabile ale radicalilor. Tăietura corespunde semidreptelor $(-\infty, -1)$ și $(+1, +\infty)$. Spre a o face să corespundă segmentului $(-1, +1)$, punem $w_2' = -\dfrac{1}{w_2}$, ceea ce păstrează semiplanul superior, apoi transformăm semiplanul în discul $|w'|<1$ cu tăietura $(0,1)$:

$$w' = \left(\frac{1-\sqrt{1-w_2'^2}}{w_2'}\right)^2 = (w_2 + \sqrt{w_2^2-1})^2.$$

Avem

$$w_2^2 - 1 = \left(\sqrt{\frac{z-1}{2}}\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{z+1}{2}}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\right)^2,$$

deci

$$w' = \left(\sqrt{\frac{z-1}{2}} - \sqrt{\frac{z+1}{2}}\right)^2\left(\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\right)^2$$

sau

$$w' = e^{\alpha}(z - \sqrt{z^2-1}), \quad z = \frac{w'^2 + e^{2\alpha}}{2e^{\alpha}w'}$$

cu $\sqrt{z^2-1}>0$ pentru $z>1$. Am obținut astfel o reprezentare biunivocă a exteriorului elipsei pe discul $|w'|<1$.

Verificare: Punînd $w'=e^{\alpha-\lambda+\theta i}(0<\theta<2\pi,\ \alpha<\lambda<+\infty)$ avem

$$z=\operatorname{ch}(\lambda-\theta i)=\cos(\theta+i\lambda);$$

deci z descrie o elipsă homofocală cu cea dată și exterioară ei (de semiaxe $\operatorname{ch}\lambda$, $\operatorname{sh}\lambda$, mai mari) în timp ce w' descrie un cerc interior lui $|w'|=1$ (de rază $e^{\alpha-\lambda}$). Punctele $z=\infty$ și $w'=0$ se corespund. Punînd $W=\dfrac{1}{w'}$ vom obține o reprezentare a exteriorului elipsei pe exteriorul cercului, în care se vor corespunde punctele de la ∞.

Aceeași funcție ne permite să reprezentăm coroana cuprinsă între două elipse homofocale, pe o coroană circulară: coroana dintre elipsele de parametri α și α' e reprezentată pe coroana dintre cercurile de rază 1 și $e^{\alpha-\alpha'}$.

Făcînd $\alpha'\to 0$ obținem o reprezentare a interiorului elipsei date, cu tăietura interfocală $(-1,+1)$, pe coroana $1<|w'|<e^{\alpha}$; elipsa corespunde cercului de rază 1 și tăietura cercului de rază e^{α}, determinare lui $\sqrt{z^2-1}$ putînd fi fixată oricum.

Ducînd însă tăieturile $(-\operatorname{ch}\alpha,\ -1)$, $(+1,\ +\operatorname{ch}\alpha)$ și luînd $\dfrac{1}{w'}$ în locul lui w' obținem o reprezentare a interiorului elipsei astfel tăiat, pe discul $|w'|<1$ cu tăieturile $(-1,\ -e^{-\alpha})$, $(e^{-\alpha},\ +1)$, dată de

$$w'=e^{-\alpha}(z+\sqrt{z^2-1}),\quad z=\frac{w'^2+e^{-2\alpha}}{2e^{-\alpha}w'}$$

cu $\sqrt{z^2-1}>0$ pentru $z>1$. Acest domeniu poate fi transformat biunivoc în semiplanul superior (exercițiul 32).

35. *Să se studieze reprezentarea conformă efectuată de* $w=z+\dfrac{1}{z}$ *și funcția inversă.*

R. Funcția se mai poate scrie și $w=\dfrac{z^2+1}{z}$, iar inversa $z=\dfrac{w}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{w}{2}\right)^2-1}$. Este tocmai cazul limită al exercițiului precedent (34), pentru $\alpha\to 0$, și unde înlocuim pe z prin $\dfrac{w}{2}$, iar pe w prin z. Funcția $w=\dfrac{z^2+1}{z}$ reprezintă $|z|>2$ pe planul cu tăietura $(-1,+1)$.

36. *Aceeași problemă pentru exteriorul hiperbolei*

$$x^2\sin^2\alpha-y^2\cos^2\alpha=\sin^2 2\alpha\quad\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right).$$

R. Plecînd de la reprezentarea parametrică $x=\pm 2\cos\alpha\operatorname{ch}u$, $y=-2\sin\alpha\operatorname{ch}u$, sîntem conduși la

$$z=\pm 2\cos(iw_1+\alpha),\quad w_1=i\alpha-i\arccos\left(\pm\frac{z}{2}\right).$$

Funcția w_1 are punctele critice $z=\pm 2$ interioare hiperbolei (focarele ei), deci determinările ei sînt separabile în exterior (§ 49). Avem

$$x=\pm 2\cos(v-\alpha)\operatorname{ch}u,\quad y=2\sin(v-\alpha)\operatorname{sh}u.$$

Pentru un punct exterior hiperbolei

$$\frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}-1=\left(\frac{\operatorname{sh}^2u}{\sin^2\alpha}+1\right)\left(\frac{\cos^2(v-\alpha)}{\cos^2\alpha}-1\right)<0,$$

deci $\cos^2(v-\alpha)<\cos^2\alpha$, de unde $2\alpha<v<\pi$ și $\pi+2\alpha<v<2\pi$. Se obțin astfel două benzi: $2\alpha<v<\pi$ și $\pi+2\alpha<v<2\pi$ care corespund fiecare biunivoc domeniului de mai sus, din planul (z). Considerăm pe cea dintîi. Ca în exercițiul 23, vom duce această bandă în semiplanul superior (w) prin

$$w=e^{\pi\frac{w_1-2\alpha i}{\pi-2\alpha}}=e^{-i\pi\frac{\alpha+\arccos\left(\pm\frac{z}{2}\right)}{\pi-2\alpha}}$$

37. *Fiind dată relația* $w = e^{z^2}$, *să se determine în planul* (z) *un domeniu care să corespundă biunivoc discului* $|w| < 1$ *tăiat după raza* $[0,1]$. *Punctele critice ale funcției inverse* $\sqrt{\log w}$. *Comportarea acestei funcții în cercurile de centre* $0,1,i$ *și rază* 1.

Punem $z = x + iy$, $w = u + iv = \rho e^{i\varphi}$. Avem

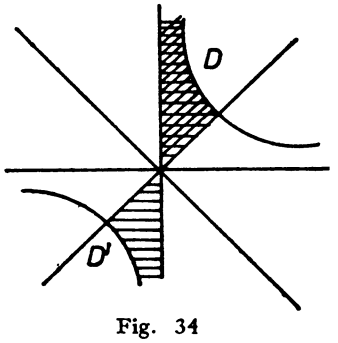

Fig. 34

$$\rho = e^{x^2 - y^2}, \quad \varphi = 2xy.$$

Domeniul din planul (w) fiind reprezentat biunivoc de $0 < \rho < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$, îi corespunde în planul (z) mulțimea A definită de

$$-\infty < x^2 - y^2 < 0, \quad 0 < xy < \pi.$$

Prima condiție definește unghiul superior și cel inferior dintre bisectoarele axelor. A doua, regiunea cuprinsă între axe și hiperbola

$$(H_0) \qquad xy = \pi.$$

Deci A este regiunea haşurată (vezi fig. 34).

La $0 < \rho = \text{const} < 1$ corespunde hiperbola

$$(H) \quad x^2 - y^2 = \log \rho$$

cuprinsă între axe și H_0. La $0 < \varphi = \text{const} < 1$ corespunde hiperbola

$$(K) \qquad xy = \varphi,$$

care taie H în două puncte simetrice față de O. Urmează că domeniul dublu haşurat este în corespondență biunivocă cu cercul precedent minus tăietura $[0,1]$.

Funcția $z = \sqrt{\log w}$ are punctele critice 0, ∞, 1. Cînd w rămîne în cercul dat, determinările lui $\log w$ sînt legate prin continuitate, dar determinările lui $\sqrt{\log w}$ constituie două funcții multiforme distincte, care iau valori respectiv în D și în domeniul D' simplu haşurat, cîtă vreme $0 < \varphi < 2\pi$. Cînd $2\pi < \varphi < 4\pi$ (w trecînd peste tăietură), z va descrie două domenii adiacente, limitate de hiperbolele $xy = \pi$, $xy = 2\pi$ și dreapta $x = y$ etc. În definitiv se vede că se obțin două funcții multiforme care iau valori în cele două unghiuri dintre bisectoarele axelor; aceste unghiuri sînt împărțite de axa imaginară și hiperbolele $xy = k$ în triunghiuri curbilinii ce reprezintă determinările funcției $\sqrt{\log w}$ din cercul tăiat. Cum cele două unghiuri sînt disjuncte, funcțiile multiforme ce iau valori în aceste unghiuri sînt separate în cercul $|w| < 1$. În cercul $|w - 1| < 1$, determinarea lui $\log w$, care se anulează în $w = 1$, ne dă două determinări ale lui $\sqrt{\log w}$ legate prin continuitate; celelalte determinări ale funcției sînt separate. În cercul $|w - i| < 1$ toate determinările sînt separate.

Capitolul III

Elemente de topologie a planului lui Gauss

§ 53. Spaţii cu vecinătăţi

Definiţie. *Se numeşte spaţiu cu vecinătăţi (spaţiu $\mathcal{V}$) o mulţime de puncte $\mathcal{S}$ în care e dată o familie de submulţimi (U) conţinînd mai mult decît un punct astfel că la orice punct $z \in \mathcal{S}$ corespunde (după o anumită regulă) cel puţin o mulţime U care să-l conţină pe z; aceasta se numeşte vecinătate a lui z şi se notează cu U_z.*

O mulţime $A \subset \mathcal{S}$ devine *un spaţiu cu vecinătăţi subordonat* lui $\mathcal{S}$ dacă se atribuie unui punct $z \in A$ vecinătăţile $U_z^A = U_z \cap A$.

Definiţie. *O transformare $w = f(z)$ care duce mulţimea $A \subset \mathcal{S}$ în mulţimea $B \subset \mathcal{T}$ ($\mathcal{S}$ şi $\mathcal{T}$ fiind spaţii cu vecinătăţi) se numeşte o reprezentare continuă a mulţimii A pe mulţimea B, dacă:*

1°. *La un $z \in A$ corespunde un singur $w \in B$ (f funcţie uniformă în A).*

2°. *Dacă $w = f(z)$, pentru orice V_w există o vecinătate U_z^A astfel că mulţimea $f(U_z^A) \subset V_w$ (f funcţie continuă în A).*

Transformarea $w = f(z)$ se numeşte homeomorfism dacă atît ea cît şi inversa ei sînt reprezentări continue, ale mulţimii A pe mulţimea B şi invers. Un homeomorfism este, cu alte cuvinte, o corespondenţă biunivocă şi bicontinuă.

Dacă $z_1 = f(z)$ este o reprezentare continuă a mulţimii A pe mulţimea B şi $z_2 = g(z_1)$ o reprezentare continuă a mulţimii B pe mulţimea C, atunci produsul celor două transformări, $z_2 = g(f(z)) = h(z)$ este o reprezentare continuă a mulţimii A pe mulţimea C. (Urmează imediat din definiţie).

Homeomorfismele unui spaţiu cu vecinătăţi (care reprezintă acest spaţiu pe el însuşi) formează un grup: *grupul topologic* al lui $\mathcal{S}$.

Căci după definiţie inversa unui homeomorfism este tot un homeomorfism şi după observaţia precedentă, produsul a două homeomorfisme de asemenea.

Topologia spaţiului $\mathcal{S}$ este totalitatea proprietăţilor păstrate de grupul topologic al lui $\mathcal{S}$. În loc de „topologia lui $\mathcal{S}$" se mai zice *structura topologică* a lui $\mathcal{S}$.

Printre proprietăţile de această natură sînt remarcabile acele de echivalenţă (identitate topologică):

Definiţie. *Două mulţimi A şi B din $\mathcal{S}$ se zic topologic echivalente (topologic identice) dacă există un homeomorfism a mulţimii A pe mulţimea B; se zice mai scurt că A şi B sînt homeomorfe în $\mathcal{S}$. Se scrie $A \sim B$.*

Evident: $A \tau B$ atrage $B \tau A$ (simetrie),

$A \tau B$ și $B \tau C$ atrag $A \tau C$ (transitivitate).

De unde apoi urmează că un homeomorfism a spațiului $\mathcal{S}$ duce două mulțimi topologic echivalente, $A \tau B$, în mulțimi topologice echivalente, $A_1 \tau B_1$. Căci $A_1 \tau A \tau B \tau B_1$ ceea ce tocmai probează că relația τ este de natură topologică.

Submulțimile spațiului $\mathcal{S}$ se împart în clase — numite tipuri topologice — formate din submulțimi topologic echivalente.

Aici ne interesează îndeosebi:

Planul euclidian C, unde am definit ca vecinătăți ale unui punct z, discurile de centru z.

Planul lui Gauss $\bar{C}$, care se obține adăugînd precedentului punctul ideal ∞, avînd ca vecinătăți exterioarele tuturor cercurilor.

Sfera lui Riemann, pe care definim ca vecinătăți ale unui punct calotele care îl conțin și îl au ca pol.

Exemplul 1. În planul euclidian sînt homeomorfisme asemănările (directe și indirecte) dar nu inversiunile.

În planul lui Gauss toate transformările liniare sînt homeomorfii.

Pe sfera lui Riemann sînt homeomorfisme rotațiile sferei în jurul unui diametru al ei.

Structura unui spațiu $\mathcal{S}$ cu vecinătăți depinde de familia sa de vecinătăți (U). Se poate ca două familii de vecinătăți, (U) și $(\underline{U})$, să dea aceeași structură, în care caz vom zice că cele două familii sînt (topologic) *echivalente*. Aceasta se întîmplă atunci și numai atunci, cînd o reprezentare $w = f(z)$ a lui $\mathcal{S}$ pe un spațiu oarecare $\mathcal{T}$ este homeomorfism față de vecinătățile $(\underline{U})$ dacă este homeomorfism față de vecinătățile (U) și vice-versa. Căci numai în aceste condiții spațiul $\mathcal{S}$ cu vecinătățile $(\underline{U})$ are același grup topologic ca spațiul $\mathcal{S}$ cu vecinătățile $(\underline{U})$. De aici se deduce ușor:

Pentru ca două familii de vecinătăți (U) *și* $(\underline{U})$, *să fie echivalente, este necesar și suficient ca orice vecinătate* U_z *să conțină o vecinătate* $\underline{U}_z$ *și viceversa (Hausdorff).*

Necesitatea: Fie $\mathcal{S} \to \mathcal{T}$ un homeomorfism f: $z \to w$ și U_z o vecinătate; îi corespunde o vecinătate V_w, și acesteia o vecinătate $\underline{U}_z$, astfel că $f^{-1}(V_w) \subset U_z$ și $f(\underline{U}_z) \subset V_w$ sau $\underline{U}_z \subset f^{-1}(V_w)$. De aici $\underline{U}_z \subset U_z$; și vice-versa.

Suficiența este evidentă.

De unde consecința:

O reprezentare biunivocă a spațiului $\mathcal{S}$ *pe el însuși este un homeomorfism dacă transformă familia* (U) *atașată lui* $\mathcal{S}$ *într-o familie echivalentă.*

Exemplul 2. Astfel în planul C amintim ca familii echivalente cu aceea a discurilor U_z: *Pătratele de centru z, discurile (care conțin pe z), dreptunghiurile (deschise) care conțin pe z. etc.*

În planul $\bar{C}$ putem lua ca vecinătăți ale punctului ∞, în cazul familiei de pătrate, exterioarele tuturor pătratelor (dreptunghiurilor).

Pe sferă, o familie de vecinătăți echivalentă cu cea definită mai sus este formată, pentru fiecare punct, de toate calotele care conțin acel punct.

Proiecția sterografică este o corespondență biunivocă între planul $\bar{C}$ și sferă. Ea duce cercurile (în sens larg) din $\bar{C}$ în cercuri pe sferă și deci vecinătățile U_z din $\bar{C}$ într-o familie de vecinătăți pe sferă. Așadar proiecția stereografică este un homeomorfism — ceea ce dealtfel se constată și din formulele acestei corespondențe (§ 5).

Planul lui Gauss şi sfera sînt deci topologie echivalente. Astfel se justifică întrebuinţarea sferei în locul planului lui Gauss, pentru a reprezenta o variabilă complexă. Aceasta are avantajul de a evita considerarea mulţimilor nemărginite (§ 5).

Dealtfel acelaşi scop poate fi atins pentru o mulţime nemărginită dată A, fără a ieşi din plan, aplicînd o inversiune sau o transformare $z = \dfrac{1}{z - \alpha}$ cu $\alpha \notin A$; şi acestea sînt homeomorfisme.

Prin faptul că un spaţiu $\mathcal{S}$ cu vecinătăţi determină, cum am văzut mai sus, vecinătăţi în orice mulţime $A \subset \mathcal{S}$, topologia lui $\mathcal{S}$ induce în submulţimea A, ca spaţiu subordonat lui $\mathcal{S}$, o topologie. Este evident că orice homeomorfism al lui $\mathcal{S}$ induce un homeomorfism între mulţimile A şi transformata ei B. Dar, reciproc, nu este necesar ca un homeomorfism al lui A pe B să fie indus de un homeomorfism al lui S (să se poată extinde la tot spaţiul $\mathcal{S}$).

§ 54. Noţiunile topologice fundamentale (în spaţiu $\mathcal{V}$)

Vom recapitula aici, sistematizîndu-le, noţiuni şi proprietăţi bine cunoscute.

Definiţii. *Fie $\mathcal{S}$ un spaţiu cu vecinătăţi. Faţă de o mulţime $A \subset \mathcal{S}$, un punct z poate fi:*

În A ori în complementara lui A, $\mathbf{C}A = \mathcal{S} - A$. Vom scrie

$$\mathcal{S} = A \cap \mathbf{C}A, \quad A \cap \mathbf{C}A = \varnothing.$$

Reamintim identităţile:

$$\mathbf{C}(A \cup B) = \mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B, \quad \mathbf{C}(A \cap B) = \mathbf{C}A \cup \mathbf{C}B, \quad \mathbf{C}(\mathbf{C}A) = A,$$

$$A - B = A \cap \mathbf{C}B, \; A \cap B = A - \mathbf{C}B = B - \mathbf{C}A.$$

Complementarea unei mulţimi A relativă la o mulţime R se notează $\mathbf{C}_R A = (\mathbf{C}A) \cap R$.

Punct interior, dacă există o vecinătate $U_z \subset A$. Mulţimea punctelor interioare se numeşte interiorul lui A şi se notează: int A:

Punct exterior dacă există o vecinătate $U_z \subset \mathbf{C}A$ ($U_z \cap A = \varnothing$). Punctele exterioare formează exteriorul lui A, care se notează: ext A.

Punct frontieră, dacă orice vecinătate U_z conţine atît puncte din A cît şi puncte din $\mathbf{C}A$ ($U_z \cap A \neq \varnothing$, $U_z \cap \mathbf{C}A \neq \varnothing$). Punctele frontieră formează frontiera lui A, care se notează: fr A.

Punct aderent, dacă orice vecinătate, U_z conţine puncte din A ($U_z \cap A \neq \varnothing$). Mulţimea punctelor aderente se numeşte aderenţa (închiderea) lui A : $\bar{A}$.

Punct limită, dacă orice vecinătate U_z conţine puncte din $A - z$ ($U_z \cap (A - z) \neq \varnothing$), mulţimea punctelor limită este mulţimea derivată A'.

Punct izolat, dacă există o vecinătate U_z care intersectează mulţimea A numai în punctul z ($U_z \cap A = z$). Mulţimea punctelor izolate se va nota cu $\dot{A}$.

Toate aceste noţiuni sînt de natură topologică: ele rămîn, în adevăr, neschimbate dacă se înlocuieşte familia de vecinătăţi dată, cu alta topologic echivalentă.

Din aceste definiții decurg ușor următoarele relații:

1. $\text{int } \mathcal{S} = \mathcal{S}$, $\text{ext } \mathcal{S} = \varnothing$, $\text{fr } \mathcal{S} = \varnothing$.
2. $\text{int } \varnothing = \varnothing$, $\text{ext } \varnothing = \mathcal{S}$, $\text{fr } \varnothing = \varnothing$.
3. $\text{int } \mathbf{C}A = \text{ext } A$, $\text{ext } \mathbf{C}A = \text{int } A$.
4. $\text{fr } A = \text{fr } \mathbf{C}A$.
5. $\mathcal{S} = \text{int } A \cup \text{ext } A \cup \text{fr } A$.
6. $\bar{A} = \text{int } A \cup \text{fr } A = A \cup \text{fr } A =$
$= \mathring{A} \cup A' = A \cup A'$.
7. $\mathcal{S} = \bar{A} \cup \text{ext } A = \overline{\mathbf{C}A} \cup \text{int } A$.
8. $\mathcal{S} = \mathring{A} \cup A' \cup \text{ext } A$.
9. $\text{fr } A = \bar{A} \cap \overline{\mathbf{C}A}$.
10. $\text{fr } A = A \cap (\overline{\mathbf{C}A})' \cup \overline{\mathbf{C}A} \cap A'$.

Scriem 9: $\text{fr } A = [(\bar{A} - A) \cup A] \cap \overline{\mathbf{C}A} = \bar{A} \cap \mathbf{C}A \cap \overline{\mathbf{C}A} \cup A \cap \overline{\mathbf{C}A}$
sau $\text{fr } A = A \cap \overline{\mathbf{C}A} \cup \mathbf{C}A \cap \bar{A}$.

De aici urmează 10 cu ajutorul ultimei relații 6.

11. *$A \subset B$ atrage*:

$$\text{int } A \subset \text{int } B,\ \text{ext } A \supset \text{ext } B,\ \bar{A} \subset \bar{B},\ A' \subset B'.$$

12. *Dacă (A) sînt mulțimi în număr finit sau nu, avem*
$\text{int } \cup A \supset \cup \text{int } A$, $\text{ext } \cap A \supset \cup \text{ext } A$, $\overline{\cap A} \subset \cap \bar{A}$.

Definiție. *O mulțime $A \subset \mathcal{S}$ se numește*:

Închisă, dacă $A = \bar{A}$.
Deschisă, dacă $A = \text{int } A$.
Perfectă, dacă $A = A'$.
Izolată, dacă $A = \mathring{A}$ sau $A' = \varnothing$.
Discretă, dacă $\text{int } A = \varnothing$.
Densă, în sine, dacă $\bar{A} = A'$.
Densă în $\mathcal{S}$, dacă $\bar{A} = \mathcal{S}$. Ceea ce înseamnă că orice vecinătate conține puncte din A.

Nicăderi densă în $\mathcal{S}$ (sau rară), dacă ext A e dens în $\mathcal{S}$ (adică $\overline{\text{ext } A} = \mathcal{S}$) sau $\text{int } \bar{A} = \varnothing$.

13. *Condiții necesare și suficiente pentru ca A să fie închisă:*

$$\bar{A} \subset A,\ A \supset \text{fr } A, \text{ sau } A \supset A'$$

Rezultă din 6.

14. *Condiții necesare și suficiente pentru ca A să fie deschisă*:

$$\text{int } A \supset A \text{ sau } A \cap \text{fr } A = \varnothing.$$

Rezultă din definiții.

15. *Pentru ca A să fie perfectă e necesar și suficient ca să fie închisă și densă în sine.*

16. *Condiția necesară și suficientă pentru ca A să fie densă în sine*:

$$A \subset A', \text{ sau } \mathring{A} = \varnothing.$$

Rezultă din 6.

17. *Pentru ca A să fie închisă e necesar şi suficient ca $\mathbf{C}A$ să fie deschisă. Şi vice-versa.*

Rezultă din 4, 13, 14.

18. *$\varnothing$ şi $\mathcal{S}$ sînt şi închise şi deschise.*

Rezultă din 1, 2, 6.

19. *Pentru ca A să fie totodată închisă şi deschisă este necesar şi suficient ca fr $A = 0$.*

Rezultă din 13, 14.

20. *Dacă mulţimile (A), în număr finit sau nu, sînt* $\left\{\begin{array}{l}\text{închise,}\\ \text{deschise}\end{array}\right.$ *atunci* $\left\{\begin{array}{l}\cap A \text{ este închisă}\\ \cup A \text{ este deschisă.}\end{array}\right.$

Rezultă din 12.

Consecinţă. *Dacă A e închisă şi B deschisă, $A - B = A \cap \mathbf{C}B$ este închisă.*

Fie $\mathcal{R}$ un spaţiu subordonat lui $\mathcal{S}$. Noţiunile de mai sus se pot aplica unei mulţimi $A \subset \mathcal{R}$, fie considerînd pe A în $\mathcal{S}$ (noţiuni absolute), fie considerînd pe A în $\mathcal{R}$ (noţiuni relative (la $\mathcal{R}$)). Evident, şi acestea din urmă fac parte din topologia lui $\mathcal{S}$, dar sînt în general diferite de cele dintîi. De exemplu: $\mathcal{R}$ este închis şi deschis în el însuşi, dar poate să nu fie nici închis şi nici deschis în $\mathcal{S}$.

Vom întrebuinţa notaţiile $\operatorname{int}_{\mathcal{R}} A$, $\operatorname{ext}_{\mathcal{R}} A$, $\operatorname{fr}_{\mathcal{R}} A$, $\bar{A}^{\mathcal{R}}$, $A'^{\mathcal{R}}$, $\mathring{A}^{\mathcal{R}}$ pentru mulţimile indicate, relative la $\mathcal{R}$ $(A \subset \mathcal{R})$. Vom vedea dealtfel că ne putem dispensa de aceşti simboli, căci îi putem exprima cu ajutorul simbolilor absoluţi.

Avem mai întîi formulele evidente

21. $$\mathring{A}^{\mathcal{R}} = \mathring{A},$$

22. $$A'^{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cap A'$$

de unde, ţinînd seama de 6 rezultă:

$$\bar{A}^{\mathcal{R}} = A \cup A'^{\mathcal{R}} = A \cup \mathcal{R} \cap A' = \mathcal{R} \cap A \cup \mathcal{R} \cap A' = \mathcal{R} \cap (A \cup A') = \mathcal{R} \cap \bar{A},$$

adică

23. $$\bar{A}^{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cap \bar{A}$$

(sau direct: un $z \in \bar{A}^{\mathcal{R}}$ este caracterizat prin: $z \in \mathcal{R}$ şi $A \cap U_z^{\mathcal{R}} = A \cap \mathcal{R} \cap U_z = A \cap U_l \neq \varnothing$, pentru orice U_z; a doua relaţie spune că $z \in \bar{A}$).

Apoi avem (după 7)

$$\operatorname{ext}_{\mathcal{R}} A = \mathcal{R} - \bar{A}^{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - \mathcal{R} \cap \bar{A}$$

sau

24. $$\operatorname{ext}_{\mathcal{R}} A = \mathcal{R} - \bar{A} = \mathcal{R} \cap \operatorname{ext} A.$$

Şi tot aşa

$$\operatorname{int}^{\mathcal{R}} A = \mathcal{R} - \overline{(\mathcal{R} - A)}^{\mathcal{R}} = \mathcal{R} - \mathcal{R} \cap \overline{(\mathcal{R} - A)}$$

sau

25. $$\operatorname{int}_{\mathcal{R}} A = \mathcal{R} - \overline{(\mathcal{R} - A)} = \mathcal{R} \cap \operatorname{ext} (\mathcal{R} - A).$$

Altfel: $z \in \operatorname{int}^{\mathcal{R}} A$ înseamnă: $z \in \mathcal{R}$ şi există $U_z^{\mathcal{R}} \cap (\mathcal{R} - A) = \varnothing$ sau $U_z \cap \mathcal{R} \cap (\mathcal{R} - A) = \varnothing$, sau $U_z \cap (\mathcal{R} - A) = \varnothing$, adică $z \in \operatorname{ext} (\mathcal{R} - A)$.

În sfîrşit, după 9.

$$\operatorname{fr}_{\mathcal{R}} A = \bar{A}^{\mathcal{R}} \cap \overline{(\mathcal{R} - A)}^{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cap \bar{A} \cap \mathcal{R} \cap \overline{(\mathcal{R} - A)}$$

sau

26. $$\operatorname{fr}_{\mathcal{R}} A = \mathcal{R} \cap \bar{A} \cap \overline{(\mathcal{R} - A)} = \mathcal{R} - [\operatorname{ext} A \cup \operatorname{ext} (\mathcal{R} - A)].$$

Pentru mulţimi închise în $\mathcal{R}$, deschise în $\mathcal{R}$, dense în $\mathcal{R}$, avem teoremele ce urmează, la care vom adăuga încă una mai tîrziu:

27. *Dacă A este intersecţia mulţimii $\mathcal{R}$ cu o mulţime*

$$B \left\{ \begin{matrix} \text{închisă} \\ \text{deschisă} \end{matrix} \right. \text{(absolut)}, \quad A \text{ este } \left\{ \begin{matrix} \text{închisă} \\ \text{deschisă} \end{matrix} \right. \text{în } \mathcal{R}.$$

Aplicînd 11, avem în adevăr, dacă B este închisă (deci $B' \subset B$)

$$A'^{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cap A' \subset \mathcal{R} \cap B' \subset \mathcal{R} \cap B = A,$$

ceea ce dovedeşte prima parte, după 13. A doua parte rezultă din cea dintîi aplicînd 17 şi observînd că $\mathcal{R} - A = \mathcal{R} - B = \mathcal{R} \cap \mathbf{C}B$ este închisă în $\mathcal{R}$ pentru că $\mathbf{C}B$ este închisă.

Consecinţă. *O mulţime închisă sau deschisă este tot astfel şi relativ la orice mulţime care o conţine.*

28. *Dacă A este* $\left\{ \begin{matrix} \text{închisă} \\ \text{deschisă} \end{matrix} \right.$ *în $\mathcal{R}_1$ şi în $\mathcal{R}_2$, atunci este* $\left\{ \begin{matrix} \text{închisă} \\ \text{deschisă} \end{matrix} \right.$ *şi în $\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.*

Prima parte:

$$A = \mathcal{R}_1 \cap \bar{A} = \mathcal{R}_2 \cap \bar{A} = (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \cup \bar{A}.$$

Partea a doua: prin ipoteză $A = \mathcal{R}_1 \cap \operatorname{ext} (\mathcal{R}_1 - A) = \mathcal{R}_2 \cap \operatorname{ext} (\mathcal{R}_2 - A)$ (după 25), de unde se deduce uşor

$$A = (\mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2) \cap [\operatorname{ext} (\mathcal{R}_1 - A) \cap \operatorname{ext} (\mathcal{R}_2 - A)]$$

şi rămîne să aplicăm 27, observînd că mulţimea $[\operatorname{ext} (\mathcal{R}_1 - A) \cap \operatorname{ext} (\mathcal{R}_2 - A)]$ este deschisă (34 şi 41).

29. *Dacă A este densă în sine faţă de unul din spaţiile $\mathcal{S}$ sau $\mathcal{R}$, este densă în sine şi faţă de celălalt spaţiu.*

Rezultă imediat din 15 şi 21.

30. *Dacă A este izolată faţă de unul din spaţiile $\mathcal{S}$ sau $\mathcal{R}$ este izolată şi faţă de celălalt spaţiu.*

31. *Pentru ca mulțimea* $A \subset \mathcal{R}$ *să fie densă în* $\mathcal{R}$ *este necesar și suficient ca*

$$\mathcal{R} \subset \bar{A}.$$

A densă în $\mathcal{R}$ înseamnă (ca proprietate relativă) $\bar{A}^{\mathcal{R}} = \mathcal{R}$, adică $\mathcal{R} \cap \bar{A} = \mathcal{R}$, adică $\mathcal{R} \subset \bar{A}$.

Toate cele de mai sus se aplică la orice spațiu cu vecinătăți și în particular planelor C, $\bar{C}$ și sferei. Proprietăți noi apar cînd vecinătățile satisfac condiții particulare (de natură topologică).

Astfel să admitem că, așa cum se întîmplă în cele trei spații precedente,

α) *Dacă* U_z^1, U_z^2 *sînt două vecinătăți ale punctului* z, *există o a treia* U_z *conținută în ambele* ($U_z \subset U_z^1$, $U_z \subset U_z^2$). *(Axioma I al lui Hausdorff).*

β) *Pentru orice* U_z *există o vecinătate* $U_z' \subset U_z$, *astfel că fiecare* $z_1 \subset U_z'$ *are o vecinătate* $U_{z_1} \subset U_z$. *(Cu alte cuvinte, int* U_z *conține nu numai punctul* z, *ci și o vecinătate* U_z'). *(Axioma II al lui Hansdorff)*

γ) *Dacă* $z \neq z'$, *există o vecinătate* U_z *disjunctă de* z' ($U_z \cap z' = \varnothing$) *(Axioma lui Fréchet).*

Spațiile care satisfac condițiile α), β), γ), se numesc *spații topologice* (A. Weil). Denumirea se aplică în mod obișnuit spațiilor care satisfac α) și β). În aceste spații sînt adevărate și următoarele[6]).

32. A_n fiind mulțimi în număr finit,

$$\operatorname{int} \cap A_n = \cap \operatorname{int} A_n, \quad \operatorname{ext} \cup A_n = \cap \operatorname{ext} A_n. \quad [\alpha)]$$

33. $\overline{\cup A_n} = \cup \bar{A}_n$, $(\cup A_n)' = \cup A_n'$. [α)]

Relația a doua: Din 11 urmează $(\cup A_n)' = \cup A_n'$. Dacă $z \in (\cup A_n)'$, trebuie să avem $z \in A_n'$ pentru un n, căci în cazul contrar ar exista niște U_z^n astfel că $(U_z^n - z) \cap A_n = \varnothing$ (pentru toți n), și deci o vecinătate U_z comună [α)] cu $(U_z - z) \cap A_n = \varnothing$ și $(U_z - z) \cap \cup A_n = \varnothing$, contrar ipotezei. Așa dar avem și $(\cup A_n)' \subset \cup A_n'$.

Relația a doua ne dă apoi imediat pe cea dintîi, aplicînd ultima relație 6.

34. *Dacă* A_n, *în număr finit, sînt* $\left\{\begin{matrix} \text{închise} \\ \text{deschise} \end{matrix}\right.$, $\left\{\begin{matrix} \cup A_n \text{ este închisă} \\ \cap A_n \text{ este deschisă} \end{matrix}\right.$.

Urmează din 33 și 32. [α)]

Consecință. *Dacă* A *e deschisă și* B *închisă,* $A - B = A \cap \mathbf{C}B$ *este deschisă.*

35. $$\operatorname{fr}(A \cap B) \subset \bar{B} \cap \operatorname{fr} A \cup \bar{A} \cap \operatorname{fr} B.$$

Într-adevăr, avem aplicînd 9, 12, 33:

$$\operatorname{fr}(A \cap B) = \overline{A \cap B} \cap \overline{\mathbf{C}(A \cap B)} = \overline{A \cap B} \cap \overline{\mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B} =$$

$$= \overline{A \cap B} \cap (\overline{\mathbf{C}A} \cup \overline{\mathbf{C}B}) \subset \bar{A} \cap \bar{B} \cap (\overline{\mathbf{C}A} \cup \overline{\mathbf{C}B}) = \bar{B} \cap (\bar{A} \cap \overline{\mathbf{C}A}) \cup \bar{A} \cap (\bar{B} \cap \overline{\mathbf{C}B}).$$

În 35 nu putem pune, în general, $=$ (Vezi exemplul 8, § 70). Dar,

36. *Dacă* A *și* B *sînt amîndouă închise sau amîndouă deschise, avem*

$$\operatorname{fr}(A \cap B) \supset B \cap \operatorname{fr} A \cup A \cap \operatorname{fr} B. \quad [\alpha)]$$

cu egalitate în cazul A *și* B *închise.*

[6]) În exercițiile care urmează se va indica la dreapta în paranteză pătrată care din condițiile α), β), γ) este satisfăcută.

În primul caz, calculul de la 35 ne dă egalitate pentru că $A \cap B$ fiind închisă, avem $A \cap B = \overline{A \cap B} = \bar{A} \cap \bar{B}$.

În al doilea caz este destul să demonstrăm $B \cap \operatorname{fr} A \subset \operatorname{fr}(A \cap B)$. Ori dacă $z \in B \cap \operatorname{fr} A$, z nu este în A, deci nici în $A \cap B$; apoi există o vecinătate $U_z^0 \subset B$ și orice vecinătate U_z conține o vecinătate $U_z^1 \subset U_z^0$ [α)], în care se află puncte din A și deci din $A \cap B$. Din toate acestea rezultă $z \in \operatorname{fr}(A \cap B)$.

37. $\operatorname{fr}(A \cup B) \subset \overline{\mathbf{C}B} \cap \operatorname{fr} A \cup \overline{\mathbf{C}A} \cap \operatorname{fr} B$. [α)]

Urmează din 35 prin complementarizare:

$$\operatorname{fr}(A \cup B) = \operatorname{fr} \mathbf{C}(A \cup B) = \operatorname{fr}(\mathbf{C}A \cap \mathbf{C}B) \subset \overline{\mathbf{C}B} \cap \operatorname{fr} A \cup \overline{\mathbf{C}A} \cap \operatorname{fr} B.$$

38. *Dacă A și B sînt amîndouă închise sau deschise*

$$\operatorname{fr}(A \cup B) \supset \mathbf{C}B \cup \operatorname{fr} A \cup \mathbf{C}A \cap \operatorname{fr} B \quad [\alpha)]$$

cu egalitate în cazul A și B deschise.

Urmează la fel din 36.

39. $\operatorname{fr} \cup A_n \subset \cup \operatorname{fr} A_n$, $\operatorname{fr} \cap A_n \subset \cup \operatorname{fr} A_n$.

Urmare evidentă a formulelor 35, 37.

40. *Dacă $\bar{A}_n$ sînt disjuncte și în număr finit*

$$\operatorname{fr} \cup A_n = \cup \operatorname{fr} A_n. \quad [\alpha)]$$

Ajunge să demonstrăm $\operatorname{fr} A_1 \subset \operatorname{fr} \cup A_n$: dacă $z \in \operatorname{fr} A_1$, $z \in \bar{A}_1$, deci z nu este în $\bar{A}_2$, ... și există o vecinătate U_z^0 disjunctă de A_2, ... Orice vecinătate U_z conține o vecinătate $U_z' \subset U_z^0$ și aceasta conține puncte din A_1, deci din $\cup A_n$, precum și puncte care nu sînt în A_1 și nici în A_2, ... (fiind în U_z^0), deci nici în $\cup A_n$.

41. $\operatorname{int}(\operatorname{int} A) = \operatorname{int} A$, $\operatorname{int}(\operatorname{ext} A) = \operatorname{ext} A$ [β)]

adică int A și ext A sînt mulțimi deschise

42. $A'' = (A')' \subset A'$, $(\bar{A}) = \bar{A}$, [β)]

$$\overline{\operatorname{fr} A} = \operatorname{fr} A \quad [\alpha)], [\beta)]$$

Prima relație se vede ușor. Din ea urmează după 6:

$$(\bar{A}) = \overline{A \cup A'} = \bar{A} \cup \bar{A}' = \bar{A} \cup \overline{A' \cup A''} = \bar{A} \cup \bar{A}' \cup \bar{A}'' = \bar{A}$$

căci $A'' \subset A' \subset \bar{A}$ Demonstrația directă este deasemenea imediată. În sfîrșit

$$\overline{\operatorname{fr} A} = \bar{A} \cap \overline{\mathbf{C}\bar{A}} = \bar{A} \cap \overline{\mathbf{C}A} = \operatorname{fr} A$$

pentru că $\bar{A}$, $\mathbf{C}A$ și deci $\bar{A} \cap \overline{\mathbf{C}A}$ sînt închise.

Relațiile 42 spun că, oricare ar fi A, A', A'', ..., $\bar{A}$, $\operatorname{fr} A$ sînt mulțimi închise.

43. *Într-un spațiu cu vecinătăți care satisface β), mulțimile deschise constituie o familie de vecinătăți (topologic echivalentă cu cea dată).*

44. *$\{z\}$ fiind mulțimea formată din unicul punct z,*

$$\overline{\{z\}} = \{z\}, \{z\}' = \varnothing. \quad [\gamma)]$$

45. *Dacă* A *este* $\left\{\begin{array}{l}\textit{închisă}\\ \textit{deschisă}\end{array}\right.$, *în mulțimea* $\mathcal{R}$ $\left\{\begin{array}{l}\textit{închisă}\\ \textit{deschisă}\end{array}\right.$ *atunci* A *este* $\left\{\begin{array}{l}\textit{închisă}\\ \textit{deschisă}\end{array}\right.$ *absolut.*

Prima parte este valabilă în orice spațiu V: $A = \bar{A}^{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cap \bar{A}$ este închisă ca intersecție de mulțimi închise (20, 42). Sau fără a face apel la β): Din $A \subset \mathcal{R}$ rezultă (după 11) $\bar{A} \subset \mathcal{R}$ sau $\bar{A} \subset \mathcal{R}$. Deci $A = \mathcal{R} \cap \bar{A} = \bar{A}$.

A doua parte presupune α) și β): $A = \text{int}_{\mathcal{R}} A = \mathcal{R} \cap \text{ext}\,(\mathcal{R} - A)$ este deschisă ca intersecție a două mulțimi deschise (34, 41).

Terminăm cu o observație evidentă:

Dacă spațiul $\mathcal{S}$ satisface una din condițiile α), β), γ) și un spațiu subordonat $\mathcal{R}$ o satisface.

§ 55. Spații compacte

Definiție. *Se zice că o mulțime A dintr-un spațiu topologic este compactă, dacă orice submulțime infinită (adică având o infinitate de puncte distincte) a mulțimii A are cel puțin un punct limită în A.* Noțiunea are evident caracter topologic.

După această definiție o mulțime finită este compactă.

Definiția se aplică și la spații (topologice).

Teorema 1. *Planul $\bar{C}$ și sfera, mulțimile închise ale acestora, precum și mulțimile închise și mărginite ale planului S sînt compacte (Bolzano-Weierstrass).*

În ce privește ultima afirmație, va fi deajuns să arătăm că o mulțime infinită și mărginită, $A \subset C$, are un punct limită (care va fi în A dacă A este închisă). Putem acoperi A cu un pătrat de latură l,

Q_0) $$a_0 \leqslant x \leqslant a_0', \quad b_0 \leqslant y \leqslant b_0'.$$

Să împărțim Q_0 în 4 pătrate de latură $\frac{1}{2}l$. Unul din ele va conține o infinitate de puncte din A; fie acesta

Q_1) $$a_1 \leqslant x \leqslant a_1', \quad b_1 \leqslant y \leqslant b_1'.$$

Procedînd la fel cu Q_1 și așa mai departe, obținem un șir de pătrate Q_n, de laturi $\frac{1}{2^n}l$

Q_n) $$a_n \leqslant x \leqslant a_n', \quad b_n \leqslant y \leqslant b_n'$$

astfel că a_n și b_n cresc monoton, iar a_n' și b_n' descresc monotom, în timp ce

$$a_n' - a_n = b_n' - b_n = \frac{1}{2^n}l.$$

Urmează că există limitele $a_n \to a$, $a_n' \to a$, $b_n \to b$, $b_n' \to b$. O vecinătate pătrată $V_{(a,b)}$ a punctului (a, b) conține pătratul Q_n $(n > \nu)$ și prin urmare (a, b) este un punct limită al mulțimii A.

În $\bar{C}$ teorema este verificată dacă A are ∞ ca punct limită; dacă nu, A este, cu eventuala excepție a acestui punct, într-un cerc destul de mare, deci este mărginită în S și se aplică rezultatul obținut mai sus. În sfîrșit teorema se aplică și sferei, care este homeomorfă cu $\bar{C}$.

Observație. Planul euclidian C nu este compact căci există mulțimi infinite care nu au puncte limită (în C).

Exemplu: $z_n = n$.

Teorema 2. *Într-un spațiu compact, orice mulțime închisă este compactă.*
Dacă $A \subset \mathcal{S}$ este închisă, orice submulțime infinită $B \subset A$ are puncte limită în $\mathcal{S}$ și deci în A.

Teorema 3. *Într-un spațiu compact, un șir de mulțimi închise și $\neq \emptyset$, în care fiecare mulțime conține pe cea următoare (șir monoton descrescător) are o intersecție $\neq \emptyset$ (Cantor).*
Fie $A_0 \supset A_1 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$ șirul dat. Teorema este evident verificată dacă șirul conține numai un număr finit de mulțimi distincte. În cazul contrar, fie $B_0 = A_0$, apoi B_1 prima mulțime a șirului care este $\neq B_0$, B_2 prima mulțime $\neq B_0$, B_1 etc. Șirul $B_0 \supset B_1 \supset \ldots$ conține toate mulțimile date și este format din mulțimi distincte. Există un șir de puncte $z_0 \in B_n - B_{n+1}$ evident distincte și deci în număr infinit. $\mathcal{S}$ fiind compact, punctele z_n au un punct limită ζ. Acesta este și punct limită al șirului $z_n, z_{n+1}, \ldots$ (axioma lui Fréchet și prima axiomă a lui Hausdorff, § 54), deci acest șir fiind $\subset B_n$ închisă, avem $\zeta \in B_n$ (11, § 54) și prin urmare $\zeta \in A_n$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

Teorema 4. *Dintr-o familie numărabilă de mulțimi deschise care acoperă un spațiu compact, se poate extrage o familie finită, cu aceeași proprietate.*
Fie $\{B_n\}$ familia dată. Să punem $A_n = \mathcal{S} - (B_0 \cup \ldots \cup B_n)$. Evident, A_n sînt închise și $A_0 \supset A_1 \supset \ldots$. Dacă aceste mulțimi ar fi toate $\neq \emptyset$, ele ar avea un punct comun, pe care familia $\{B_n\}$ nu l-ar acoperi. Deci există o mulțime $A_n = \emptyset$, adică avem $\mathcal{S} = B_0 \cup \ldots \cup B_n$.

Observație. Proprietatea din enunț caracterizează spațiile compacte.

§ 56. Topologie în spații metrizabile

Spațiile $C, \bar{C}$ și sfera intră în categoria de spații descrise în următoarea

Definiție. *Un spațiu $\mathcal{S}$ cu vecinătăți se zice metrizabil dacă:*

1°. *Se poate defini în $\mathcal{S}$ o funcție reală și uniformă $\rho(z, z')$ de o pereche de puncte oarecare, numită funcție de distanță, astfel încît:*

a) $\rho(z, z') \geqslant 0$

b) $\rho(z, z') = \rho(z', z)$

c) $\rho(z, z') = 0$ *atunci și numai atunci cînd* $z = z'$

d) z, z', z'' *fiind trei puncte oarecare, avem inegalitatea triunghiulară*
$$\rho(z, z') \leqslant \rho(z, z'') + \rho(z', z'').$$

2°. *Mulțimile $U_z(R)$ definite prin*
$$\rho(z, z') < R, \quad R > 0,$$
constituie o familie de vecinătăți (echivalentă cu aceea dată apriori în $\mathcal{S}$). Vecinătățile astfel definite se numesc sferice. Se mai zice că funcția $\rho(z, z')$ definește o metrică în $\mathcal{S}$.

Planul C şi sfera sînt evident metrizabile, luîndu-se pentru $\rho(z, z')$ distanţa euclidiană $\overline{z, z'}$. Vecinătăţile pe care le-am ataşat acestor spaţii sînt chiar vecinătăţile $U_z(R)$ ale definiţiei.

În planul lui Gauss $\bar{C}$ vom lua pentru $\rho(z, z')$ distanţa punctelor ce coresupund la z şi z' pe sferă, în proiecţia stereografică. Cum această corespondenţă este un homeomorfism (§ 5), la vecinătăţile $U_z(R)$ ale sferei corespund vecinătăţi $U_z(R)$ în $\bar{C}$.

Prin acelaşi procedeu, metrica unui spaţiu $\mathcal{S}$ metrizabil se poate transplanta în orice spaţiu homeomorf cu $\mathcal{S}$, care devine astfel şi el metrizabil. Noţiunea de spaţiu metrizabil este deci topologică.

Un spaţiu subordonat unui spaţiu metrizabil este şi el metrizabil cu aceeaşi metrică.

Într-un spaţiu metrizabil pot exista mai multe metrici — chiar o infinitate.

Exemple. Pe sferă putem lua ca funcţie de distanţă, distanţa geodezică, adică lungimea celui mai scurt arc de cerc mare între două puncte.

În S putem lua ca funcţie de distanţă $\rho(z,z_0) = |x - x_0| + |y - y'|$. Se vede uşor că a) — d) sînt satisfăcute. O vecinătate $U_z(R)$ este în acest caz un pătrat cu diagonalele paralele axelor şi centrul în z; este clar că aceste vecinătăţi satisfac condiţia de echivalenţă.

În general avem:

Teorema 1. *Pentru ca două metrici, $\rho(z, z')$ şi $\sigma(z, z')$, să fie topologic echivalente, e necesar şi suficient ca pentru fiecare punct ζ, $\rho(\zeta, z)$ şi $\sigma(\zeta, z)$ să tindă simultan la* 0.

Aceasta înseamnă: fiind dat $R > 0$, există un $R' > 0$ astfel că

$$\sigma(\zeta, z) < R' \quad \text{atrage} \quad \rho(\zeta, z) < R$$

şi

$$\rho(\zeta, z[) < R' \quad \text{atrage} \quad \sigma(\zeta, z) < R.$$

Condiţia este suficientă: ea ne spune, în adevăr că, fiind dată $U_\zeta(R)$, există o vecinătate $V_\zeta(R') \subset U_\zeta(R)$, şi vice-versa; adică cele două familii de vecinătăţi sînt echivalente.

Condiţia este necesară: dacă cele două familii de vecinătăţi sînt echivalente, trebuie să avem inegalitatea de mai sus în condiţiile indicate.

Ne vom servi întotdeauna de metricile definite mai sus pentru spaţiile noastre, $C, \bar{C}$ şi sfera. În ultimele două, funcţia de distanţă este mărginită: $0 \leqslant \rho \leqslant 2$. În C ea nu este mărginită, şi — în raport cu această metrică — putem avea mulţimi de puncte mărginite sau nemărginite. Distincţia aceasta este legată de metrica aleasă şi nu are caracter topologic, căci putem întotdeauna înlocui o metrică $\rho(z, z')$ prin alta $\sigma(z, z')$ mărginită şi echivalentă cu prima.

Exemplu. În cazul lui S nu avem decît să luăm metrica sferei. În general, putem pune

$$\sigma(z,z') = \begin{cases} \rho(z, z') & \text{cînd } \rho(z, z') \leqslant 1, \\ 1 & \text{cînd } \rho(z, z') > 1. \end{cases}$$

Condiţiile a), b), c) sînt evident satisfăcute. Cît priveşte condiţia d)

$$\sigma(z,z') \leqslant \sigma(z,z'') + \sigma(z',z'')$$

ea este evidentă cînd unul din termenii membrului al doilea este $= 1$, căci atunci membrul al doilea este $\geqslant 1$, în timp ce $\sigma(z, z_0) \leqslant 1$ prin definiţie; în cazul contrar, avem

$$\sigma(z, z') \leqslant \rho(z, z') \leqslant \rho(z, z'') + \rho(z', z'') = \sigma(z, z'') + \sigma(z_0, z'').$$

În sfîrşit cele două metrici sînt echivalente în virtutea teoremei precedente.

Observație. Acest exemplu arată că *nu* toate proprietățile legate de o metrică sînt de natură topologică. După cum proprietățile topologice nu sînt particulare unei familii de vecinătăți, ci comune tuturor familiilor de vecinătăți echivalente, tot așa ele sînt comune tuturor metricilor echivalente. Dacă o noțiune sau propoziție nu este exprimată direct prin noțiuni deja recunoscute ca topologie, caracterul ei topologie va putea fi dovedit prin invarianța ei față de homeomorfisme, sau față de o schimbare a familiei de vecinătăți în alta echivalentă, sau (în spații metrizabile) față de o schimbare a metricii în alta echivalentă.

Vecinătățile și metricile joacă așa dar numai un rol accesoriu în topologie.

Spațiile metrizabile sînt cele mai importante pentru studiul nostru, pentru că ele constituie generalizarea imediată a planelor $C, \bar{C}$ și a sferei. Aceste spații nu sînt de altfel atît de particulare cît par. S-a demonstrat (Urysohn) că orice spațiu topologic care satisface și condiția 8, § 59 (spațiu normal) este homeomorf cu o mulțime dintr-un spațiu euclidian și prin aceasta este metrizabil.

Teorema 2. *Într-un spațiu metrizabil orice mulțime compactă e închisă și mărginită (cu orice metrică).*

Fie A mulțimea dată și $\zeta \in A'$. Există în fiecare mulțime $A \cap U_\zeta\left(\frac{1}{n}\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ cîte un punct z_n și aceste puncte, fiind distincte în număr infinit, au un punct limită, care nu poate fi decît ζ: căci oricare ar fi $z \neq \zeta$, există o vecinătate $U_z(R)$, cu $R < \rho(z, \zeta) - \frac{1}{n}$ și $n > \frac{1}{\rho(z, \zeta)}$, care exclude punctele z_n cu începere de la un anumit rang. Așadar $\zeta \in A$.

În al doilea rînd, dacă A nu ar fi mărginită, am putea defini un șir de puncte $z_p \in A$, astfel că

$$\rho(z_1, z_p) > \rho(z_1 z_{p-1}) + 1;$$

atunci $\rho(z_p, z_q) \geq |\rho(z_1, z_p) - \rho(z_1, z_q)| > 1$ $(p \neq q)$ și acest șir n-ar avea nici un punct limită.

Corolar. *Un spațiu compact metrizabil e mărginit (în orice metrică).*

Teorema 3. *Mulțimile compacte ale unui spațiu metrizabil compact sînt cele închise.*

Rezultă din teorema precedentă și teorema 2 § 55.

Definiție. *Se zice că un număr finit de puncte dintr-un spațiu $\mathcal{S}$ formează o ε — rețea, dacă orice punct al lui $\mathcal{S}$ este la distanță $< \varepsilon$ de unul din acele puncte.*

Teorema 4. *Într-un spațiu metrizabil compact există ε-rețele pentru orice $\varepsilon > 0$.*

În adevăr, z_1 fiind un punct, să definim inductiv punctele z_n astfel ca z_n să fie la distanță $\geq \varepsilon$ de punctele deja alese. Punctele z_n nu pot fi în număr infinit pentru că nu pot avea nici un punct limită. Dacă de exemplu șirul se oprește la z_n, toate punctele lui $\mathcal{S}$ sînt la distanță $< \varepsilon$ de unul din punctele $z_1, \ldots, z_n$: $\mathcal{S} = \sum_1^n U_{z_\nu}(\varepsilon)$.

Definiție. *Se zice că un spațiu S este separabil, dacă conține o submulțime numărabilă și densă (în S).*

Teorema 5. *Un spațiu metrizabil compact este separabil.*

În adevăr, dacă P_n sînt $(1/n)$ rețele, mulțimea, $\bigcup_1^\infty P_n$ este evident numărabilă și densă în S, căci oricare ar fi punctul z, există într-o vecinătate $U_z(R)$ puncte din P_n $(n > 1/R)$.

Teorema 4 spune că un spațiu metrizabil compact poate fi acoperit cu un sistem finit de vecinătăți de rază $< \varepsilon$ dat. Vom stabili acum un rezultat mult mai general. Avem nevoie de următoarea

Lemă. *Dacă mulțimile deschise $\{D\}$ acoperă spațiul metrizabil compact S, există un $\varepsilon > 0$ astfel că orice vecinătate de rază $\leqslant \varepsilon$ e conținută într-o mulțime D.*

În adevăr, dacă nu ar fi așa, ar exista pentru fiecare n un punct z_n astfel că $U_{z_n}(1/n)$ nu este în nici o mulțime D. Aceste puncte pot fi presupuse distincte în număr infinit, pentru că, pentru oricare z există o vecinătate $U_z(1/m)$ cu m destul de mare conținută în aceeași mulțime D ca z. Fie ζ un punct limită al acelor puncte și D_0 mulțimea dată care îl conține; D_0 conține o vecinătate $U_\zeta(2/\nu)$. Vecinătatea $U_\zeta(1/\nu)$ conține puncte z_n cu $n > \nu$ și prin urmare vecinătățile $U_{z_n}(1/n)$ ale acestor puncte vor fi în $U_\zeta(2/\nu)$ și deci în D_0, contrar presupunerii.

Teorema 6. *(Heine-Borel-Lebesque). Dintr-o familie infinită (numărabilă sau nu) de mulțimi deschise, care acoperă un spațiu metrizabil compact, se poate extrage o familie finită avînd aceeași proprietate.*

Fie ε numărul stabilit de lemă pentru familia dată $\{D\}$ și P o ε — rețea în spațiul nostru, $P = (z_1, \ldots, z_q)$. Fiecare $U_{z_n}(\varepsilon)$ $(n = 1, 2, \ldots, q)$ se află într-o mulțime D_n a familiei date și avem $S = \bigcup_1^q U_{z_n}(\varepsilon) = \bigcup_1^q D_n$. Mulțimile $D_1, \ldots, D_q$ acoperă așa dar S.

Observație. Teorema aceasta spune mai mult decît teorema 4, § 55. Un spațiu care posedă proprietatea din enunț se numește *bicompact*. Spațiile metrizabile compacte sînt așa dar chiar bicompacte.

§ 57. Reprezentări continue și homeomorfisme

Fiind dată o reprezentare $w = f(z)$ a spațiului S pe spațiul $\mathcal{T}$ (f funcție uniformă ale cărei valori umplu spațiul $\mathcal{T}$), vom nota cu f^{-1} transformarea inversă (care poate să nu fie uniformă și deci să nu fie o reprezentare).

Vom scrie de exemplu $B = f(A)$ pentru a indica transformata unei mulțimi A prin f și în mod analog $A_1 = f^{-1}(B)$ (se poate ca $A_1 \supset A$).

Vom presupune că S și $\mathcal{T}$ sînt spații topologice (cel puțin).

Teorema 1. *O reprezentare $B = f(A)$ este continuă atunci și numai atunci, cînd oricare ar fi submulțimea N deschisă (închisă) în B, $f^{-1}(N) = M$ e deschisă (închisă în A).*

În adevăr, condiția teoremei spune că, fiind dat un $z \in A$ și $w = f(z) \in B$, la orice V_w^B (mulțime deschisă în B) corespunde o mulțime $f^{-1}(V_w^B)$ care conține o vecinătate U_z^A (z punct interior relativ la A); condiția este astfel echivalentă cu continuitatea reprezentării $w = f(z)$.

În ce privește a doua afirmație, se va observa că, dacă N e închisă în B, $B - N$ e deschisă în B și deci $f^{-1}(B - N)$ deschisă în A, de unde $M = A - f^{-1}(B - N)$ închisă în A; și reciproc.

Corolar. *Într-o reprezentare continuă $B = f(A)$, punctele din A care au același corespunzător în B formează o mulțime închisă în A.*

Teorema 2. *Imaginea unei mulțimi compacte printr-o reprezentare continuă e de asemenea compactă.*

Fiind dată reprezentarea continuă $B = f(A)$ cu A compactă, este de arătat că orice mulțime infinită $N \subset B$ are un punct limită în B. Să luăm din $M = f^{-1}(N)$ numai cîte un corespunzător al fiecărui punct din N. Mulțimea astfel constituită are prin ipoteză un punct limită $z_0 \in A$. Fie $w_0 = f(z_0)$. Pentru o vecinătate V_{w_0} există, din cauza continuității, o vecinătate U_{z_0} astfel că $f(U_{z_0}^A) \subset V_{w_0}$. Prin construcție U_{z_0} conține puncte $\neq z_0$ din M și deci V_{w_0} conține puncte $\neq w_0$ din N; ceea ce înseamnă că $w_0 \in B$ este punct limită pentru N.

Teorema 3. *O reprezentare continuă și biunivocă a unei mulțimi compacte, într-un spațiu metrizabil, este chiar un homeomorfism.*

După teorema 1 este destul să dovedim că, dacă o mulțime M este închisă în mulțimea compactă dată A, $N = f(M)$ este închisă în mulțimea $B = f(A)$; or, cum M este compactă (§ 55 teorema 2), N este de asemenea compactă (teorema precedentă) și deci închisă în B (§ 56, teorema 2).

Cazuri particulare ale teoremelor 2 și 3 (vezi § 55, teorema 1). *Imaginea printr-o reprezentare continuă a unei mulțimi închise și mărginite dintr-un spațiu euclidian, în alt spațiu euclidian, este tot o mulțime închisă și mărginită, iar dacă reprezentarea e și biunivocă, ea este un homeomorfism.*

La fel în ce privește planul lui Gauss, mulțimea dată fiind presupusă numai închisă.

Teorema 4. *Dacă A_1 și A_2 sînt mulțimi închise în spațiul $\mathcal{S}$ și $B_1 = f_1(A_1)$, $B_2 = f_2(A_2)$ reprezentări continue într-un spațiu $\mathcal{T}$, care induc aceeași reprezentare în intersecția $A_1 \cap A_2$, atunci $A_1 \cup A_2$ este astfel reprezentată continuu pe $B_1 \cup B_2$.*

Reprezentarea f definită prin f_1 în A_1 și f_2 în A_2 este evident univocă. Să arătăm că este continuă, de exemplu într-un punct $z \in A_1$. Prin ipoteză $w = f_1(z) = f(z)$ și fiind dată o vecinătate V_w, există o vecinătate U_{1z} așa fel că $f_1(A_1 \cap U_{1z}) = f(A_1 \subset U_{1z}) \subset V_w$. Dacă $z \notin A_2$, A_2 fiind închisă, se poate lua $U_z \subset U_{1z}$ așa ca $U_z \cap A_2 = \emptyset$ și atunci $(A_1 \cup A_2) \cap U_z = A_1 \cap U_z \subset A_1 \cap U_{1z}$ și deci

$$f((A_1 \cup A_2) \cap U_z) \subset V_w.$$

Dacă însă avem și $z \in A_2$, există și o vecinătate U_{2z} așa fel că $f(A_2 \cap U_{2z}) \subset V_w$. Luînd atunci $U_z \subset U_{1z} \cap U_{2z}$ vom avea

$(A_1 \cup A_2) \cap U_z \subset A_1 \cap U_{1z} \cup A_2 \cap U_{2z}$, deci $f((A_1 \cup A_2) \cap U_z) \subset V_w$.

Teorema 5. *Pentru ca reprezentarea f a spațiului $\mathcal{S}$ cu metrica ρ în spațiul $\mathcal{T}$ cu metrica σ să fie continuă în punctul z_0 este necesar și suficient ca la orice $\varepsilon > 0$, să corespundă un $\eta > 0$, astfel ca: $\rho(z_0, z) < \eta$ să atragă $\sigma(f(z_0), f(z)) < \varepsilon$.*

Este o nouă expresie a definiției.

Teorema 6. *Fie f o reprezentare continuă a spațiului compact $\mathcal{S}$ cu metrica ρ, sau a unei mulțimi compacte din S, în spațiul $\mathcal{T}$ cu metrica σ. Atunci la un $\varepsilon > 0$ dat corespunde un $\eta > 0$, astfel că $\rho(z, z') < \eta$ atrage $\sigma(f(z), f(z')) < \varepsilon$ în $\mathcal{S}$.*

Pentru fiecare punct z există un număr η astfel că $\rho(z, z') < 2\eta$ atrage $\sigma(f(z), f(z')) < \varepsilon/2$. Din familia de vecinătăți $U_z(\eta)$, care acoperă $\mathcal{S}$, se poate extrage o familie finită $U_{z_n}(\eta_n)$ $(n = 1, ..., q)$ cu aceeași proprietate (teorema 6 § 56). Fie η cel mai mic dintre numerele η_n; vom arăta că acesta este numărul care corespunde lui ε în sensul enunțului. În adevăr, fie $\rho(z, z') < \eta$. Avem $z \in U_{z_n}(\eta_n)$ pentru un n și

$$\rho(z_n, z') \leqslant \rho(z_n, z) + \rho(z, z') < 2\eta_n$$

deci

$$\sigma(f(z_n), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sigma(f(z_n), f(z')) < \frac{\varepsilon}{2}$$

de unde

$$\sigma(f(z), f(z')) < \varepsilon.$$

§ 58. Aplicații la continuitatea funcțiilor

O funcție reală sau complexă uniformă efectuează o reprezentare a unei mulțimi A — domeniul ei de definiție — în dreapta închisă (cu punctele $\pm\infty$) sau în planul lui Gauss. Reprezentarea este continuă cînd funcția este continuă. În acest fel teoria continuității funcțiilor se subsumează aceleia a reprezentărilor continue. Regăsim astfel următoarele teoreme cunoscute:

Teorema 1. *Mulțimea punctelor unde o funcție continuă (de variabile reale sau complexe) ia o valoare dată λ este închisă în domeniul de definiție.* (§ 57 teorema 1, corolar).

Teorema 2. *Mulțimea punctelor unde o funcție de variabile reale continuă, sau modulul unei funcții de variabile complexe continuă, ia valori*

$$\begin{cases} > \lambda \text{ sau } < \lambda \\ \geqslant \lambda \text{ sau } \leqslant \lambda \end{cases} \quad \text{este} \quad \begin{cases} \text{deschisă} \\ \text{închisă} \end{cases} \quad \text{în domeniul de definiție.}$$

Căci mulțimea valorilor considerate ale funcției este $\begin{cases} \text{deschisă} \\ \text{închisă} \end{cases}$ și se aplică § 57, teorema 1.

Teorema 3. *Mulțimea valorilor luate de o funcție continuă (de variabile reale sau complexe) într-o mulțime compactă e de asemenea compactă și deci închisă.*

Se aplică § 57, teorema 2 și § 56, teorema 2, observîndu-se că dreapta este un spațiu metrizabil.

Teorema 4. *O funcție de variabile reale, continuă într-o mulțime compactă, atinge maximul și minimul ei în acea mulțime.*

Rezultă din faptul că mulțimea valorilor funcției e închisă și deci conține marginea superioară și marginea inferioară a acestor valori (care fac parte din închidere).

Caz particular. Modulul unei funcții de variabile complexe continuă într-o mulțime închisă în $\bar{C}$ ia o valoare maximă și una minimă în acea mulțime.

Teorema 5. *O funcție finită și continuă într-o mulțime compactă este mărginită în acea mulțime.*

Rezultă din teorema 3 și § 56, teorema 2.

Teorema 6. *O funcție continuă într-o mulțime metrizabilă compactă e chiar uniform continuă. (Heine).*

Rezultă din teorema 6, § 57.

§ 59. Distanța între mulțimi

Fie $\mathcal{S}$ un spațiu metrizabil cu metrica $\rho(z, z')$.

Teorema 1. $\rho(z, z')$ *este o funcție continuă în* $\mathcal{S} \times \mathcal{S}$ *de punctul* (z, z').

În adevăr, fiind dat $\varepsilon > 0$, să luăm (z_1, z_1') în $U_z(\varepsilon/2) \times U_{z'}(\varepsilon/2)$, adică $\rho(z, z_1) < \varepsilon/2$ și $\rho(z', z_1') < \varepsilon/2$. Vom avea atunci

$$\rho(z, z') \leqslant \rho(z, z_1) + \rho(z_1, z_1') + \rho(z', z_1') \tag{1}$$

sau

$$\rho(z, z') - \rho(z_1, z_1') \leqslant \rho(z, z_1) + \rho(z', z_1') < \varepsilon$$

și la fel

$$\rho(z_1, z_1') - \rho(z, z') < \varepsilon,$$

deci

$$| \rho(z, z') - \rho(z_1, z_1') | < \varepsilon.$$

Definiție. *Fiind dată metrica* $\rho(z, z')$, *numim*
Diametrul unei mulțimi A *:*

$$\delta(A) = \sup \rho(z, z') \quad z \in A, \ z' \in A.$$

Distanța mulțimilor A, B:

$$\rho(A, B) = \inf \rho(z, z') \quad z \in A, \ z' \in B.$$

Cazuri particulare ale ultimei noțiuni sînt: *distanța a două puncte* $\rho(z, z')$ *și distanța de la un punct* z *la o mulțime* A:

$$\rho(z, A) = \sup \rho(z, z') \quad z' \in A.$$

Teorema 2. *Dacă* $A \subset B$, $\delta(A) \leqslant \delta(B)$.
Evident.

Teorema 3. $\delta(A) = \delta(\bar{A})$.
Mai întîi $\delta(A) \leqslant \delta(\bar{A})$ (Teorema precedentă). Apoi luînd z, z' în $\bar{A}$ și z_1, z_1' în $A \cap U_z(\varepsilon/2)$, respectiv $A \cap U_{z'}(\varepsilon/2)$, avem (1), de unde $\rho(z, z') < \delta(A) + \varepsilon$ cu $\varepsilon > 0$ arbitrar; aceasta probează că $\delta(\bar{A}) = \sup \delta(z, z') \leqslant \delta(A)$.

Teorema 4. *Dacă* A *este compactă, există două puncte* z_0, z_0' *astfel că*

$$\delta(A) = \rho(z_0, z_0')$$

și aceste puncte sînt în fr A *dacă spațiul este euclidian.*

Prima afirmație rezultă din § 58, teorema 4, împreună cu teorema 1 de mai sus.

Teorema 5. *Dacă* $A \subset A_1$ *şi* $B \subset B_1$, $\rho(A, B) \geqslant \rho(A_1, B_1)$. Evident.

Teorema 6. $\rho(A, \rho) = \rho(\bar{A}, \bar{B})$.

Demonstraţia ca la teorema 3: Luăm $z_1 \in \bar{A}$, $z_1' \in \bar{B}$; există nişte puncte $z \in A \cap U_{z_1}(\varepsilon/2)$, $z' \in B \cap U_{z_1'}(\varepsilon/2)$ şi avem (1), de unde

$$\rho(z_1, z_1') > \rho(A, B) - \varepsilon,$$

deci $\rho(\bar{A}, \bar{B}) \geqslant \rho(A, B)$, ε fiind arbitrar >0. Pe de altă parte, $\rho(\bar{A}, \bar{B}) \leqslant \rho(A, B)$ în virtutea teoremei 5.

Teorema 7. *Fiind dată mulţimea* A, $\rho(z, A)$ *este o funcţie continuă de* z *în* $\mathcal{S}$.

Fie z, z' două puncte aşa fel că $\rho(z, z') < \varepsilon$ (dat). Oricare ar fi $\eta > 0$, există un $z_1 \in A$ astfel că

$$\rho(z, z_1) < \rho(z, A) + \eta$$

şi deci

$$f(z', A) \leqslant \rho(z_1, z') \leqslant \rho(z, z') + \rho(z, z_1) < \rho(z, z') + \rho(z, A) + \eta,$$

de unde

$$\rho(z', A) - \rho(z, A) \leqslant \rho(z, z').$$

Schimbînd z cu z' obţinem

$$|\rho(z', A) - \rho(z, A)| < \varepsilon \text{ pentru } \rho(z, z') < \varepsilon.$$

Observaţie. $\rho(z, A) = 0$ în $\bar{A}$ (definiţia şi teorema 6). Şi reciproca este adevărată.

Teorema 8. *Pentru ca* z *să aparţină unei mulţimi închise* A, *este necesar şi suficient ca* $\rho(z, A) = 0$.

În adevăr dacă $\rho(z, A) = 0$, există, pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar, un $z' \in A$ aşa fel ca $\rho(z, z') < \varepsilon$, ceea ce înseamnă $A \cap U_z(\varepsilon) \neq \emptyset$, adică $z \in \bar{A} = A$.

Teorema 9. *Dacă mulţimile* A *şi* B *sînt compacte, există în ele puncte* z_0 *şi* z_0' *astfel că*

$$\rho(A, B) = \rho(z_0, z_0');$$

dacă spaţiul este euclidian, aceste puncte sînt respectiv în fr A *şi fr* B, *şi avem*

$$\rho(A, B) = \rho(\text{fr } A, \text{ fr } B).$$

Demonstraţia ca la teorema 4.

Corolar. *Pentru ca mulţimile compacte* A *şi* B *să aibă un punct comun e necesar şi suficient ca* $\rho(A, B) = 0$.

Observaţie. Aceasta este adevărată şi în ipoteza mai generală cînd de exemplu A este compactă şi B numai închisă, după cum va rezulta din

Teorema 10. $\rho(A, B) = \inf \rho(z, B) \quad z \in A$.

Mai întîi $\rho(z, B) \geqslant \rho(A, B)$ (teorema 5). Apoi există prin ipoteză puncte $z \in A$, $z' \in B$ astfel că

$$\rho(z, z') < \rho(A, B) + \varepsilon$$

şi deci

$$\rho(z, B) < \rho(A, B) + \varepsilon.$$

Din teoremele 7 și 10 urmează că, dacă A este compactă și $\rho(A, B)=0$, există un $z_0 \in A$ așa că $\rho(z_0, B) = 0$. Dacă în plus B este închisă, avem și $z_0 \in B$ (teorema 8). Am stabilit astfel observația de mai sus.

Definiție. *Fiind dată în spațiul $\mathcal{S}$ cu metrica $\rho(z, z')$, mulțimea A, vom numi R-vecinătate a acestei mulțimi, $U_A(R)$, mulțimea formată de punctele z' situate la distanță $< R$ de A: $\rho(z', A) < R$.*

Este evident că $U_A(R)$ este reuniunea tuturor vecinătăților $U_z(R)$ ale punctelor $z \in A$. De aici urmează:

Teorema 11. *$U_A(R)$ este o mulțime deschisă.*

Teorema 12. *Dacă $A \subset B$, $U_A(R) \subset U_B(R)$.*

Teorema 13. $U_{A \cup B}(R) = U_A(R) \cup U_B(R)$.

Teorema 14. $U_A(R) = U_{\bar{A}}(R)$.

Teorema 15. *În C și $\bar{C}$, $\mathrm{fr}\, U_A(R)$ este mulțimea punctelor ζ pentru care*

$$\rho(\zeta, A) = R. \tag{2}$$

Demonstrația arată că, în orice spațiu metrizabil, $\mathrm{fr}\, U_A(R)$ satisface relația (2).

În adevăr: Dacă $\zeta \in \mathrm{fr}\, U_A(R)$, o vecinătate $U_\zeta(\varepsilon)$ conține un $z_1' \in U_A(R)$ și există un $z \in A$ cu $\rho(z, z_1') < R$. Avem atunci $\rho(\zeta, A) \leqslant \rho(z, \zeta) \leqslant \rho(z, z_1') + \rho(\zeta, z_1') < R + \varepsilon$, deci $\rho(\zeta, A) \leqslant R$. Dar cum ζ nu este în $U_A(R)$ (teorema 11), avem chiar $\rho(\zeta, A) = R$. Invers, fie $\rho(\zeta, A) = R$. Există un $z \in A$ cu $\rho(z, \zeta) < R + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ arbitrar. Deci în $U_\zeta(\varepsilon)$ există puncte z' cu $\rho(z, z') < R$ și prin urmare $\rho(z', A) < R$ ($U_\zeta(\varepsilon)$ și cercul de centru z și rază R se intersectează). Deci $\zeta \in \mathrm{fr}\, U_A(R)$.

Corolar. *Punctele z' situate la distanța $\rho(z', A) \leqslant R$ formează o mulțime închisă, anume $\overline{U_A(R)}$.*

Teorema 16. *Într-un spațiu metrizabil este adevărată proprietatea:*

δ) Două mulțimi închise disjuncte nevide pot fi acoperite cu mulțimi deschise disjuncte. (Axioma lui Tietze).

Fiind date mulțimile închise disjuncte A și B, să punem (cf. teoremei 8):

$$R_z = \frac{1}{2}\rho(z, B) \text{ pentru } z \in A \text{ și } R_{z'} = \frac{1}{2}\rho(A, z') \text{ pentru } z' \in B;$$

$$A_1 = \bigcup U_z(R_z) \quad z \in A \quad \text{și} \quad B_1 = \bigcup U_{z'}(R_{z'}) \quad z' \in B.$$

Evident A_1, B_1 sînt deschise și acoperă A, B. Ele sînt disjuncte, căci dacă ar avea un punct comun z_0, atunci ar exista $z_1 \in A$, $z_1' \in B$, așa fel încît

$$\rho(z_1, z_1') \leqslant \rho(z_1, z_0) + \rho(z_1', z_0) < 1/2[\rho(z_1, B) + \rho(A, z_1')]$$

și dacă de exemplu $\rho(A, z_1') \leqslant \rho(z_1, B)$, ar urma $\rho(z_1, z_1') < \rho(z_1, B)$ cu $z_1' \in B$, absurd.

Definiție. *Un spațiu topologic care posedă proprietatea δ) se zice normal. Spațiile metrizabile sînt așadar normale.*

Exemple. Două mulțimi închise pot avea distanța $= 0$ fără a se intersecta: $A(y = 0)$ și $B(y = 1/x)$.

Deci restricțiile din teorema 9 și din observația de la corolarul teoremei 9 nu pot fi înlăturate.

Teorema 17. *Dacă, într-un spațiu metrizabil, A este intersecția unui șir monoton descrescător de mulțimi compacte, A_n, atunci la fiecare R corespund un ν astfel că $A_n \subset U_A(R)$ pentru $n > \nu$.*

Ajunge să arătăm că există un $A_n \subset U_A(R)$. În cazul contrar, mulțimile $A_n - U_A(R) \neq \emptyset$, sînt închise și deci compacte (§ 3, teorema 3), și formează un șir monoton descrescător. Deci au o intersecție $\neq \emptyset$ (§3, teorema 3). Or intersecția lor este $A - U_A(R) = \emptyset$.

§ 60. Conexiune. Continuuri și domenii

Definiție. *Fiind dată mulțimea $A \subset S$, se zice că $\{A_1, A_2\}$ este o partiție închisă a ei dacă $A_1 \cup A_2 = A$ și A_1, A_2 sînt,*

1° *nevide,*
2° *disjuncte și*
3° *închise în A.*

Condiția 3° este echivalentă cu: 3 ° A_1 și A_2 deschise în A.

Pentru ca să existe partiția închisă $\{A_1, A_2\}$ este necesar și suficient să existe submulțimea A_1,

1° nevidă,
2° diferită de A,
3° închisă în A și
4° deschisă în A.

Mulțimea A se zice *conexă* dacă nu admite nici o partiție închisă.

Aceste definiții se aplică și spațiului ambiant $\mathcal{S}$.

Teorema 1. *Pentru ca A să fie conexă, este necesar și suficient să nu conțină nici o submulțime simultan închisă și deschisă în A, afară de $\emptyset$ și A*

Teorema 2. *Pentru ca A să fie conexă, este necesar și suficient ca orice submulțime nevidă și diferită de A să aibă o frontieră nevidă în A.*

Căci o mulțime simultan închisă și deschisă M este caracterizată prin $M \supset \operatorname{fr} M$ și $M \cap \operatorname{fr} M = \emptyset$, adică $\operatorname{fr} M = \emptyset$.

Caz particular. Într-un spațiu conex $\mathcal{S}$ orice mulțime nevidă și diferită de $\mathcal{S}$ are frontieră.

Definiții. O *mulțime închisă și conexă se numește continuu.*

Un continuu care se reduce la un punct se numește degenerat.

O mulțime deschisă și conexă se numește domeniu .

Evident, toate aceste noțiuni sînt topologice. Dar pe cînd ultimele depind de spațiul ambiant, noțiunea de conexiune depinde numai de mulțimea considerată A (este *intrinsecă*).

De altfel conexiunea se păstrează nu numai în homeomorfisme, ci și în reprezentări continue oarecare:

Teorema 3. *O reprezentare continuă transformă mulțimi conexe în mulțimi conexe.*

Fie f o reprezentare continuă a spațiului $\mathcal{S}$ în spațiul $\mathcal{T}$ și $B = f(A)$: A fiind conexă, să arătăm că și B este conexă. În cazul contrar, ar exista o partiție închisă $\{B_1, B_2\}$ a lui B, la care va corespunde o partiție închisă $\{A_1, A_2\}$ a mulțimi $f^{-1}(B)$ (§ 57, teorema 1). Or, cum $A \subset f^{-1}(B)$, am avea

atunci partiția închisă $\{A \cap A_1, A \cap A_2\}$ a mulțimii A pentru că evident, $A \cap A_1 \neq \emptyset$ și $A \cap A_2 \neq \emptyset$ și $A = A \cap A_1 \cup A \cap A_2$; aceasta rezultă din

Lema 1. *Dacă* $\{A_1; A_2\}$ *este o partiție închisă a mulțimii* A_0 *și* $A \subset A_0$, *atunci* $\{A \cap A_1; A \cap A_2\}$ *este o partiție închisă a mulțimii* A, *dacă* $A \cap A_1 \neq \emptyset$ *și* $A \cap A_2 \neq \emptyset$.

Căci $A \cap A_1$ și $A \cap A_2$ sînt disjuncte și închise în A pentru că A_1 și A_2 sînt închise în A_0 (spațiu ambiant pentru A) (27, § 54).

Teorema 4. *O mulțime* A, *în care două puncte oarecare se pot uni printr-o submulțime conexă, este conexă.*

În adevăr, nu poate exista o partiție $A = A_1 \cup A_2$ fiindcă luînd $z_1 \in A_1$ și $z_2 \in A_2$, am avea o submulțime conexă $B \supset \{z_1, z_2\}$ și conform lemei ar urma partiția $\{B \cap A_1, B \cap A_2\}$ a mulțimii B.

Teorema 5. *Dacă două mulțimi conexe au puncte comune, reuniunea lor e conexă.*

Fie A_1 și A_2 conexe, cu punctul comun α. Să presupunem că ar exista o partiție închisă $\{M_1, M_2\}$ a mulțimii $A_1 \cup A_2$; fie de exemplu $\alpha \in M_1$. Ar urma (lema 1) $A_1 = A_1 \cap M_1 \cup A_1 \cap M_2$, și cum sigur $A_1 \cap M_1 \neq \emptyset$, iar A_1 este conex, avem $A_1 \cap M_2 = \emptyset$ și la fel $A_2 \cap M_2 = \emptyset$. Deci $A_1 \cup A_2) \cap M_2 = \emptyset$, adică $M_2 = \emptyset$, contrar presupunerii.

Observație. În același fel se poate arăta: *Dacă o familie de mulțimi conexe (chiar nenumărabilă) au punct comun, reuniunea e conexă.*

Fie $\cup A = M_1 \cup M_2$. Fie $\alpha \in M_1$. Există un A așa că $A \cap M_2 \neq \emptyset$. Intersectînd cu acest A avem $A = A \cap M_1 \cup A_1 \cap M_2$, adică o partiție închisă.

Teorema 6. *Odată cu o mulțime* A *este conexă și orice mulțime* M *care satisface*

$$A \subset M \subset \bar{A}.$$

Dacă ar exista o partiție închisă $\{M_1, M_2\}$ a mulțimii M; cum $A = A \cap M_1 \cup A \cap M_2$ nu poate fi o partiție închisă, urmează (lema 1) de ex.: $A \cap M_1 = \emptyset$. Atunci $A \subset M_2$, deci $\bar{A} \subset \bar{M}_2$ (§ 54, 11), deci $M \subset \bar{M}_2$. Deoarece M_2 este închis în M, avem $M_2 = M \cap \bar{M}_2 = M$ (23, § 54) și $M_1 = \emptyset$, contrar presupunerii.

Cazuri particulare: 1) Dacă A este conexă, atunci și $\bar{A}$ este conexă, deci un continuu. Nu și reciproc (exemplele 4, 8 § 70).

2) Un domeniu închis este un continuu. Nu și reciproc (exemplul 8, § 70).

Teorema 7. *Dacă* D *este un domeniu și* $\Delta = \operatorname{int} \bar{D}$, *atunci* Δ *este un domeniu* și

$$\bar{D} = \bar{\Delta}, \operatorname{fr} \bar{D} = \operatorname{fr} \Delta \subset \operatorname{fr} D.$$

1°. Din $D \subset \bar{D}$, urmează $\operatorname{int} D \subset \operatorname{int} \bar{D}$ sau $D \subset \Delta$. Cum $\Delta \subset \bar{D}$ și D e conex, Δ este conex după teorema 6.

Cum Δ este deschis, este un domeniu.

2°. Din $D \subset \Delta$ urmează $\bar{D} \subset \bar{\Delta}$, iar din $\Delta \subset \bar{D}$ urmează $\bar{\Delta} \subset \bar{D}$. Deci $\bar{D} = \bar{\Delta}$.

3°. Egalitatea revine, după 2°, la $\operatorname{fr} \bar{\Delta} = \operatorname{fr} \Delta$. Avem

$$\bar{\Delta} = \operatorname{int} \bar{\Delta} \cup \operatorname{fr} \bar{\Delta} = \operatorname{int} \bar{D} \cup \operatorname{fr} \bar{\Delta} = \Delta \cup \operatorname{fr} \bar{\Delta}, \Delta \cap \operatorname{fr} \bar{\Delta} = \emptyset,$$

şi pe de altă parte

$$\bar{\Delta} = \Delta \cup \operatorname{fr} \Delta, \quad \Delta \cap \operatorname{fr} \Delta = \varnothing,$$

de unde afirmaţia. În sfîrşit avem

$$\bar{D} = D \cup \operatorname{fr} D, \quad D \cap \operatorname{fr} D = \varnothing,$$

şi

$$\bar{D} = \bar{\Delta} = \Delta \cup \operatorname{fr} \Delta; \quad \Delta \cap \operatorname{fr} \Delta = \varnothing;$$

cum $D \subset \Delta$, urmează $\operatorname{fr} \Delta \subset \operatorname{fr} D$.

Observaţie. Nu putem scrie în general $\operatorname{fr} D = \operatorname{fr} \bar{D}$.

Exemplu: Fie $\bar{D}$ cercul $|z| < 1$ minus raza a $(0 \leqslant x < 1)$. Aici $\bar{D}$ este $|z| \leqslant 1$ şi $\operatorname{fr} \bar{D}$ este circumferinţă $|z| = 1$, pe cînd $\operatorname{fr} D$ este formată din această circumferinţă plus raza a. Raza a este o *frontieră interioară* pentru D.

Teorema 8. *Dacă o mulţime conexă M uneşte puncte din mulţimile complementare A şi $\mathbf{C}A$, M intersectează* $\operatorname{fr} A$.

În adevăr, $M = A \cap M \cup \mathbf{C}A \cap M$, cu $A \cap M$ şi $\mathbf{C}A \cap M$ mulţimi nevide şi disjuncte. Dacă nici una nu ar conţine puncte din $\operatorname{fr} A$, am avea o partiţie închisă, fiindcă $A \cap M = M \cap \operatorname{int} A$ şi $\mathbf{C}A \cap M = M \cap \operatorname{ext} A$ ar fi deschise în M (§ 54, 27). Deci $M \cap \operatorname{fr} A \neq \varnothing$.

Corolarul 1. *Dacă M este conexă şi $M \cap A \neq \varnothing$, dar $M \cap \operatorname{fr} A = \varnothing$, atunci $M \subset A$.*

Corolarul 2. *Într-un spaţiu conex orice mulţime nevidă şi diferită de S are frontiere.*

Acest rezultat a fost obţinut şi ca un caz particular al teoremei 2.

Teorema 9. *O mulţime conexă e densă în sine, dacă conţine mai mult decît un punct.*

A fiind astfel, arătăm că $\mathring{A} = 0$ (§ 54, 15). Într-adevăr, dacă $\alpha \in A$ ar fi un punct izolat, $\{\alpha, (A - \alpha)\}$ ar fi o partiţie închisă a mulţimii A (este evident că $A - \alpha$ este închisă în A).

Corolar. *Un continuu care nu se reduce la un punct este o mulţime perfectă.*

Teorema 10. *Pe o dreaptă euclidiană sînt mulţimi conexe: punctele izolate, segmentele şi semidreptele închise, deschise sau semiînchise şi dreapta însăşi.*

Vom arăta întîi că un segment închis $[a, b]$ este conex (continuu). În adevăr, să presupunem că ar exista o partiţie închisă $\{M_1, M_2\}$ a segmentului $[a, b]$; putem admite că de exemplu $a \in M_1$. Aici M_1 şi M_2 sînt închise în $[a, b]$, care este închisă, şi deci sînt închise absolut (§ 54, 45). Fiind şi mărginite, M_1 şi M_2 sînt compacte (§ 55, teorema 1) şi cum sînt disjuncte, $\rho(M_1, M_2) = \rho > 0$ (§ 59, teorema 9, corolar). Fie c marginea inferioară a punctelor din M_2; deoarece $a \in M_1$, $c > a$. În (a, c) nu există puncte din M_2 şi nici puncte din M_1 la distanţă $< \rho$ de c: absurd.

Sau: orice punct din M_1 are o vecinătate $\subset M_1$ la fel pentru orice punct din M_2. Dacă $a_1 \in M_1$, $c = \inf M_2 > a$, fiindcă există $U_a \subset M_1$. Cum $c \in M_2$, există $U_c \subset M_2$ — contradicţie.

Se vede acum imediat că segmentele neînchise, semidreptele și dreapta sînt conexe; pentru că două puncte dintr-o asemenea mulțime se pot uni printr-un segment închis, conținut în mulțime (teorema 4).

Reciproc, fie A o mulțime conexă pe dreaptă. Dacă a și b sînt în A, segmentul $[a, b] \subset A$. Căci, dacă un punct $c \in (a, b)$ nu ar fi în A, semidreptele $x \geqslant c$ și $x \leqslant c$ ar intersecta A în mulțimi care ar forma o partiție a lui A. Atunci notînd cu u și v marginea inferioară și marginea superioară a punctelor din A (care pot fi și $-\infty$, respectiv $+\infty$), rezultă că A este identic cu segmentul (u, v) plus eventual o extremitate sau ambele (segment care poate fi semidreaptă sau toată dreapta).

Corolarul 1. *Continuurile unei drepte euclidiene sînt: punctele izolate, segmentele și semidreptele închise, și dreapta însăși.*

Domeniile unei drepte euclidiene sînt: segmentele și semidreptele deschise și dreapta însăși.

Corolarul 2. *În planele C și $\bar{C}$ (și în orice spațiu euclidian) o linie frîntă (linie poligonală) este un continuu.*

Prin linie frîntă $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}\alpha_n$ se înțelege suma de segmente închise $[\alpha_1\alpha_2] + [\alpha_2\alpha_3] + \ldots + [\alpha_{n-1}\alpha_n]$. (Se aplică teoremele 5 și 10).

Corolarul 3. *Într-un spațiu euclidian, orice mulțime convexă este conexă.*

Prin mulțime convexă se înțelege o mulțime cu proprietatea că două puncte oarecare ale ei sînt extremitățile unui segment conținut în aceeași mulțime. Se pot considera domenii și închideri de domenii convexe. (Se aplică teoremele 4 și 10).

Corolarul 4. *În particular un spațiu euclidian este conex.*

Corolarul 5. *Planul lui Gauss $\bar{C}$ este conex* (teoremele 4 și 10); *de asemenea sfera (pentru că este homeomorfă cu $\bar{C}$).*

Corolarul 6. *O funcție reală $f(t)$ continuă pe un interval închis $[a, b]$ ia toate valorile cuprinse între $f(a)$ și $f(b)$.*

Căci reprezentarea continuă $T = f(t)$ duce $[a, b]$ într-o mulțime închisă și conexă, deci într-un segment $[A, B]$, unde A, B sînt evident minimul și maximul lui $f(t)$.

Corolarul 7. *Prima parte se aplică la orice funcție reală continuă pe o mulțime compactă și conexă (continuu mărginit).*

Corolarul 8. *Orice reprezentare homeomorfă a unui segment $[a, b]$ pe alt segment este efectuată de o funcție $t_1 = \varphi(t)$ strict monotonă și continuă și reciproc.*

În adevăr, fie $a_1 = \varphi(a)$, $b_1 = \varphi(b)$. La segmentul $[a, b] = I$ corespunde un segment $I_1 \supset [a_1, b_1]$ (corolarul 6), iar la I_1, prin transformarea inversă (deasemenea continuă prin ipoteză), corespunde un segment ce conține $[a,b]$ și care trebuie să fie chiar $[a, b]$. Deci $I_1 = [a_1, b_1]$ și $\varphi(t) = t_1$ definește o corespondență biunivocă $I \to I_1$. Astfel la segmentul $[a, t]$ $(t \in I)$ corespunde segmentul $[a_1, t_1]$, unde $t_1 = \varphi(t) \in I_1$; aceasta înseamnă că $\varphi(t)$ este strict monotonă.

Teorema 11. *Pentru ca o mulțime deschisă dintr-un spațiu euclidian să fie un domeniu este necesar și suficient ca două puncte oarecare ale ei să poată fi unite printr-un drum poligonal (linie frîntă) conținut în acea mulțime.*

Fie A o mulțime deschisă și z_0 un punct al ei; fie A_0 mulțimea punctelor din A care se pot uni cu z_0 prin drumuri conținute în A (și deci conținute în A_0). Este clar că A_0 este deschisă, căci dacă $z \in A_0$, există o vecinătate $U_z \subset A$ și cum orice punct din U_z se poate uni cu z_0 printr-un drum poligonal prin z, în A, $U_z \subset A_0$. Dintr-un motiv analog, $\mathbf{C}_A A_0 = A - A_0$ este de asemenea deschisă (dacă $z' \in \mathbf{C}_A A_0$ și $U_{z'} \subset \mathbf{C}_A A_0$, deoarece nici un punct din $U_{z'}$ nu poate fi unit cu z_0 printr-un drum poligonal în A, căci atunci ar putea fi unit și z' cu z_0 printr-un asemenea drum). Astfel $A = A_0 \cup \mathbf{C}_A A_0$, unde A_0 și $\mathbf{C}_A A_0$ sînt mulțimi deschise disjuncte. Pentru ca A să fie conexă e necesar și suficient $\mathbf{C}_A A_0 = \varnothing$, adică $A = A_0$, ceea ce demonstrează teorema.

Observație. Este suficient ca orice punct din A să poată fi unit cu un punct fix $z_0 \in A$ printr-un drum poligonal $\subset A$.

Definiție. *Într-un spațiu metrizabil se numește ε-lanț (pentru o metrică $\rho(z, z')$) un sistem finit de puncte $z_0, z_2, \ldots, z_n$ astfel că distanța a două puncte consecutive este $\leqslant \varepsilon$:*

$$\rho(z_{n-1}, z_n) \leqslant \varepsilon \quad (n = 1. \ldots, q).$$

O mulțime A se zice bine înlănțuită dacă două puncte oarecare ale ei se pot uni prin ε-lanțuri, cu ε arbitrar > 0, conținute în A.

Teorema 12. *Într-un spațiu metrizabil, o mulțime conexă este bine înlănțuită.*

Fie A conexă și $z_0 \in A$. Să considerăm mulțimea A_ε a punctelor care pot fi unite cu z_0 prin ε-lanțuri în A. Ea este închisă în A. Căci dacă z este un punct limită al ei în A, o vecinătate $U_z(\varepsilon)$ conține puncte din A_ε, deci z se poate uni cu z_0 prin ε-lanțuri în A, trecînd prin asemenea puncte; adică $z \in A_\varepsilon$. Pentru un motiv analog $\mathbf{C}_A A_\varepsilon = A - A_\varepsilon$ este de asemenea închisă în A. Astfel $A = A_\varepsilon \cup \mathbf{C}_A A_\varepsilon$, unde A_ε și $\mathbf{C}_A A_\varepsilon$ sînt mulțimi disjuncte și închise în A, de unde $\mathbf{C}_A A_\varepsilon = \varnothing$, adică $A = A_\varepsilon$.

Observație. E de reținut că, oricare ar fi A și punctul z_0 al acestei mulțimi, mulțimea A_ε definită mai sus este închisă în A, ca și completarea ei $\mathbf{C}_A A_\varepsilon$.

Reciproca nu este adevărată în general (exemplu 8, § 70). Putem însă afirma:

Teorema 13. *Pentru ca o mulțime compactă într-un spațiu metrizabil să fie conexă (și deci un continuu mărginit) este necesar și suficient să fie bine înlănțuită.*

Avem de arătat suficiența condiției. Dacă mulțimea dată A n-ar fi conexă, ar admite o partiție închisă $\{A_1, A_2\}$. unde A_1 și A_2 fiind închise în A care este metrizabil și compact, sînt compacte (§ 55, teorema 2) și prin urmare $\rho(A_1. A_2) = \rho > 1$ (§ 59 teorema 9, corolarul). Atunci un punct din A_1 și unul din A_2 n-ar putea fi unite printr-un $\rho/2$-lanț în A, contrar ipotezei.

Definiție. *Vom zice că o mulțime A într-un spațiu metrizabil este ε-conexă dacă două puncte oarecare ale ei se pot uni prin ε-lanțuri în A.*

Lema 2. *Dacă într-un spațiu metrizabil, niște mulțimi compacte și formînd un șir monoton descărcător sînt ε-conexe, intersecția lor este ε-conexă.*

Fie A_n şirul dat şi $A = \cap A_n$; fie $z_0 \in A$ şi A_ε mulţimea punctelor din A ce se pot uni cu z_0 prin ε-lanţuri în A. După cum am văzut (teorema 12, observaţie), A_ε şi $\mathbf{C}_A A_\varepsilon = A - A_\varepsilon$ sînt închise în A şi deci compacte. Există prin urmare nişte puncte $\alpha \in A_\varepsilon$ şi $\beta \in \mathbf{C}_A A_\varepsilon$ astfel că (§ 59, teorema 9)

$$\rho(A_\varepsilon, \mathbf{C}_A A_\varepsilon) = \rho(\alpha, \beta) = \rho > 0. \tag{3}$$

Evident $\rho > \varepsilon$ (pentru că α şi β nu pot fi ε-conexe). Există un n astfel că $A_n \subset U_A\left(\frac{\rho - \varepsilon}{2}\right)$ (§ 59, teorema 17). Fie $z \in A_\varepsilon$ şi $z' \in \mathbf{C}_A A_\varepsilon$. Aceste puncte pot fi unite printr-un ε-lanţ în A_n. Fiecare punct z_n al lanţului este în $U_A\left(\frac{\rho - \varepsilon}{2}\right)$, deci în $U_{A_\varepsilon}\left(\frac{\rho - \varepsilon}{2}\right)$ sau în $U_{\mathbf{C}_A A_\varepsilon}\left(\frac{\rho - \varepsilon}{2}\right)$ (§ 59, teorema 13), şi numai în una din aceste mulţimi, care nu pot avea puncte comune (căci dacă ζ ar fi un punct comun, ar exista în A_ε şi $\mathbf{C}_A A_\varepsilon$ puncte λ şi μ cu $\rho(\lambda, \zeta) = \rho(\mu, \zeta) < \frac{\rho - \varepsilon}{2}$, de unde ar urma $\rho(\lambda, \mu) \leqslant \rho - \varepsilon$, contrar lui (3)). Urmează că există în lanţ două puncte consecutive astfel că

$$z_{n-1} \in U_{A_\varepsilon}\left(\frac{\rho - \varepsilon}{2}\right), \quad z_n \in U_{\mathbf{C}_A A_\varepsilon}\left(\frac{\rho - \varepsilon}{2}\right),$$

adică

$$\rho(A_\varepsilon, z_{n-1}) < \frac{\rho - \varepsilon}{2}, \quad \rho(\mathbf{C}_A A_\varepsilon, z_n) < \frac{\rho - \varepsilon}{2}, \quad \rho(z_{n-1}, z_n) \leqslant \varepsilon.$$

Ar fi deci în A_ε şi $\mathbf{C}_A A_\varepsilon$ puncte λ şi μ astfel că

$$\rho(\lambda, z_{n-1}) < \frac{\rho - \varepsilon}{2}, \quad \rho(\mu, z_n) < \frac{\rho - \varepsilon}{2}, \quad \rho(z_{n-1}, z_n) \leqslant \varepsilon,$$

de unde ar urma

$$\rho(\lambda, \mu) < \rho$$

contrar lui (3). Rămîne $\mathbf{C}_A A_\varepsilon = 0$, adică A ε-conex.

Teorema 14. *Într-un spaţiu metrizabil, intersecţia unui şir monoton descrescător A_n de continuuri compacte este un continuu.*

Ştim că intersecţia $A = \cap A_n \neq \varnothing$. Pentru orice $\varepsilon > 0$, A_n sînt ε-conexe (teorema 12) şi deci tot aşa este A (lema 2), care este deci un continuu (teorema 13).

Teorema 15. *Dacă punctele α şi β ale mulţimii compacte A (dintr-un spaţiu metrizabil) pot fi unite prin ε-lanţuri în A oricare ar fi $\varepsilon > 0$, atunci α şi β se pot uni printr-o mulţime conexă în A.*

Fie $A_{1/n}$ mulţimea punctelor din A care se pot uni cu α prin $1/n$-lanţuri în A. Mulţimile $A_{1/n}$ sînt închise în mulţimea compactă A (teorema 12, observaţie) şi deci compacte; ele formează evident un şir monoton descrescător. Fiind dat arbitrar $\nu > 0$, $A_{1/n}$ este $1/\nu$—conexă pentru $n > \nu$ şi deci tot aşa e $B = \cap A_{1/n}$ (lema 2). Cum $1/\nu$ este arbitrar > 0, B este conexă. Dar $\beta \in B$ pentru că $\beta \in A_{1/n}$ (orice n). Deci α şi β se pot uni prin mulţimea conexă B în A.

Teorema 16. *Dacă punctele* α *şi* β *ale mulţimii compacte* A *dintr-un spaţiu metrizabil, nu pot fi unite printr-o mulţime conexă în* A, *există o partiţie închisă* $\{A_1, A_2\}$ *a mulţimii* A *unde* $\alpha \in A_1$ *şi* $\beta \in A_2$.

Conform teoremei 15, există un $\varepsilon > 0$ astfel că α şi β nu se pot uni printr-un ε-lanţ în A. Fie A_ε mulţimea punctelor ce se pot uni cu α prin ε lanţuri în A şi $\mathbf{C}_A A_\varepsilon = A - A_\varepsilon$; $\{A_\varepsilon, \mathbf{C}_A A_\varepsilon\}$ constituie o partiţie închisă a mulţimii (teoreme 12, observaţie) şi avem $\alpha \in A_\varepsilon$, $\beta \in \mathbf{C}_A A_\varepsilon$.

§ 61. Componente

Fie A o mulţime de puncte într-un spaţiu $\mathcal{S}$. Proprietatea a două puncte de a fi unite printr-o mulţime conexă $M \subset A$ este o relaţie evident simetrică şi transitivă: Dacă există mulţimile conexe M şi N aşa fel încît $\alpha, \beta \in M \subset A$ şi $\beta, \gamma \in N \subset A$, atunci $M \cup N$ este o mullţime conexă (§ 60 teorema 5) care uneşte α şi γ în A; rezultă:

Teorema 1. *Punctele unei mulţimi* A *se împart în submulţimi disjuncte,* $A = \cup B$, *astfel că două puncte din* A *pot fi unite printr-o mulţime* M *conexă şi conţinută în* A *sau nu, după cum sînt sau nu sînt în aceeaşi submulţime.*

Definiţie. *Aceste submulţimi, evident unice, se numesc componentele mulţimii* A.

Corolarul 1. *O submulţime conexă a mulţimii* A *este conţinută într-o componentă a lui* A.

(Pentru că două puncte oarecare ale ei pot fi unite printr-o mulţime conexă din A),

Corolarul 2. *Componentele unei mulţimi sînt mulţimi conexe.*

(Pentru că submulţimea conexă care uneşte două puncte dintr-o componentă este conform corolarului 1 în acea componentă.)

Teorema 2. *Componentele unei mulţimi* A *sînt închise în* A.

Într-adevăr dacă B este o componentă, B este conexă (corolarul 2) şi tot aşa $\bar{B}_A$ (§ 60, teorema 6) care este conţinută în A şi deci conţinută în B cu care are puncte comune (corolarul 1).

Corolar. *Componentele unei mulţimi închise sînt mulţimi închise şi deci continuuri.*

Componentele unei mulţimi deschise *nu* sînt întotdeauna mulţimi deschise. Dar:

Teorema 3. *Într-un spaţiu euclidian, în* $\bar{C}$, *pe sferă, componentele unei mulţimi deschise sînt mulţimi deschise şi deci domenii.*

Într-un spaţiu euclidean o vecinătate (sferică) U_z este o mulţime conexă (convexă). Deci, dacă A este deschisă şi $U_z \subset A$, U_z se află în aceiaşi componentă ca z (teorema 1, corolarul 1). Pentru a termina demonstraţia, rămîne să observăm că:

O mulţime $A \subset \bar{C}$ poate fi transformată topologic într-o mulţime $\subset \bar{C} - \infty$ care este un plan euclidean (prin transformarea $z' = \dfrac{1}{z - \alpha}$ unde $\alpha \notin A$). Iar sfera este homeomorfă cu $\bar{C}$.

Definiție. *Fiind dată o mulțime A închisă într-un spațiu euclidean, în planul lui Gauss sau sferă, componentele mulțimii complementare $\mathbf{C}A$ sînt domenii; ele se numesc domeniile (regiunile) determinate de A.*

Se zice că două puncte din $\mathbf{C}A$ sînt separate sau nu de către A după cum sînt în domenii diferite determinate de A sau în același domeniu.

Teorema 4. *Un domeniu D este unul din domeniile determinate de frontiera sa.*

Fie D un domeniu. fr D este o mulțime închisă (42, § 54). Este de arătat că D este componentă a mulțimii deschise $\mathcal{S}$ — fr D. În orice caz, D fiind conexă se află într-o componentă D_1 (teorema 1, corolarul 1); dacă aceasta ar conține și puncte din $\mathbf{C}D$, ea ar intersecta fr D (§ 60, teorema 8), imposibil fiindcă se află în $\mathcal{S}$-fr D.

Teorema 5. *Dacă un domeniu D este o componentă a unei mulțimi deschise A, atunci* fr $D \subset$ fr A. *Dacă numărul componentelor D_n este finit,* fr $A = \cup$ fr D_n.

În adevăr, D este închisă în A, $D = A \cap \bar{D}$ (23, § 54), și avem

$$\text{fr } D = \bar{D} - D = \mathcal{S} \cap \bar{D} - A \cap \bar{D} = \mathbf{C}A \cap \bar{D} \subset \overline{\mathbf{C}A} \cap \bar{A} = \text{fr } A.$$

A doua afirmație rezultă din § 54, 38 și prima parte a teoremei.

Corolar. *Frontierele domeniilor determinate de o mulțime închisă A (dintr-un spațiu euclidean, din planul lui Gauss sau sferă) sînt* $\subset$ fr A.

Definiție. *Fiind dat un domeniu D într-un spațiu euclidean sau $\bar{C}$ se zice că un punct $\zeta \in$ fr D este liniar accesibil din D, dacă poate fi unit cu un punct din D (și deci cu oricare) printr-un drum poligonal conținut în D cu excepția extremității ζ.*

Teorema 6. *Frontiera unui domeniu D dintr-un spațiu euclidean $\bar{C}$ sau are puncte liniar accesibile din D în orice vecinătate a unui punct al său. (Altfel zis, mulțimea punctelor liniar accesibile din D este densă în fr D).*

Fie $\zeta \in$ fr D și o vecinătate U_ζ. Aceasta conține un $z \in D$. Segmentul $[z, \zeta]$ intersectează fr D, mulțime închisă (42, § 54), într-o mulțime închisă, care are un punct ζ_1 cel mai apropiat de z (§ 59, teorema 9); segmentul $[z, \zeta_1]$ este disjunct de fr D și deci ζ_1 este liniar accesibil.

Teorema 7. *Dacă B este o componentă a mulțimii A dintr-un spațiu euclidean, $\bar{C}$ sau sferă,*

$$\text{int } B = B \cap \text{int } A.$$

În aceleași condiții, dacă A este închisă,

$$\text{fr } B = B \cap \text{fr } A.$$

1°. $B \cap$ int A este o reuniune de componente ale mulțimii deschise int A (41, § 54), căci dacă o asemenea componentă intersectează B, este $\subset B$ (teorema 1, corolarul 1). Deci $B \cap$ int A e o submulțime deschisă a lui B și astfel este $\subset$ int B. Invers, este evident că int $B = B \cap$ int $B \subset B \cap$ int A.

2°. Dacă A este închisă și componenta B este închisă (teorema 2, corolarul) și atunci avem

$$\text{fr } B = B - \text{int } B = B \cap A - B \cap \text{int } A = B \cap \text{fr } A.$$

Demonstrație directă: Evident $B \cap \text{fr } A \subset \text{fr } B$. Apoi cum $\text{fr } B \subset B$, rămîne de arătat că $\text{fr } B \subset \text{fr } A$. Dacă $\zeta \in \text{fr } B$, o vecinătate U_ζ nu poate fi $\subset A$, căci punctele lui U_ζ putînd fi unite printr-o mulțime conexă conținută în A ar urma $\zeta \in \text{int } B$; deci $\zeta \in \text{fr } A$.

Teorema 8. *Fie, într-un spațiu metrizabil, A o mulțime închisă și K un continuu compact care intersectează* fr A. *Atunci:*

1°. *Fiecare componentă a lui $K \cap A$ intersectează* fr A.

2°. *Dacă $K \cap \mathbf{C}A \neq \emptyset$, fiecare componentă a sa are puncte limită în* fr A.

3°. *La fel pentru $K \cap \text{int } A$ (Janiszewski).*

1°. Vom arăta întîi că, dacă $K \cap A = M \cup N$ cu $M \cap N = \emptyset$, M și N închise și $M \neq \emptyset$, atunci $M \cap \text{fr } A \neq \emptyset$. În adevăr, $K = K \cap A \cup K \cap \overline{CA}$, deci avem $K = M \cup (N \cup K \cap \overline{CA})$ unde cei doi termeni sînt mulțimi închise; dar cum K este un continuu, trebuie să avem $M \cap (N \cup K \cap \overline{CA}) \neq \emptyset$, deci $M \cap K \cap \overline{CA} \neq \emptyset$, deci $M \cap \text{fr } A \neq \emptyset$.

Aceasta stabilită, fie $\alpha \in K \cap A$ și K_ε mulțimea punctelor din $K \cap A$ care pot fi unite cu α prin ε-lanțuri în $K \cap A$; știm că K_ε și $\mathbf{C}_{K \cap A} K_\varepsilon = K \cap A - K_\varepsilon$ sînt închise în $K \cap A$ (§ 60, teorema 12, observație) și deci închise absolut (45, § 54). Cum $K \cap A = K_\varepsilon \cup \mathbf{C}_{K \cap A} K_\varepsilon$ (și $K_\varepsilon \neq \emptyset$), urmează din rezultatul stabilit mai sus $K_\varepsilon \cap \text{fr } A \neq \emptyset$. În particular $K_{1/n} \cap \text{fr } A \neq \emptyset$ ($n = 1, 2, \ldots$). Or componenta lui $K \cap A$ care conține α (și care poate fi o componentă oarecare) este evident egală cu $\cap K_{1/n}$, și ea intersectează fr A în $\cap K_{1/n} \cap \text{fr } A \neq \emptyset$ (șir descrescător de mulțimi compacte, § 55, teorema 3).

2°. Fie $A_{1/n}$ mulțimea punctelor z care satisfac $\rho(A, z) \geqslant 1/n$. Evident, $\mathbf{C}A = \cup A_{1/n}$. Dacă $\beta \in K \cap \mathbf{C}A$, vom avea $\beta \in K \cap A_{1/n}$ ($n > \nu$). După 1°, componenta lui $K \cap A_{1/n}$ prin β și deci cea a lui $K \cap \mathbf{C}A$ are un punct $z_n \in \text{fr } A_{1/n}$, adică $\rho(A, z_n) = 1/n$ (§ 59, teorema 15). Punctele z_n au un punct limită ζ în componenta considerată a lui K (care este închisă) și pentru care $\rho(A, \zeta) = 0$, din cauza continuității funcției $\rho(A, z)$ (§ 59, teorema 7). Astfel $\zeta \in \bar{A}$ și cum $\zeta \in \overline{\mathbf{C}A} \cap K$, avem $\zeta \in \bar{A} \cap \overline{\mathbf{C}A} = \text{fr } A$.

3°. Dacă $K \cap \text{int } A \neq \emptyset$, cum am presupus $K \cap \text{fr } A \neq \emptyset$, avem $K \cap (\mathcal{S} - \text{int } A) \neq \emptyset$ și $K \cap (\text{fr int } A) \neq \emptyset$ (§ 60, teorema 7). Putem deci aplica 2° la int A: orice componentă a lui $K \cap \text{int } A$ are puncte limită în fr int A și deci în fr A.

Teorema 9. *Într-un spațiu metrizabil, un continuu compact nu poate fi o reuniune finită sau numărabilă de mulțimi închise disjuncte (Sierpinski).*

Vom arăta că, dacă $C = \bigcup_1^\infty C_n$ cu $C_n \neq \emptyset$ și închis, C conține un continuu $C^{(1)}$ care intersectează o infinitate de mulțimi C_n, dar nu pe C_1:

$$C^{(1)} = \cup C_{n'} \cap C^{(1)} = \cup C_{n'}^{(1)} \quad (n' \neq 1), \quad C_{n'}^{(1)} \neq \emptyset.$$

Aplicînd același procedeu acestei descompuneri, vom avea un continuum $C^{(2)} \subset C^{(1)}$.

$$C^{(2)} = \cup C_{n''}^{(1)} \cap C^{(2)} = \cup C_{n''}^{(2)} \quad (n'' \neq n_1') \quad C_{n''}^{(2)} \neq \emptyset \text{ etc.}$$

Cum $C^{(1)}, C^{(2)}, \ldots$ nu intersectează respectiv $C_1, C_2, \ldots$ și mulțimile precendede, avem $C \cap C^{(1)} \cap C^{(2)} \cap \ldots = \emptyset$, în contrazicere cu teorema lui Cantor.

Pentru a construi continuul $C^{(1)}$ cu proprietățile dorite, fie $\rho(C_1, C_2) = \rho > 0$ și să considerăm mulțimea B a punctelor z care satisfac $\rho(C_1, z) \geqslant \frac{1}{2}\rho$.

Evident, $C_2 \subset B \cap C \subset C - C_1$. Fie apoi $C^{(1)}$ componenta lui $B \cap C$ printr-un punct din C_2; $C^{(1)} \cap C_1 = \varnothing$ (pentru că $C^{(1)} \subset B \cap C \subset C - C_1$) și $C^{(1)} \cap C_2 \neq \varnothing$ prin construcție. Cum C intersectează fr B (pentru că intersectează B și $\mathbf{C}B$) urmează (teorema 8) că $C^{(1)}$ intersectează fr B într-un punct ζ, adică un punct pentru care $\rho(C_1, \zeta) = \frac{1}{2}\rho$ (§ 59, teorema 15). Acest punct nu este deci în C_2, ci în altă mulțime C_n ($n > 2$). Astfel $C^{(1)}$, care este un continuu, intersectează cel puțin două dintre mulțimile închise disjuncte C_n și deci o infinitate (căci altfel ar admite o partiție închisă).

Lemă. *Dacă A e o mulțime conexă în spațiul conex $\mathcal{S}$ și M o mulțime simultan închisă și deschisă în $\mathbf{C}A$, atunci $A \cup M$ este conexă.*

Într-adevăr, să presupunem că am avea o partiție închisă $\{M_1, M_2\}$ a mulțimii $A \cup M$. Cum A este conexă, vom avea de exemplu $A \subset M_1$ și $M_2 \subset M$. Deoarece M_2 este simultan închisă și deschisă în $A \cup M$, este la fel și în M (pentru că $M \subset A \cup M$, vezi 27, § 54 consecința) și cum M este închisă și deschisă în $\mathbf{C}A$, și M_2 este astfel (45, § 54). Deci M_2 este închisă și deschisă în $\mathbf{C}A \cup (A \cup M) = \mathcal{S}$, absurd pentru că $\mathcal{S}$ este conex.

Teorema 10. *Dacă A este continuu într-un spațiu euclidean, $\bar{C}$ sau sferă, și B o reuniune de domenii determinate de A, atunci $A \cup B$ este conexă.*

Într-adevăr, B și $\mathbf{C}A - B$ sînt deschise și deci și închise în $\mathbf{C}A$; se aplică așadar lema.

Teorema 11. *Dacă A este o mulțime conexă în spațiul conex $\mathcal{S}$ și K o componentă a complementarei $\mathbf{C}A$, atunci $\mathbf{C}K$ este conexă.*

Într-adevăr, să presupunem că am avea o partiție închisă $\{N_1, N_2\}$ a mulțimii $\mathbf{C}K$. Vom arăta că atunci $A = A \cap N_1 \cup A \cap N_2$ este o partiție a lui A, contrar ipotezei. Evident, $A \subset \mathbf{C}K = N_1 \cup N_2$. Rămîne de văzut că $A \cap N_1 \neq \varnothing$ și $A \cap N_2 \neq \varnothing$. Or $A \cap N_1 = \varnothing$ ar însemna $K \cup N_1 \subset \mathbf{C}A$; dar $K \cup N_1$ este conexă în virtutea lemei (K fiind conexă și N_1 simultan închisă și deschisă în $\mathbf{C}K$) și deci $K \cup N_1$, fiind în $\mathbf{C}A$, trebuie să se afle într-o componentă a lui $\mathbf{C}A$, anume: $K \cup N_1 \subset K$; ceea ce este absurd pentru că $K \cap N_1 = \varnothing$ și $N_1 \neq \varnothing$.

Teorema 12. *Dacă, într-un spațiu metrizabil, mulțimea compactă A are (printre altele) componentele B_1 și B_2, există o partiție închisă $\{A_1, A_2\}$ a mulțimii A, astfel că $B_1 \subset A_1$ și $B_2 \subset A_2$.*

Fie punctele $\alpha \in B_1$, $\beta \in B_2$. Cum ele nu pot fi unite printr-o mulțime conexă conținută în A, există după teorema 16 § 60, o partiție închisă $\{A_1, A_2\}$ a mulțimii A cu $\alpha \in A_1$, $\beta \in A_2$. Vom avea atunci $B_1 \subset A_1$, $B_2 \subset A_2$ (căci dacă $B_1 \not\subset A_1$, B_1 ar intersecta A_1 și A_2, de unde ar urma o partiție închisă a lui B_1).

§ 62. Curbe

Nu este ușor de a preciza matematic noțiunea intuitivă de „curbă". Este vorba de a găsi o definiție care să nu fie prea restrictivă și nici atît de generală încît să înglobeze mulțimi de puncte care nu au caracterele ce se atribuie în mod tacit noțiunii de curbă, de exemplu unidimensionalitatea. O curbă într-un spațiu euclidean ne apare înainte de toate ca o reprezentare a unei drepte sau segment de dreaptă.

Atît însă nu este deajuns; trebuie să mai punem oarecare condiţii unei asemenea reprezentări. Prima care se prezintă este condiţia ca reprezentarea să fie biunivocă şi aceasta este insuficientă, căci:

Teorema 1. *Un segment de dreaptă poate fi reprezentat biunivoc pe un pătrat (Cantor).*

Este destul să considerăm segmentul [0, 1]. Fie t abscisa unui punct al segmentului. Dacă $t \neq 0$, putem reprezenta acest număr în mod unic ca serie convergentă de forma

$$t = \frac{1}{2^{\alpha_1}} + \frac{1}{2^{\alpha_1+\alpha_2}} + \cdots \quad (\alpha_1, \alpha_2, \ldots > 0) \tag{4}$$

sau $t = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$. Şi invers, orice şir de numere întregi >0, $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ reprezintă, transformat în seria (4), un număr $0 < t \leqslant 1$.

Vom face acum să corespundă la $t = 0$ punctul $(0, 0)$ şi la un $t = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \neq 0$ din $(0, 1]$, punctul (x, y) de coordonate.

$$x = (\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5, \ldots), \quad y = (\alpha_2, \alpha_4, \alpha_6, \ldots).$$

Am definit astfel o corespondenţă evident biunivocă între intervalul $[0, 1]$ şi pătratul $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$.

Să examinăm în al doilea rînd reprezentările continue ale segmentelor de dreaptă. Mulţimile astfel definite se numesc *continuuri peaniene*. Ele posedă proprietăţile următoare:

1°. Sînt compacte. (§ 57, teorema 2).

2°. Sînt conexe. (§ 60, teoremele 3, 10).

3°. Sînt local conexe, adică fiecare punct z al ei are o vecinătate U_z^c conexă. Aceasta poate fi submulţimea corespunzătoare unui subinterval al intervalului T la care corespunde C. 1° şi 2° spun că mulţimea K este un continuu mărginit într-un spaţiu euclidean, un continuu în $\bar{C}$ sau pe sferă.

Să presupunem că continuul peanian K este imaginea continuă a intervalului $T = [0, 1]$, $K = f(T)$, unde f este o funcţie continuă. Aşa de exemplu sînt: ecuaţiile parametrice, ale unui continuu peanian plan

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

cu f_1, f_2 funcţii continue.

Să subdividem intervalul T în două intervale egale,

$$T_1 = [0, 1/2], \quad T_2 = [1/2, a] \text{ şi fie } K_1 = f(T_1), \quad K_2 = f(T_2).$$

Să subdividem apoi la fel intervalele T_1, T_2 în $T_{1,1}$, $T_{1,2}$, respectiv $T_{2,1}$, $T_{2,2}$, de lungime $1/2^p$ şi fie $K_{1,1}$, $K_{1,2}$, $K_{2,1}$, $K_{2,2}$ mulţimile corespunzătoare. În general, vom avea la subdiviziunea de rang p:

$$T = \cup\, T_{n_1, n_2, \ldots, n_p} \quad \text{şi} \quad K = \cup\, K_{n_1, n_2, \ldots, n_p},$$

unde indicii $n_1, \ldots, n_p$ iau valorile 1 şi 2 în toate modurile, şi intervalele de rang p, pe care le notăm în bloc cu $T^{(p)}$ au lungimea $1/2^p$. Vom aşeza intervalele $T^{(p)}$ în ordine lexicografică: din două intervale vom pune înainte pe cel care are un indice mai mic decît indicele omolog al celuilalt. (De exemplu $T_{1,1,1,2}$ precede pe $T_{1,1,2,1}$). În această ordine două intervale $T^{(p)}$ consecutive au o extremitate comună. Avem, oricare ar fi şirul $n_1, n_2, n_3, \ldots$,

$$T_{n_1} \supset T_{n_1, n_2} \supset T_{n_1, n_2, n_3} \supset \ldots \tag{5}$$

Cum lungimile unui asemenea şir descrescător de intervale $\to 0$, ele au în comun un singur punct t; mulţimile corespunzătoare

$$K_{n_1} \supset K_{n_1, n_2} \supset K_{n_1, n_2, n_3} \supset \ldots \tag{6}$$

au în comun punctul $z = f(t)$.

Orice punct $t \in T$ se poate obţine, într-un singur mod, ca intersecţie a unui şir de intervale (5), dacă convenim de exemplu ca din două intervale cu acelaşi număr de indici (de acelaşi rang) care au eventual pe t ca extremitate comună, să luăm pe cel dintîi în ordine lexicografică. Cu o convenţie analogă, orice punct al continuului C se va obţine ca intersecţie a unui şir (6).

Să mai observăm că un şir (5) este determinat de şirul indicilor n_1, n_2, n_3, ..., care nu este altceva decît mantisa numărului t în sistemul de numeraţie diadic (cu cifrele 1 şi 2).

Definiţie. *Fie* A_{n_1}, A_{n_1, n_2}, A_{n_1, n_2, n_3},..., *unde* n_1, n_2,... *iau valorile* 1 *şi* 2, *mulţimi satisfăcînd condiţiile*:

1. *Sînt închise şi mărginite (adică compacte).*
2. *Dacă* δ_p *este diametrul maxim al mulţimilor* $A^{(p)}$ *cu* p *indici,* $\delta_p \to 0$.
3. *Oricare ar fi şirul* $n_1, n_2, n_3, \ldots,$

$$A_{n_1} \supset A_{n_1, n_2} \supset A_{n_1, n_2, n_3} \supset \ldots$$

4. *În ordine lexicografică a indicilor, două mulţimi* $A^{(p)}$ *consecutive au puncte comune.*

Atunci fiecare intersecţie $A_{n_1} \cap A_{n_1, n_2} \cap A_{n_1, n_2, n_3} \cap \ldots$ *corespunzătoare diverselor şiruri* $n_1, n_2, n_3, \ldots$ *este cîte un şir pentru* z (§ 55, teorema 3), *căruia putem face să-i corespundă numărul cu reprezentarea diadică* $t = 1, n_1 n_2 n_3 \ldots$ *mulţimea tuturor punctelor* z *astfel obţinute se numeşte continuu diadic.*

Teorema 2. *Continuurile peaniene sînt identice cu continuurile diadice.*

Am văzut că un continuu peanian este un continuu diadic. Rămîne să arătăm că corespondenţa definită mai sus între un continuu diadic şi segmentul [0, 1] este o reprezentare continuă. Mai întîi corespondenţa este biunivocă. La un număr t din [0, 1] pot corespunde două reprezentări diadice numai dacă el este de forma $t = k/2^q$ şi atunci

$$t = 1,\ n_1 \ldots n_{q-1}\ 1\ 22 \ldots = 1,\ n_1 \ldots n_{q-1}\ 2\ 11$$

Or, punctele corespunzătoare,

$$z = A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_1, \ldots, n_{q-1}} \cap A_{n_1, \ldots, n_{q-1}, 1} \cap \ldots,$$

$$z' = A_{n_1} \cap \ldots \cap A_{n_1, \ldots, n_{q-1}} \cap A_{n_1, \ldots, n_{q-1}, 2} \cap \ldots.$$

coincid. Pentru simplificare să luăm $q = 1$, adică

$$z = A_1 \cap A_{1,2} \cap A_{1,2,2} \cap \ldots, \quad z' = A_2 \cap A_{2,1} \cap A_{2,1,1} \cap \ldots$$

Deoarece $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$, $A_{1,2} \cap A_{2,1} \neq \varnothing$, ... (5), mulţimile

$$A_1 \cup A_2,\ A_{1,2} \cup A_{2,1}, \ldots$$

au diametrii $\leqslant 2\delta_1, 2\delta_2, \ldots \to 0$; cum ele formează un şir descrescător (6), au un singur punct comun. Dar z şi z' sînt comune acestor mulţimi; deci $z = z'$.

În al doilea rînd funcţia $z = f(t)$ este continuă. Dîndu-se un $\varepsilon > 0$, avem $2\delta_p < \varepsilon$ pentru $p > \nu$ (2). Or, dacă luăm $|t - t_1| < 1/2_p$ $(p > \nu)$, deci t, t_1 într-un interval $T^{(p)}$ sau două asemenea intervale consecutive, va urma $\rho(z, z_1) \leqslant 2\delta_p < \varepsilon$.

Observaţii. Teorema şi demonstraţia sînt valabile în orice spaţiu metrizabil.

Observaţia 2. În mod analog se pot defini continuuri poliadice şi se poate arăta că ele coincid cu continuurile peaniene.

Teorema 3. *Există continuuri peaniene care sînt închideri de domenii plane. Altfel zis: un segment de dreaptă poate fi reprezentat continuu pe un domeniu plan închis (Peano).*

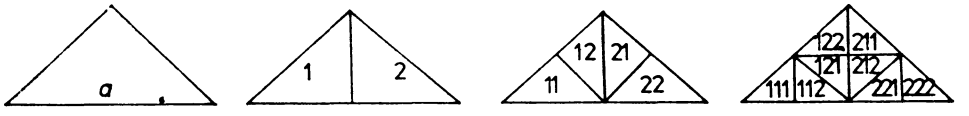

Fig. 35

Vom demonstra aceasta cu următorul exemplu dat de Knopp:

Luăm un triunghi dreptunghic isoscel A de ipotenuză a, pe care îl subdividem în două triunghiuri de acelaşi fel, A_1 şi A_2, prin înălţimea coborîtă pe ipotenuză, apoi subdividem în acelaşi mod A_1 şi A_2 în $A_{1,1}$, $A_{1,2}$ şi $A_{2,1}$, $A_{2,2}$ etc. Condiţia 1 va fi satisfăcută luînd triunghiurile închise. În ce priveşte condiţia 2 avem $\delta_p = a/(\sqrt{2})^p \to 0$. Condiţia 3 este vizibil satisfăcută. Pentru condiţia 4, atunci cînd subdividem un triunghi $A^{(p)}$, vom atribui indicele de rang $p + 1$ egal 1 primului triunghi întîlnit de-a lungul ipotenuzei triunghiului de rang p parcursă în sens pozitiv (faţă de interiorul triunghiului) dacă p este par şi în sens negativ (faţă de interiorul triunghiului) dacă p este impar (vezi fig. 35).

În felul acesta am definit un continuu diadic, deci un continuu peanin, care, evident, umple triunghiul A.

Teoremele 1 şi 3 ne arată că reprezentările biunivoce şi cele continue ale segmentelor de dreaptă nu pot fi considerate ca atare drept curbe. Noţiunea cea mai generală de curbă trebuie să implice reprezentări în acelaşi timp biunivoce şi continue, deci homeomorfe.

Definiţie. *Se numeşte arc simplu imaginea topologică (transformata homeomorfă) a unui segment de dreaptă închis. Acest segment poate fi de altfel oricare, de exemplu* [0, 1]. Căci un segment poate fi transformat homeomorf în oricare altul: astfel

$$x' = a + (b - a)x \quad (b > a)$$

duce [0, 1] în $[a, b]$.

Ca şi continuurile peaniene, arcele simple posedă proprietăţile 1°, 2°, 3°. În plus:

4°. Cu excepţia a două puncte, α şi β, numite *extremităţile* arcului şi care corespund la extremităţile segmentului imagine, orice alt punct z al unui arc simplu constituie o *tăietură;* cu alte cuvinte prin scoaterea punctului arcul îşi pierde conexiunea. Mai precis, dacă notăm arcul cu $\overset{\frown}{[\alpha, \beta]}$, avem partiţia închisă $\{\overset{\frown}{[\alpha, z)}, \overset{\frown}{(z, \beta]}\}$ a mulţimii $\overset{\frown}{[\alpha, \beta]} - z$.

Căci această proprietate o are segmentul imagine $[a, b]$.

Definiție. *Se numește curbă simplă închisă imaginea topologică a unui segment de dreaptă ale cărui extremități sînt identificate (într-un singur punct abstract).*

Evident, și curbele simple închise posedă proprietățile 1°, 2°, 3°, dar în loc de 4°:

4'°, o curbă închisă simplă nu-și pierde conexiunea prin scoaterea unui punct (ea devine atunci un arc simplu deschis, adică fără extremități); din contra, își pierde conexiunea prin scoaterea a două puncte (rămîn atunci două arce deschise avînd acele puncte ca extremități).

Toate aceste proprietăți de natură topologică aparține în adevăr cercului.

Teorema 4. *Fie $C_1, C_2, \ldots, C_n$, n arce simple astfel că două arce consecutive au ultima și prima extremitate comună și două arce oarecare nu au alte puncte comune. Atunci $\cup C_n$ este o curbă simplă, închisă în cazul cînd prima extremitate a lui C_1 coincide cu a doua extremitate a ultimului arc C_n.*

Luîndu-se ca imagini ale arcelor, segmente adiacente, $[a_1, a_2], [a_2, a_3], \ldots, [a_n, a_{n+1}]$, se vede că $C_1 \cap \ldots \cup C_n$ este imaginea topologică a segmentului $[a_1, a_{n+1}]$.

Definiție. *Vom numi curbă (în sensul cel mai general) o reuniune finită sau numărabilă, $\cup C_n$, de arce simple astfel că a doua extremitate a fiecăruia coincide cu prima extremitate a celui următor (cînd nu e vorba de ultimul arc).*

Cînd numărul arcelor C_n este finit, reuniunea lor este un arc dacă prima extremitate a primului arc C_1 și a doua extremitate a ultimului arc C_n sînt distincte; iar dacă aceste extremități se confundă reuniunea arcelor este o curbă închisă.

Arcele simple C_n se pot intersecta și în alte puncte decît extremitățile comune. Acestea se numesc noduri. Dacă nu sînt noduri, și numărul arcelor este finit, avem un arc simplu sau o curbă simplă închisă (teorema 4). Nodurile sînt în număr finit sau numărabil.

Este clar că curbele generale posedă și ele proprietățile 1°, 2°, 3°. O proprietate analoagă cu 4'° ar depinde de numărul și poziția nodurilor. În orice caz, scoaterea tuturor nodurilor (la o curbă care nu este simplă) distruge conexiunea curbei. Căci dacă λ este un nod și C_i arcul cu indicele cel mai mic pe care se află, iar μ primul nod întîlnit pe un arc C_j de indice $\geqslant i$ (μ poate coincide cu λ), avem arcul $\overset{\frown}{[\lambda, z_{i+1}]} \cup \overset{\frown}{[z_{i+1}, z_{i+2}]} \cup \ldots \cup \overset{\frown}{[z_j, \mu]}$, care este simplu și constituie o mulțime închisă și deschisă în curba C, diferită de C.

Teorema 5. *Un continuu pe o curbă simplă (închisă sau nu) este un arc simplu.*

Rezultă din § 60, teoremele 3 și 10.

Teorema 6. *O curbă nu are puncte interioare.*

Fie mai întîi C un arc simplu. Dacă punctul său λ este interior, există o vecinătate sferică $U_\lambda \subset C$. Evident, scoaterea unui punct din U_λ nu strică conexiunea acesteia și deci nici a curbei C, ceea ce este în contradicție cu proprietatea 4° a arcelor simple. La fel se poate raționa (pe baza proprietății 4'°) în cazul unei curbe închise simple. Dacă C este o curbă formată din arce simple conform definiției de mai sus, se vede în primul loc că un punct λ care aparține unui singur arc simplu nu poate fi interior: putem lua atunci U_λ disjunctă de celelalte arce și ar urma ca λ să fie interior acelui arc. Dacă însă λ este pe mai multe arce (extremitate comună la două arce sau nod), vom lua (dacă este cazul) din aceste arce porțiunile cu extremitatea λ care

sînt conținute în U_λ. Este sigur că conexiunea acestei mulțimi este distrusă prin scoaterea tuturor nodurilor și extremităților care sînt în U_λ. Dar pe de altă parte:

Conexiunea interiorului unei sfere (și în general a unui domeniu) nu este distrusă prin scoaterea unui număr numărabil sau finit de puncte. În adevăr z, z' fiind două din punctele rămase, să considerăm toate arcele de cerc care le unesc și sînt $\subset U_\lambda$; evident ele au puterea continuului și deci nu toate vor întîlni punctele pe care le-am scos; z și z' pot fi deci unite printr-un asemenea continuu în mulțimea rămasă, care este deci tot un domeniu.

Definiție. *Un sens de parcurs pe un arc simplu se definește ca corespunzător unui sens în segmentul imagine.* Dacă un sens este fixat, un punct precede pe altul cînd imaginea primului precede pe aceea a celui de al doilea. Ca și pentru segmentul imagine, sensul arcului este determinat de ordinea în care se iau extremitățile lui. Dacă această ordine este α, β, punctul z precede pe z' cînd arcul $\overset{\frown}{[\alpha, z]} \subset \overset{\frown}{[\alpha, \beta]}$ exclude pe z'. Astfel sensul e definit topologic.

În mod analog se definește un sens de parcurs pe o curbă închisă simplă, referindu-ne la cercul imagine. Un sens e atunci determinat printr-o succesiune de trei puncte.

De asemenea noțiunea de sens se întinde la curbe generale, constituite conform definiției de mai sus din arce simple într-o ordine dată. Însăși această ordine definește un sens pe fiecare arc simplu și prin aceasta pe întreaga curbă. În acest caz nu trebuie privit ca o suprapunere de puncte aparținînd diverselor arce ce se întretaie în nod.

Noțiunea de curbă este, în toată generalitatea ce i-am lăsat, încă foarte complicată și poate ieși din sfera ideii intuitive de curbă. Vom da aici cîteva exemple de această natură.

Vom observa în prealabil că construcția diadică de mai sus ne dă un arc simplu dacă mulțimile considerate A satisfac și condiția:

5°. *Cele cu același număr de indici și neconsecutive sînt disjuncte.*

E destul să arătăm că un punct z al continuului diadic nu poate corespunde la două puncte t, de exemplu (pentru simplitate) la

$$t_1 = 1, 1\, n_2 n_3 \ldots \text{ și } t_2 = 1, 2\, n_2' n_3' \ldots$$

Am avea atunci $z \in A_{1, n_2} \subset A_{2, n_2'}$, ceea ce cere după 5°, $n_2 = 2$, $n_2' = 1$; apoi am avea $z \in A_{12n_3} \cap A_{21n_3'}$ ceea ce cere $n_3 = 2$, $n_3' = 1$ etc.
Astfel

$$t_1 = 1, 1\, 22 \ldots, t_2 = 1, 2\, 11 \ldots$$

deci $t_1 = t_2$.

Exemple:

1) *Curbă simplă care nu are tangentă în nici un punct.* Construim un arc simplu ca continuu diadic în felul următor:

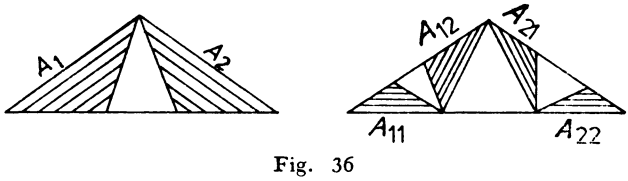

Fig. 36

Luăm un triunghi isoscel cu unghiurile de $3\pi/5$, $\pi/5$, $\pi/5$ și-l împărțim în trei triunghiuri prin cevienele care divid unghiul obtuz în trei unghiuri de $\pi/5$; numim A_1 și A_2 cele două triunghiuri laterale; ele sînt asemenea cu cel primitiv (vezi fig. 36).

Apoi procedăm la fel cu A_1 și A_2. obținînd triunghiurile $A_{1.1}$, $A_{1.2}$ și $A_{2.1}$, $A_{2.2}$ asemenea cu cel primitiv. Se vede imediat că, numerotînd convenabil triunghiurile, ele vor satisface condițiile 1—5. Curba astfel definită trece prin vîrfurile tuturor triunghiurilor. Dacă ar avea tangentă într-un punct z, cum orice $U_z(R)$ conține triunghiuri cu vîrfurile pe curbă, unghiurile acestor triunghiuri ar trebui să tindă la 0 sau π pentru $R \to 0$. Ori ele sînt constante.

Primul exemplu de curbă fără tangente (funcție continuă fără derivate) a fost dat de Célerier; altul rămas celebru a fost dat de Weientrass.

2) *Curbă simplă care are o arie* > 0. Ne putem servi de construcția din exemplul precedent convenabil modificată. Renunțînd la constanța unghiurilor, vom lua primul triunghiu și toate triunghiurile nehașurate isoscele; astfel triunghiurile hașurate vor avea un unghiu o tuz și latura opusă ca diametru. Apoi vom divide un triunghi cu p indici $A^{(p)}$ astfel ca raportul triunghiului nehașurat la $A^{(p)}$ să fie $1/2^{p+1}$; acesta va fi și raportul laturilor opuse la vîrful comun. Atunci, dacă A este aria triunghiului primitiv, triunghiurile $A^{(1)}$ au aria totală $\left(1-\frac{1}{2}\right)A$, triunghiurile $A^{(2)}$ aria $\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)A$, și în general triunghiurile $A^{(p)}$ aria

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2^p}\right)A$$

care tinde la o limită >0 $\left(\text{căci } \prod_1^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^p}\right) \text{ este convergent, seria } \sum 1/2^p \text{ fiind convergentă, vezi § 29, teorema 2}\right)$. Pe de altă parte este ușor de văzut că diametrii triunghiurilor $A^{(p)}$ tind la 0. Deci curba are o arie exterioară > 0.

Vom da acum niște teoreme care caracterizează topologic direct arcele simple și curbele simple închise.

Lemă 1. *Dacă, în continuul* A, *punctul* z *face o tăietură:*

$$A - z = M \cup N,\ M \cap N = \varnothing,$$

atunci

$$\overline{M} = M \cup z,\quad \overline{N} = N \cup z$$

și M, N *sînt deschise în* A *(nu numai în* $A - z$*).*

Deoarece M este închisă în $A - z$,

$$M = \overline{M} \cap (A - z) \supset \overline{M} - z,$$

deci

$$\overline{M} \subset M \cup z.$$

Și tot așa $N \subset \overline{N} \cup z$. Cum $\overline{M} \supset M$, putem avea $\overline{M} = M$ sau $\overline{M} = M \cup z$. Dar prima alternativă trebuie înlăturată, fiindcă ar însemna ca $\{M, (\overline{N} \cup z)\}$ să fie o partiție a lui A, M și $\overline{N} \cup z$, fiind mulțimi închise, nevide și disjuncte, deoarece

$$M \cap (\overline{N} \cup z) = M \cap \overline{N} \subset M \cap (N \cup z) = \varnothing.$$

În sfîrșit M este deschisă în A pentru că $M = A - \overline{N}$; și la fel N.

Teorema 7. *Într-un spațiu metrizabil, un continuu nedegenerat* K *este un arc simplu dacă:*

1° *este compact și*

2° *toate punctele lui, afară de cel mult două, constituie tăieturi (Janiszewsky).*

1. După ipoteza 2°, un punct $z \in K$, care nu este excepțional, determină o partiție închisă $\{M, N\}$ a mulțimii $K - z$, unde, conform lemei precedente $\overline{M} = M \cup z$, $\overline{N} = N \cup z$ și M, N sînt deschise în K.

2. $\bar{M}$ și $\bar{N}$ sînt continuuri (adică sînt conexe). Căci dacă am avea o partiție închisă $\{P, Q\}$ a mulțimii $\bar{M}$ și de exemplu $z \in P$, ar urma

$$Q \cap \bar{N} = Q \cap (N \cup z) = Q \cap N = \varnothing$$

și $\{Q, (P \cup \bar{N})\}$ ar fi o partiție închisă a mulțimii K.

3. Dacă o altă tăietură $z' \in M$ determină partiția închisă $\{M', N'\}$ a mulțimii $K - z'$, atunci una din părțile M', N' este $\subset M$. Căci $\bar{N} \subset K - z'$ și deci $\bar{N}$, care este un continuu (2) se află în una din părțile M' sau N' (altfel ar admite o partiție închisă); atunci cealaltă parte se va găsi în $M = K - \bar{N}$.

4. Fiecare parte, M, N conține cîte un punct excepțional. Să presupunem că M nu conține asemenea puncte; atunci nici $\bar{M}$ nu conține. Cum $\bar{M}$ este compact (§ 56, teorema 3) și metrizabil, există în $\bar{M}$ și deci în M, o mulțime densă și numărabilă $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ de puncte evident neexcepționale (§ 56, teorema 5). Fie (cf. 3) $K - z_1 = M_1 \cup N_1$ cu $M_1 \subset M$. Cum M_1 este deschisă în K și deci în M, conține puncte z_ν; fie z_{n_2} acela care are indicele n_2 cel mai mic (evident $n_2 \neq 1$); și fie $K - z_{n_2} = M_2 \cup N_2$ cu $M_2 \subset M_1$. Pentru același motiv M_2 conține puncte z_ν și fie z_{n_3} cel de indice mai mic (evident $n_3 \neq n_2$, 1) și $K - z_{n_3} = M_3 \cup N_3$ etc. Se definește astfel un șir descrescător de mulțimi închise $\bar{M}_1 \supset \bar{M}_2 \supset \bar{M}_3 \supset \ldots \supset \bar{M}_p \supset \ldots$ a cărui intersecție $L \neq \varnothing$ (§ 55 teorema 3). De altfel cum $\bar{M}_p = M_p \cup z_{n_p}$, $z_{n_p} \notin L$, șirul $M_1, M_2, \ldots$ are aceeași intersecție L.

Să considerăm un punct $\lambda \in L$. El nu este punct excepțional (căci $\lambda \in L \subset M$), deci determină o partiție închisă $\{H, J\}$ a mulțimii $K - \lambda$. Fiecare M_p conține pe H sau K (conform 3). De exemplu H se va găsi într-o infinitate de M_p, și deci $H \subset L$. Dar H fiind deschisă în K și deci în M, conține un z_{ν_0} și dacă n_{p+1} este indicele definit mai sus imediat superior lui ν_0, ajungem la contradicția că $z_{n_{p+1}}$ nu este punctul z_ν de cel mai mic indice din M_p, căci și $z_{\nu_0} \subset M_p$. (Un $n_{p+1} > \nu_0$ trebuie să existe pentru că indicii n_p sînt distincți). Așadar M și N conțin puncte excepționale, și cum numărul acestora este $\leqslant 2$, M și N conțin fiecare cîte un punct excepțional, α și β.

5. M și N sînt conexe (ca și $\bar{M}$ și $\bar{N}$) și deci componentele lui $K - z$.

Căci fie $M = P \cup Q$ o partiție și de exemplu $\alpha \in P$. Avem $K - z = M \cup N$, de unde $K - z = Q \cup (P \cup N)$, care ar fi o partiție închisă pentru că Q este închis și deschis în M, care e la fel în $K - z$ și deci Q este închis și deschis în $K - z$. Or o asemenea partiție este imposibilă pentru că Q nu conține nici α (care este în P) și nici β (care este în N).

6. Mulțimea K poate fi bine ordonată după regula următoare: zicem că z precede pe z' (sau că z' urmează pe z) dacă $K - z' = M_{z'} \cup N_{z'}$, cu $M_{z'} \cap N_{z'} = \varnothing$ și $\alpha \in M_{z'}$, iar $z \in M_{z'}$, sau dacă $z' = \beta$.

Urmează că α precede pe orice $z \neq \alpha$ (α este primul punct al lui K) și β urmează pe orice $z \neq \beta$ (β este ultimul punct al lui K).

Vom scrie relația definită: $z \prec z'$. Rămîne să arătăm că ea este o relație de ordonare, adică:

6_1. $z \prec z$. Evident.

6_2. Dacă $z \neq z'$, ori $z \prec z'$, ori $z' \prec z$. Dacă $z \prec z'$, aceasta înseamnă că $z \in K - M_{z'} = z' \cup N_{z'}$ și deci $z \in N_{z'}$. După 3, $N_z \subset N_{z'}$, (Pentru că ambele mulțimi conțin pe β) și deci $K - N_z \supset K - N_{z'}$, sau $z \cup M_z \supset z' \cup M_{z'}$, de unde urmează (fiindcă $z \neq z'$) $z' \in M_z$, adică $z' \prec z$.

6_3. Dacă $z \prec z'$ și $z' \prec z''$, atunci $z \prec z''$. Prin ipoteză $z \in M_{z'}$ și $z' \in M_{z''}$. După 3, $M_{z'} \subset M_{z''}$ (ambele mulțimi conținînd pe α), deci $z \in M_{z''}$, deci $z \prec z''$.

7. Fie z', $z'' \in K$, $z' \prec z''$ şi (z', z'') mulţimea punctelor z astfel că $z' \prec z \prec z''$, sau cum vom zice, *mulţimea punctelor situate între* z' şi z''. Atunci (z', z'') este deschisă în K şi $\neq \emptyset$.

În adevăr, $(\alpha, z'') = M_{z''}$ (prin definiţia 6), iar $(z', \beta) = N_{z'}$ (vezi 6_2). $M_{z''}$ şi $N_{z'}$ sînt deschise în K şi tot aşa este $(z', z'') = (\alpha, z'') \cap (z', \beta)$.

Apoi dacă $(z', z'') = \emptyset$, orice alt $z \in K$ ar satisface $z \prec z'$ sau $z \succ z''$, adică $K = (M_{z'} \cup z') \cup (N_{z''} \cup z'')$ şi aceasta ar fi o partiţie închisă pentru că termenii sînt mulţimi $\neq \emptyset$, închise în K şi disjuncte, întrucît un punct comun z ar satisface $z \prec z'$ şi $z'' \prec z$, ceea ce cu $z' \prec z''$ ar da (6_3) $z \prec z$, contrar 6_1.

8. Pentru a stabili un homeomorfism între continuul ordonat K şi segmentul $[0, 1]$ vom stabili mai întîi o corespondenţă biunivocă între mulţimea punctelor raţionale din $(0, 1)$ şi o mulţime densă în $K - \alpha - \beta$ şi numărabilă (existentă pentru aceleaşi motive ca la 4), corespunzătoare care să păstreze relaţiile de ordonare. Fie $z_1, z_2, \ldots, z_\nu, \ldots$ şi $t_1, t_2, \ldots, t_\mu, \ldots$ cele două mulţimi numărabile, aranjate ca şiruri. Le vom ordona din nou în nişte şiruri $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n, \ldots$ şi $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ în care ζ_n şi τ_n se vor corespunde în modul voit.

În acest scop luăm întîi $\tau_1 = t_1$ şi $\zeta_1 = z_1$. Apoi fie ζ_2 punctul z_ν de cel mai mic indice, care este $\neq \zeta_1$ şi τ_2 punctul t_μ de cel mai mic indice care este în aceeaşi relaţie de ordonare faţă de τ_1 ca ζ_2 faţă de ζ_1. Mai departe, luăm drept τ_3 punctul t_μ de cel mai mic indice, care este $\neq \tau_1, \tau_2$ şi drept ζ_3 punctul τ_ν de cel mai mic indice, care este în aceeaşi situaţie faţă de τ_1, τ_2 (de exemplu, dacă $\tau_1 \prec \tau_3 \prec \tau_2$, vom avea conform alegerei precedente $\zeta_1 \prec \zeta_2$ şi în mulţimea (ζ_1, ζ_2) care este deschisă vor exista puncte z_ν, din care vom lua pe cel de indice mai mic) etc. Rolurile celor două şiruri se schimbă alternativ. Este evident că orice z_ν este un ζ_n şi orice t_μ un τ_n. Relaţiile de ordonare între punctele ζ_n sînt aceleaşi, prin construcţie, ca între punctele τ_n corespunzătoare (cu indici egali).

9. Pentru a extinde corespondenţa definită între şirurile (z_ν) şi (t_μ) la o corespondenţă între K şi $[0, 1]$, procedăm astfel: Fiind dat punctul $t \in (0, 1)$, considerăm mulţimea T de puncte $t_\mu \prec t$. Acesteia îi corespunde o mulţime Z de puncte z_ν, care se bucură, ca şi T, de proprietăţile:

a) nu are un ultim punct (care urmează pe toate celelalte);

b) dacă z_{ν_0} este în Z, toate punctele z_ν ce preced pe acesta sînt de asemenea în Z. Mulţimea Z este o *secţiune* în mulţimea (z_ν) *în sensul lui Dedekind*. Urmează:

c) mulţimea W formată din punctele lui K care nu preced nici un punct din Z, are un prim punct z. Într-adevăr, dacă nu, oricare ar fi $w \in W$, ar exista în W un punct $w' \prec w$ şi w ar avea vecinătatea deschisă $(w' \beta) \subset W$, aşa că W ar fi deschisă (în K); pe de altă parte, şi $K - W = V$ este o mulţime deschisă, pentru că un punct $v \in V$ precede un punct $v' \in Z \subset V$, deci are o vecinătate deschisă $(\alpha v') \subset V$. Am avea atunci o partiţie $K = V \cup W$.

Punctul z astfel definit va fi corespunzătorul lui t. În sfîrşit vom face să corespundă la 0 şi 1 respectiv α şi β.

10. Corespondenţa astfel definită între $[0, 1]$ şi K este un homeomorfism.

Ea este biunivocă: la un t corespunde un z bine determinat; invers, un $z \in K$ corespunde unui singur t. Căci z determină o secţiune Z în mulţimea (z_ν), formată din punctele $z_\nu \prec z$, iar la Z corespunde o secţiune T în mulţimea (t_μ) care defineşte în mod unic punctul t; la acest t corespunde z în virtutea regulii de la 9.

E evident că la un $t_\mu = \tau_n$ corespunde punctul $z_\nu = \zeta_n$.

Corespondența noastră păstrează relațiile de ordonare: la $t \prec t'$ corespunde $z \prec z'$. Aceasta este clar cînd t și t' sînt puncte t_μ. Dacă $t' = t_\mu = \tau_n$, T (relativ la t) nu conține pe t' și prin urmare Z nu conține pe $z' = \zeta_n$; deci $z \prec z'$. Dacă însă $t = \tau_n$, T' (relativ la t') conține pe t și prin urmare Z' conține pe $z = \zeta_n$, deci $z \prec z'$. În sfîrșit, în cazul general, (t, t') conține un τ_n rațional: $t \prec \tau_n \prec t'$ și deci în virtutea rezultatelor precedente $z \prec \zeta_n \prec z'$.

Pentru ca corespondența să fie un homeomorfism, este destul să fie continuă în sensul $z \to t$ (§ 57, teorema 3) și pentru aceasta este destul ca orice mulțime deschisă în $[0, 1]$ să fie transformată într-o mulțime deschisă în K, sau ca orice interval deschis din $[0, 1]$ să fie transformată într-o mulțime deschisă în C. Ori intervalul $(0, t)$ este transformat în $V = (\alpha, z)$, intervalul $(t, 1)$ în $W = (z, \beta)$ — mulțimi deschise în K și deci un interval (t,t') în $(\alpha, t') \cap (t, \beta)$ — mulțime deschisă în K.

Observație. Punctele excepționale α și β sînt extremitățile arcului.

Corolar. *Un continuu compact nedegenerat într-un spațiu metrizabil are cel puțin două puncte care nu constituie tăieturi.*

Teorema 8. *Într-un spațiu metrizabil, un continuu compact este o curbă simplă închisă dacă conexiunea lui este distrusă prin scoaterea a două puncte oarecare.*

1. Fie α, β două puncte din continuul dat K. Prin ipoteză avem o partiție $K - \alpha - \beta = M \cup N$.

2. Avem $K = \overline{M} \cup \overline{N}$. Ceea ce înseamnă $\alpha, \beta \in \overline{M} \cup \overline{N}$. Într-adevăr, dacă de exemplu $\alpha \notin \overline{M} \cup \overline{N}$, am avea partiția închisă $\{\alpha, (\overline{M} \cup \overline{N} \cup \beta)\}$ a mulțimii K.

3. Unul cel puțin dintre punctele α, β este în $\overline{M}$ și în $\overline{N}$. Căci în cazul contrar $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ ar fi o partiție închisă a mulțimii K.

4. Dacă $\overline{M}$ sau $\overline{N}$ nu este conex, are numai două componente, din care una conține α și cealaltă β.

Dacă $\overline{M}$ nu este conex avem o partiție închisă $\{M_1, M_2\}$ a mulțimii $\overline{M}$. Nu este posibil ca M_1 să nu conțină nici α nici β, căci am avea partiție închisă $\{M_1, (M_2 \cup \alpha \cup \beta \cup \overline{N})$. Deci de exemplu $\alpha \in M_1$ și pentru același motiv $\beta \in M_2$. Apoi M_1 și M_2 sînt conexe, căci dacă de exemplu $\{H, J\}$ ar fi o partiție închisă a mulțimii M_1, am avea o partiție închisă $\{(H \cup M_2), J\}$ unde α și β ar fi în $H \cup M_2$, contrar rezultatului obținut adineaori. Deci M_1 și M_2 sînt componentele lui M.

5. Cel puțin una dintre mulțimile $\overline{M}, \overline{N}$ este un continuu (conexă). Căci altfel am avea $\overline{M} = M_1 \cup M_2$, $\overline{N} = N_1 \cup N_2$ cu $\alpha \in M_1 \cap N_1$, $\beta \in M_2 \cap N_2$ și ar urma partiția închisă $\{(M_1 \cup N_1), (M_2 \cup N_2)\}$ a mulțimii C.

6. $\overline{M}$ și $\overline{N}$ sînt amîndouă continuuri nedegenerate.

Dacă cel puțin una din mulțimile $\overline{M}$, $\overline{N}$ nu ar fi conexă am avea după 5 și 4, $\overline{M} = M_1 \cup M_2$ cu $M_1 \cap M_2 = \varnothing$, $\alpha \in M_1$, $\beta \in M_2$ și $M_1, M_2, \overline{N}$ conexe. Atunci $\alpha, \beta \in \overline{N}$, căci dacă de exemplu $\alpha \notin \overline{N}$, ar urma partiția închisă $\{M_1, (M_2 \cup \overline{N})\}$ a mulțimii K. Apoi, deoarece M_1 și M_2 nu sînt puncte (evident), există în M_1 un punct $\gamma_1 \neq \alpha$ și în M_2 un punct $\gamma_2 \neq \beta$ care nu fac tăieturi (corolarul teoremei precedente); ceea ce înseamnă că $M_1 - \gamma_1$ și $M_2 - \gamma_2$ sînt conexe. Dar cum $\overline{N}$ are în comun punctul α cu $M_1 - \gamma_1$ și punctul β cu $M_2 - \gamma_2$, ar urma ca reuniunea

$$(M_1 - \gamma_1) \cup \overline{N} \cup (M_2 - \gamma_2) = K - \gamma_1 - \gamma_2$$

să fie conexă (§ 60, teorema 5), contrar ipotezei.

Dacă unul din continuuri ar fi degenerat, de exemplu $N = \gamma \neq \alpha, \beta$, atunci am avea pentru C partiția închisă $\{\overline{M}, \overline{N}\}$ unde $K = \overline{M} \cup \overline{N} = (M \cup \alpha \cup \beta) \cup N = (M \cup \alpha \cup \beta) \cup \gamma$.

7. $\overline{M}$ și $\overline{N}$ sînt arce simple, cu extremitățile α și β. După teorema precedentă este destul să arătăm că de exemplu orice punct $z \in \overline{M}$, cu excepția punctelor α și β, constituie o tăietură. Să presupunem că $\overline{M} - z$ este conex. După 3, $\overline{M}$ și $\overline{N}$ au cel puțin un punct α comun. Atunci oricare ar fi $z' \neq \alpha$ în $\overline{N}$, $\overline{N} - z'$ nu este conexă, căci dacă ar fi, ar urma ca

$$(\overline{M} - z) \cup (\overline{N} - z') = K - z - z'$$

să fie conexă, întrucît $\overline{M} - z$ și $\overline{N} - z'$ au pe α în comun și sînt conexe. Pe de altă parte, după corolarul teoremei precedente continuul $\overline{N}$ trebuie să aibă cel puțin un punct $z' \neq \alpha$ excepțional (cu $\overline{N} - z'$ conexă). Această contrazicere dovedește afirmația.

8. Deoarece $\overline{M}$ și $\overline{N}$ nu au alte puncte comune decît extremitățile α și β, $K = \overline{M} \cup \overline{N}$ este o curbă simplă închisă (teorema 4).

§ 63. Poligoane și domenii poligonale în C și $\bar{C}$

Definiție. *O linie poligonală (linie frîntă) este o curbă formată din segmente în număr finit care se succed într-o ordine astfel că a doua extremitate a fiecărui segment coincide cu prima extremitate a segmentului următor (cînd acesta există) (vezi definiția unei curbe generale).*

Linia poligonală este un poligon cînd extremitățile ei coincid ea este atunci o reuniune de segmente care se succed într-o ordine ciclică, cu condiția de mai sus.

O linie poligonală este simplă cînd este o curbă simplă, adică segmentele ei nu au alte puncte comune decît extremitățile comune la segmente consecutive. Analog se definește un poligon simplu (curbă simplă închisă).

Domeniu poligonal se numește un domeniu a cărui frontieră este o reuniune de poligoane.

Un domeniu poligonal este unul din domeniile determinante de reuniunea de poligoane ce formează frontiera sa (§ 61, teorema 4).

Lemă *1. Fie K un continuu (în C sau $\bar{C}$) care conține segmentul $[\alpha, \beta]$, astfel că $\overline{K - (\alpha, \beta)}$ este disjunct de (α, β). Dacă un domeniu D determinat de K are un punct frontieră în (α, β), atunci $[\alpha, \beta] \subset \operatorname{fr} D$ și o vecinătate a segmentului (α, β) disjunctă de $K - (\alpha, \beta)$ și de o anumită parte a segmentului, este în D.*

Prin vecinătate a segmentului (α, β) de o anumită parte a lui, înțelegem o mulțime deschisă care se află într-un semiplan determinat de dreapta $\alpha\beta$ în planul C, sau într-un unghi determinat de dreapta $\alpha\beta$ și de o altă dreaptă care nu taie segmentul $[\alpha, \beta]$, în $\bar{C}$, o mulțime care conține un semicerc cu trul într-un punct oarecare al segmentului $(\alpha\beta)$.

Fie $\zeta_0 \in (\alpha, \beta)$ un punct din fr D (vezi fig. 37). Să considerăm un cerc de centru ζ_0, disjunct de $K - [\alpha, \beta]$. Din cele două semidiscuri limitate de acest cerc și diametrul său de pe dreapta $\alpha\beta$, unul va conține un punct $z \in D$. Cum acest semidisc Γ_0 (considerat deschis) este disjunct de fr $D \subset K$ (§ 61, teorema 5), avem $\Gamma_0 \subset D$. Fie acum $\rho = \rho([\zeta_0, \zeta], K - [\alpha, \beta])$ unde ζ este un punct oarecare din (α, β). Putem acoperi segmentul $[\zeta_0, \zeta] \subset (\alpha, \beta)$ cu un număr finit de discuri de rază ρ, astfel ca două discuri consecutive să aibă puncte (interioare) comune. Semidiscurile lor care sînt de aceiași parte ca Γ_0 față de $[\alpha, \beta]$ vor avea două cîte două puncte comune și pentru același

motiv ca mai sus, vor fi toate în D. Am demonstrat astfel că orice punct $\zeta \in (\alpha, \beta)$ are ca vecinătate un semidisc de centru ζ conținut în D, toate aceste semicercuri fiind de aceiași parte față de $[\alpha, \beta]$; aceste semidiscuri constituie o vecinătate a segmentului (α, β), de aceiași parte a segmentului și $\subset D$. De aici rezultă că $(\alpha, \beta) \subset \text{fr } D$. În sfîrșit α, β sînt puncte frontieră ale lui D ca puncte limită ale unor puncte frontieră. (42, § 54).

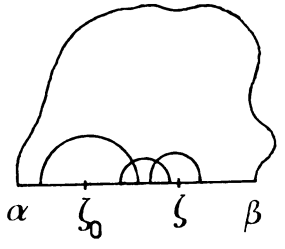

Fig. 37

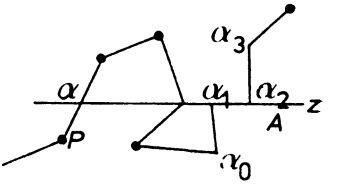

Fig. 38

Definiție. *Vom zice că o linie poligonală P traversează o semidreaptă A într-un punct α dacă α este interior unui segment al lui P, sau extremitate comună la două segmente ale lui P situate în semiplane deosebite față de A; într-un segment (α_1, α_2), dacă segmentele adiacente (α_0, α_1) și (α_2, α_3) ale lui P sînt în semiplane deosebite față de A* (vezi fig. 38) *(considerînd bineînțeles că două segmente consecutive nu pot fi coliniare).*

Teorema 1. *Fiind dat un poligon P, semidreptele cu origina într-un punct $z \neq \infty$ și nesituat pe poligon sînt traversate de acesta de un număr de ori a cărui paritate e aceeași pentru toate aceste semidrepte.*

În adevăr, fie A și B două semidrepte cu originea în z. Ele determină două domenii unghiulare R, R' (care sînt semiplane cînd A și B sînt semidrepte opuse). Să considerăm punctele sau segmentele de traversare ale semidreptelor A și B în ordine ciclică pe P. (Se vede că putem evita ușor ca A sau B să conțină puncte din P care să nu fie de traversare). Porțiunile din P cuprinse între două puncte sau segmente de traversare consecutive sînt în același unghiu (§ 60, teorema 8, corolarul 1). Cum aceste porțiuni, în număr egal cu traversările, sînt alternativ într-un unghi și celălalt, numărul lor este par. Astfel numărul traversărilor semidreptelor A și B fiind par, numerele de traversări ale acestor semidrepte în parte sînt de aceiași paritate.

Definiție. *Vom zice că un punct $\neq \infty$ și situat pe poligonul P este par sau impar față de P, după cum numărul de traversări ae unei semidrepte cu origina în acel punct este par sau impar.*

Teorema 2. *Un poligon simplu în C sau $\bar{C}$ determină două domenii, care au poligonul ca frontieră comună. Aceste domenii sînt formate respectiv din punctele pare și punctele impare, cu eventualul adaos al punctului ∞.*

1. Punctele unui domeniu D determinat de un poligon P (simplu sau nu) au aceiași paritate.

Într-adevăr, dacă segmentul $z_1 z_2 \subset D$, două semidrepte de același sens și cu originile în z_1 și z_2 dau aceleași traversări și deci z_1 și z_2 au aceiași paritate. După § 60, teorema 11, două puncte oarecare, z și z' din D pot fi unite printr-o linie poligonală $z\, z_1\, z_2 \ldots z_n z'$ în D. Ori z și z_1, z_1 și z_2, ..., z_n și z', au aceiași paritate și deci și z și z' au aceeași paritate.

2. Există puncte de ambele parități față de un poligon P (simplu sau nu). Căci dacă $[\alpha_1, \alpha_2]$ este un segment din P și $[z_1, z_2]$ un segment care intersectează P numai într-un punct $\zeta \in (\alpha_1, \alpha_2)$, punctele z_1 și z_2 au parități deosebite: din două semidrepte de direcție z_1z_2, de același sens și origini z_1, z_2, una e traversată în ζ și pe deasupra în aceleași puncte sau segmente ca cealaltă semidreaptă.

3. Din 1 și 2 rezultă că un poligon P (simplu sau nu) determină cel puțin două domenii.

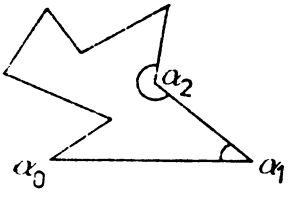

Fig. 39

4. Un poligon P simplu determină cel mult două domenii, a căror frontieră este.

Dacă D este un domeniu determinat de P, fr $D \subset P$ (§ 61, teorema 5). Să presupunem de exemplu că fr D are un punct în segmentul $(\alpha_0, \alpha_1) \subset P$ (vezi fig. 39). Atunci conform lemei, $[\alpha_0, \alpha_1] \subset$ fr D și o vecinătate a segmentului (α_0, α_1), de o anumită parte a lui este în D. Să considerăm un cerc de centru α_1, care nu intersectează alte segmente ale lui P decît $[\alpha_0, \alpha_1]$ și $[\alpha_1, \alpha_2]$. Aceste segmente împart interiorul cercului în două sectoare, din care unul conține puncte din D, de aceeași parte a segmentului (α_0, α_1); acel sector este deci în D (fiind disjunct de P, § 60, teorema 8, corolarul 1). Urmează că fr D are puncte pe segmentul (α_1, α_2). Aplicînd iar lema, vedem că $[\alpha_1, \alpha_2] \subset$ $\subset$ fr D etc. Astfel $P \subset$ fr D și cum fr $D \subset P$, avem fr $D = P$. Totodată rezultă că D conține vecinătăți ale segmentelor lui P, de anumite părți ale acestor segmente; de unde urmează că P nu mai poate determina decît cel mult un al doilea domeniu D', care va conține vecinătățile segmentelor lui P de părțile opuse.

Cazul cînd punctul inițial al fr D ar fi un vîrf al lui P, de exemplu α_1, se tratează cu argumentul de mai sus: unul din sectoarele considerate de centru α_1 trebuie să conțină puncte din D (fiindcă $\alpha_1 \in$ fr D) deci acel sector este în D, de unde apoi urmează că segmentele (α_0, α_1) și (α_1, α_2) conține puncte din fr D ș.a.m.d.

5. Din 3 și 4 rezultă că P determină două domenii, a căror frontieră este P, iar din 1 și 2 că punctele acestor domenii au parități deosebite.

Definiție. *Fiind dat un poligon simplu P, numim domeniu interior determinat de P pe acela care conține punctele impare și domeniu exterior pe acela care conține punctele pare. Aceste domenii le notăm și:* int P, ext P.

Teorema 3. *Dacă poligonul simplu P nu trece prin punctul ∞, acesta se află în ext P.*

În adevăr, să considerăm o semidreaptă cu originea într-un punct exterior z_0 și care nu trece prin nici un vîrf al lui P. Ea intersectează P într-un număr par de puncte, care determină un număr impar de segmente, dintre care ultimul este o semidreaptă. Este clar că punctele a două segmente consecutive (cu extremitatea comună pe P) sînt de parități deosebite. Segmentele sînt deci alternativ exterioare și interioare. Cum primul segment (cu o extremitate în z_0) este exterior, ultimul, cu o extremitate ∞, e de asemenea exterior.

Teorema 4. *O linie poligonală simplă și deschisă (cu extremități diferite) determină (în C sau $\bar{C}$) un singur domeniu, a cărui frontieră este linia poligonală.*

Raţionamentul de la teorema 2 punctul 4. ne arată că linia poligonală $\alpha_0 \alpha_1 \ldots \alpha_n$ determină cel mult două domenii conţinînd vecinătăţi ale segmentelor liniei poligonale de o parte sau de alta. Ori, un cerc cu centrul în extremitatea α_0 şi care nu intersectează decît segmentul $[\alpha_0, \alpha_1]$, determină un sector de deschidere 2π (interiorul cercului minus o rază) conţinut într-un acelaşi domeniu (pentru că sectorul este disjunct de linia poligonală). Acest domeniu are deci puncte de ambele părţi ale segmentului $[\alpha_0, \alpha_1]$ şi deci de ambele părţi ale tuturor segmentelor liniei poligonale. Deci linia poligonală nu poate determina decît un domeniu.

Lema 2. *Dacă un poligon simplu P are $n > 3$ laturi necoliniare, există un segment interior avînd ca extremităţi două vîrfuri.*

1. Laturile necoliniare $\alpha_n\alpha_1$ şi $\alpha_1\alpha_2$ determină un unghiu A_1 deschis, care conţine puncte interioare în vecinătatea lui α_1 (un sector al unghiului, de rază destul de mică este interior lui P). Să presupunem întîi că deschiderea acestui unghi este $< \pi$. Atunci interiorul T al triunghiului $\alpha_n\alpha_1\alpha_2$ este conţinut în A_1. Dacă T este disjunct de P, segmentul (α_n, α_2) poate fi disjunct de P, sau poate conţine vîrfuri sau laturi; în primul caz un segment care satisface cerinţa este (α_n, α_2), în al doilea caz (α_1, α_p), unde α_p este un vîrf aparţinînd lui (α_n, α_2).

2. Dacă T intersectează P, orice latură care are puncte comune cu T are cel puţin un vîrf în T (deoarece o asemenea latură nu poate fi (α_n, α_2) şi nu poate intersecta fr T decît într-un punct). Fie $\alpha_{p_1} \in T$ un vîrf. În segmentul (α_1, α_{p_1}) avem un segment $(\alpha_1, \alpha_q) \subset \operatorname{int} P$. Punctul α_q, la distanţă minimă de α_1, dacă nu este un vîrf este pe o latură care are un vîrf $\alpha_{q_1} \in T$. Aplicăm acelaşi raţionament triunghiului $T_1 = \alpha_1\alpha_{p_1}\alpha_{q_1}$. Cum $T \supset T_1 \supset T_2 \supset \ldots$ şi fiecare triunghiu lasă afară vîrfurile de indice mai mic, vîrfurile considerate sînt disjuncte şi cum numărul vîrfurilor este finit, procesul se opreşte la un $\alpha_{q_k} = \alpha_{p_k}$; atunci segmentul (α_1, α_{p_k}) răspunde cerinţei.

3. Să considerăm în sfîrşit cazul cînd A_1 are deschiderea $>\pi$. Cum pe orice semidreaptă a acestui unghiu trebuie să existe un număr par de puncte sau segmente de traversare (din care unul este α_1), A_1 intersectează poligonul P. Să mai observăm că orice latură a lui P care intersectează A_1, are cel puţin un vîrf în A_1, căci altfel A_1 ar proiecta un segment şi deci ar avea o deschidere $<\pi$. Aceste două circumstanţe ne permit să aplicăm şi în acest caz raţionamentul de la 2, rolul lui T fiind jucat de A_1.

Lema 3. *Fie D un domeniu determinat de poligonul simplu P; L o linie poligonală simplă, cu extremităţile $\alpha, \beta \in P$ şi conţinută (cu excepţia extremităţilor) în D; P_1 şi P_2 liniile poligonale în care P este împărţit de α şi β ($P = P_1 \cup P_2$). Atunci $D - L$ are două componente, D_1 şi D_2, astfel că avem:*

$$D = D_1 \cup D_2 \cup L, \quad \operatorname{fr} D_1 = P_1 \cup L, \quad \operatorname{fr} D_2 = P_2 \cup L. \tag{7}$$

$P_1 \cup L$ fiind un poligon simplu, determină două domenii, dintre care unul D_1, este disjunct de P_2 (căci unul $\supset P_2 - \alpha - \beta$, care este disjunct de $P_1 \cup L$). Tot aşa, $P_2 \cup L$ determină un domeniu D_2 disjunct de P_1. Cu aceasta ultimele două relaţii (7) sînt satisfăcute în virtutea teoremei 2.

$D_1 \cap D_2 = \varnothing$ căci în cazul contrar, cum D_1 este disjunct de fr D_2, ar urma $D_1 \subset D_2$ şi pentru un motiv analog, $D_2 \subset D_1$, deci $D_1 = D_2$; ori D_1 şi D_2 au frontiere diferite.

Urmează că D_1 şi D_2 conţin vecinătăţi ale transversalei L de părţi deosebite ale acesteia.

Un punct $z \in D$ şi $\notin L$ poate fi unit cu L printr-un drum poligonal $\subset D$, oprit la prima sa intersecţie ζ cu L. Acest drum are, într-o vecinătate $U_\zeta \subset D$, un punct ζ_1 din D_1 sau D_2. Porţiunea $[z, \zeta_1]$, a drumului fiind disjunctă de fr D_1 sau fr D_2, va fi în D_1 respectiv D_2 şi tot aşa în particular punctul z. Aşadar $D \subset D_1 \cup D_2 \cup L$.

Pe de altă parte, $D_1 \subset D$ pentru că D_1, conţine puncte din D în vecinătatea liniei L şi este disjunctă de fr $D(= P_1 \cup P_2)$. La fel $D_2 \subset D$, deci $D \supset D_1 \cup D_2 \cup L$. Cu aceasta e demonstrată şi prima relaţie (7).

Teorema 5. *Interiorul unui poligon simplu P, mărginit de $n \geqslant 3$ laturi necolineare, se poate descompune în triunghiuri disjuncte şi laturile comune la cîte două din aceste triunghiuri, astfel încît vîrfurile fiecărui triunghi sînt vîrfuri ale poligonului şi laturile necomune sînt laturi ale poligonului.*

Teorema fiind evidentă pentru $n = 3$, o demonstrăm prin inducţie. Conform lemei 2, fiind dat un poligon cu $n > 3$ laturi necolineare există un segment interior avînd ca extremitate două vîrfuri, fie (α_1, α_p). Conform lemei 3, poligoanele simple $\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_p\alpha_1$ şi $\alpha_1\alpha_p \ldots \alpha_n\alpha_1$ determină două domenii D_1 şi D_2 astfel că

$$D = \text{int } P = D_1 \cup D_2 \cup (\alpha_1, \alpha_p).$$

D_1 şi D_2 sînt interioarele poligoanelor precedente pentru că nu conţin ∞ ca şi D. Cum aceste poligoane au mai puţin de n laturi, ipoteza de inducţie li se aplică. De aici urmează teorema şi pentru poligonul P, observînd că (α_1, α_p) este latură comună a două triunghiuri componente din D_1 şi D_2.

Definiţie. *Zicem că o linie poligonală L traversează un poligon simplu P într-un punct α dacă L conţine segmente (α, λ), (α, μ) (nu în mod necesar laturi), conţinute în cele două domenii determinate de P; într-un segment $[\alpha,] \subset P$, dacă L conţine segmente (α, λ), (α', μ) situate în cele două domenii determinate de P.*

Avem sigur o traversare într-un punct α dacă acesta e interior la cîte o latură din P şi din L.

Teorema 6. *Fiind dat un poligon simplu P şi o linie poligonală L, dacă extremităţile acesteia nu sînt situate pe P, ele sînt separate sau nu de P, după cum L traversează P de un număr impar sau par de ori.*

Se vede imediat observînd că, dacă scoatem din L punctele şi segmentele de traversare, rămîne un număr de bucăţi conexe (linii poligonale) egal cu numărul traversărilor plus unu, şi că aceste bucăţi sînt, conform definiţei precedente, alternativ în cele două domenii determinate de P (cu excepţia punctelor de pe P unde nu sînt traversări).

Teorema 7. *O linie poligonală L conţine o linie poligonală simplă L_0 cu aceleaşi extremităţi.*

Linia L este prin definiţie o succesiune de segmente, $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\beta$. Dacă nu este simplă, parcurgînd-o de la extremitatea α spre extremitatea β, vom trece pentru prima oară printr-un punct γ_1 prin care am mai trecut (nod). Lăsăm la o parte poligonul astfel parcurs, începînd din γ_1 şi sfîrşind în γ_1 (buclă); mergem mai departe. Procedăm la fel cînd trecem iar printr-un punct γ_2 prin care am mai trecut etc., pînă ajungem în β. Lăsînd la o parte toate buclele în ordinea arătată, rămîne o linie poligonală L_0, de extremităţi α şi β, care nu are noduri, adică, este simplă.

Teorema 8. *Un poligon este o reuniune de poligoane simple.*

Un poligon P este o succesiune de segmente $\alpha\alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n\alpha$. Parcurgîndu-le în sensul dat prin definiţie de la α la α, îl vom descompune ca mai sus într-un poligon simplu P_0 şi alte poligoane (bucle). Acelaşi proces fiind apoi aplicat acestor poligoane, se ajunge la descompunerea în poligoane simple.

Corolarul 1. *O linie poligonală L este reuniunea unei linii poligonale simple cu aceleaşi extremităţi şi a unor poligoane simple.*

Corolarul 2. *Frontiere unui domeniu poligonal este o reuniune de poligoane simple. Nu este necesar ca acestea să fie conexe.*

§ 64. Leme de separaţie

Lema 1. *O mulţime A închisă şi mărginită (în C sau $\bar{C}$) poate fi acoperită cu un sistem finit de domenii poligonale disjuncte cu frontierele formate din reuniuni de poligonale simple şi conţinute într-o vecinătate $U_A(\varepsilon)$ dată a ei.*

A fiind mărginită, poate fi acoperită cu o reţea de pătrate în număr finit şi de latură $l < \varepsilon/\sqrt{2}$. Fie (Q) pătratele deschise care conţin puncte din A sau au puncte frontieră în A. Considerăm mulţimea Δ formată din:

1° toate pătratele Q,

2° toate segmentele deschise care sînt laturi comune la cîte două pătrate Q adiacente,

3° toate punctele care sînt vîrfuri comune la cîte 4 pătrate Q.

Deoarece punctele segmentelor 2° şi vîrfurile 3° sînt evident interioare în Δ, aceasta este o mulţime deschisă. Ea are un număr finit de componente, D_n, formate evident în acelaşi mod.

Este clar că $A \subset \Delta \subset U_A(\varepsilon)$, căci orice punct z din Δ este într-un pătrat închis $\bar{Q}$, care conţine puncte din A, la distanţa $\leqslant l\sqrt{2} < \varepsilon$ de z.

Rămîne să dovedim că D_n sînt domenii poligonale, adică fr D sînt reuniuni de poligoane simple. Ştim că fr D_n este formată din puncte frontieră ale pătratelor $Q^{(n)}$ din D_n (§ 54, 39). Dintre acestea, cele de categoriile 2° şi 3° sînt interioare; celelalte însă sînt puncte frontieră pentru că nu sînt în D_n şi au în vecinătăţile lor puncte din D_n. Cu alte cuvinte, fr D_n se compune din: laturile care aparţin la cîte un singur $Q^{(n)}$ şi vîrfurile care aparţin la cîte unul, două sau trei pătrate $Q^{(n)}$. Un vîrf α_p din fr D_n poate fi în una din următoarele 4 situaţii (fig. 40).

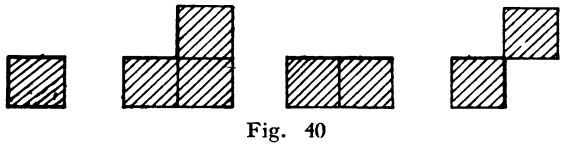

Fig. 40

În toate cazurile α_p este extremitate comună a două segmente bine determinate din fr D_n, dacă facem convenţia ca în cazul 4 să considerăm α_p ca dublu şi să împerechem o latură a unui pătrat, cu o latură perpendiculară a celuilalt. În felul acesta frontiera va fi formată numai din poligoane simple (ce pot avea vîrfuri comune). Este apoi clar că extremităţile fiecărei laturi din fr D_n sînt în această frontieră. Cu convenţia de mai sus, fiecare latură din fr D_n este urmată de alta, bine determinată, făcînd parte din aceiaşi frontieră. Cum numărul laturilor este finit, orice succesiune de laturi din fr D_n se închide: fr D_n este deci o reuniune de poligoane simple.

Corolarul 1. *Un continuu mărginit (în C sau $\bar{C}$) poate fi acoperit cu un domeniu poligonal, conținut într-o vecinătate a lui.*

Căci Δ are în acest caz o singură componentă (§ 60, teorema 8).

Corolarul 2. *Dacă A_1 și A_2 sînt continuuri disjuncte (în C sau $\bar{C}$) și A_1 este mărginit, există un poligon simplu P care le separă și este conținut într-o vecinătate $U_{A_1}(\varepsilon)$ dată.*

După corolarul 1 există un domeniu poligonal D, astfel ca $A_1 \subset D \subset U_{A_1}(\varepsilon)$; luînd $\varepsilon < \rho(A_1, A_2)$ vom avea și $A_2 \subset \text{ext } D$. Fie P primul poligon simplu din fr D, traversat de un drum care unește un punct $z_2 \in A_2$ cu un punct $z_1 \in D$; A_1 și A_2 sînt în domenii diferite față de P. În adevăr, dacă ζ este punctul de traversare, porțiunea $[z_2, \zeta)$ a domeniului fiind, ca și z_2, în ext D (pentru că este disjunctă de fr D), este într-un domeniu determinat de P diferit de acela care conține pe D. Primul domeniu conține z_2 și deci A_2 (continuu disjunct de fr D) iar al doilea conține A_1.

Lema 2. *Fiind dată mulțimea compactă A (în C sau $\bar{C}$), dacă A_1 și A_2 sînt două compomente (continuuri) ale ei, există un poligon simplu P care separă A_1 de A_2 și este disjunctă de A.*

După § 61, teorema 12, există o partiție închisă $\{M_1, M_2\}$ a lui A cu $A_1 \subset M_1$ și $A_2 \subset M_2$; părțile M_1 și M_2 sînt compacte și deci mărginite în C, iar în $\bar{C}$ una cel puțin nu conține ∞ și deci e mărginită. Presupunînd M_1 mărginită și luînd $\varepsilon < \rho(M_1, M_2)$, avem după lema 1 o reuniune Δ de domenii astfel că $M_1 \subset \Delta \subset U_{M_1}(\varepsilon)$. Unul din aceste domenii $D \supset A_1$ și vom avea $A_1 \subset D \subset U_{M_1}(\varepsilon)$ și $A_2 \subset M_2 \subset \text{ext } \Delta \subset \text{ext } D$. Dacă acum P este primul poligon din fr D traversat de un drum care unește un punct din A_2 cu un punct din D, se vede ca la corolarul 2 că P separă A_1 de A_2. Totodată P este disjunct de A (fiindcă $P \subset \text{fr } \Delta$ și $M_1 \subset \Delta$, $M_2 \subset \text{ext } \Delta$).

Observație. Se poate arăta că poligonul separator P poate fi luat într-o vecinătate dată $U_{A_1}(\varepsilon)$ (A_1 fiind mărginit).

Corolarul 2 al lemei 1 apare atunci ca un caz particular.

Lema 3 *(Alexander). Fie (în C sau $\bar{C}$) A_1 și A_2 mulțimi închise, dintre care una mărginită, α și β două puncte care pot fi unite printr-un drum poligonal L_1 disjunct de A_2 și un drum poligonal L_2 disjunct de A_1. Dacă $L_1 \cup L_2$ este un poligon simplu care nu separă mulțimea $A_1 \cap A_2$, atunci α și β nu sînt separate de $A_1 \cup A_2$.*

1. Cazul $A_1 \cap A_2 = \varnothing$ este evident, așa că vom presupune $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$.

Vom arăta întîi că, dacă condițiile lemei sînt satisfăcute de niște drumuri poligonale L_1 și L_2 oarecare, ele sînt satisfăcute și de niște drumuri L_1' și L_2' formate din segmente paralele cu axele (sau cu două direcții fixe). Pentru a construi asemenea drumuri, împărțim fiecare latură a poligonului $L_1 \cup L_2 = P$ în cîte două segmente, pe care le vom numi semilaturi. Fie acum ρ_0 minimul distanțelor dintre semilaturi neconsecutive (fără extremități comune); $\rho_1 = \rho(L_1, A_2)$; $\rho_2 = \rho(L_2, A_1)$, Prin ipoteză, un domeniu D, determinat de P, este disjunct de $A_1 \cap A_2$. Evident, avem $\rho(D, A_1 \cap A_2) \geqslant \geqslant \max(\rho_1, \rho_2)$ (§ 59, teorema 9). Împărțim apoi fiecare semilatură în segmente de lungime $< \min\left(\frac{1}{2}\rho_0, \rho_1, \rho_2\right)$ pe care le înlocuim cu cîte două segmente paralele axelor, astfel ca segmentele ce înlocuiesc semilaturile care ies dintr-un vîrf al lui P să fie luate în unghiul $\geqslant \pi$ al acelor semilaturi (ceea ce

face ca ele să formeze o linie poligonală simplă (vezi fig. 41). Punctele acestor segmente sînt la distanţe $< \min\left(\frac{1}{2}\rho_0, \rho_1, \rho_2\right)$ de semilaturile respective. Prima inegalitate asigură că diversele linii poligonale simple obţinute prin construcţia precedentă constituie un poligon simplu $L_1' \cup L_2'$, iar celelalte inegalităţi asigură că L_1' este disjunct de A_2 şi L_2' disjunct de A_1. Tot aceste inegalităţi mai spun că poligonul $L_1' \cup L_2'$ este într-o vecinătate $U_D(\varepsilon)$ cu $\varepsilon < \rho_1, \rho_2 \leqslant \rho(D, A_1 \cap A_2)$, şi deci determină un domeniu $D' \subset U_D(\varepsilon)$ disjunct de $A_1 \cap A_2$.

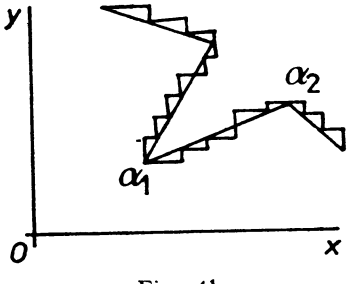

Fig. 41

2. Putem aşadar presupune că P este format din segmente paralele axelor. Apoi, deoarece teorema este evidentă în cazul $L_1 \cap A_1 = \emptyset$ sau $L_2 \cap A_2 = \emptyset$, care implică $L_1 \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$, respectiv $L_2 \cap (A_1 \cup A) = \emptyset$, este suficient să considerăm cazul $L_k \cap A_k \neq \emptyset$ $(k = 1, 2)$.

Fie A_1 mărginit şi $B_1 = A_1 \cap \bar{D}$, $B_2 = A_2 \cap \bar{D}$. Cum $\bar{D}$ este disjunctă de $A_1 \cap A_2$, $\rho(B_1, B_2) = \delta > 0$. Aplicăm peste B_1 (care este mărginită) o reţea formată din drepte paralele axelor, la distanţe $< \frac{1}{2}\delta$, în care facem să intre toate dreptele pe care stau laturile poligonului P. Astfel un dreptunghi deschis al reţelei este disjunct de P şi dacă intersectează D, el este conţinut în D.

Fie acum (Q) dreptunghiurile reţelei care sînt în D şi totodată au puncte interioare sau puncte frontieră în B_1 (adică în A_1). Fie Δ mulţimea constituită din dreptunghiurile deschise Q, segmentele deschise care sînt laturi comune la două dreptunghiuri Q şi punctele care sînt vîrfuri comune la patru dreptunghiuri Q. Se vede, ca la lema 1, că Δ este o reuniune de domenii poligonale. Cum dreptunghiurile $\bar{Q}$ sînt disjuncte de B_2, poligoanele frontieră ale lui Δ sînt disjuncte de A_2. De asemenea este clar că aceste poligoane pot intersecta A_1 numai pe L_1. Căci $B_1 \subset \overline{\Delta} \subset \bar{D}$, deci un poligon intersectează A_1 în B_1; apoi un punct din B_1 care nu este pe P (deci pe L_1), este prin construcţie în int Δ.

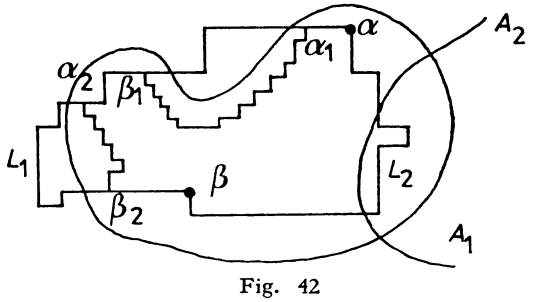

Fig. 42

Să parcurgem linia L_1 de la α spre β şi fie α_1 primul punct din fr Δ întîlnit; el aparţine unui poligon Π_1 şi fie β_1 ultimul punct al acestui poligon pe L_1 (vezi fig. 42)

și să presupunem că α porțiunea $\overset{\frown}{(\alpha, \alpha_1)}$ a lui L_1 este disjunctă de $\overline{\Delta}$. Poligonul Π_1 conține o porțiune (linie poligonală) $\Pi_1' = \overset{\frown}{(\alpha_1, \beta_1)} \subset D$ și care împarte pe D în două domenii (§ 63, lema 3), dintre care unul D_1 are frontieră formată din Π_1' și porțiunea $[\overset{\frown}{\alpha_1, \beta_1}] = \Pi_1''$ a lui L_1. Cum acest domeniu are puncte din Δ în vecinătatea lui α_1 (căci $[\overset{\frown}{\alpha_1, \beta_1}]$ are puncte din fr Δ în vecinătatea lui α_1), el conține componenta lui Δ care are pe Π_1 ca poligon frontieră. Să mai observăm că punctele α_1, β_1 nu pot fi în A_1, căci altfel, dacă de exemplu $\alpha_1 \in A_1$, dreptunghiurile rețelei care au pe α_1 ca vîrf ar fi în Δ și α_1 n-ar putea fi primul punct din fr Δ pe L_1. Punctul β_1 poate fi un vîrf al unui al doilea poligon Π_2 din fr Δ, exterior domeniului D_1 (β_1 prezintă atunci cazul 4 de la lema 1) sau avem o porțiune $\overset{\frown}{(\beta_1 \alpha_2)}$ a liniei L_1 disjunctă de fr Δ; în acest caz poate fi înglobat și precedentul luînd $\alpha_2 = \beta_1$. Avem ca mai sus o porțiune Π_2' dintr-un poligon frontieră Π_2, $\Pi_2' = \overset{\frown}{(\alpha_2, \beta_2)}$ unde β_2 urmează după α_2 pe drumul L_1 etc. Astfel drumul L_1 este înlocuit cu drumul $[\overset{\frown}{\alpha, \alpha_1}] \cup \Pi_1' \cup [\overset{\frown}{\beta_1, \alpha_2}] \cup \cup \Pi_2' \cup \ldots \cup \Pi_q' \cup [\overset{\frown}{\beta_q, \beta}]$ disjunct de A_1 și A_2. Evident în cazul cînd $\alpha \in \overline{\Delta}$ sau $\beta \in \overline{\Delta}$ vom avea $\alpha_1 = \alpha_2$, respectiv $\beta_1 = \beta$.

Observația 1. În $\bar{C}$ condiția ca A_1 sau A_2 să fie mărginit nu este necesară. Ea intervine în demonstrație numai ca să asigure că B_1 sau B_2 este mărginit și cum aceste mulțimi sînt disjuncte, este sigur că una din ele este mărginită (aceea care nu conține ∞).

Corolarul 1. *(Janiszewsky). Dacă mulțimile A_1 și A_2 închise în $\bar{C}$ au o intersecție conexă, două puncte α și β care nu sînt separate de A_1 și de A_2 nu sînt separate nici de $A_1 \cup A_2$.*

Cu un homeomorfism (care lasă neschimbate raporturile de separație) putem aduce punctele α și β la distanță finită. Există atunci două drumuri între α și β, L_1 disjunct de A_2 și L_2 disjuncte de A_1. Aceste două linii poligonale, pe care le putem presupune simple vor putea avea un număr finit de puncte comune, pe care le luăm în ordinea în care se prezintă pe drumul L_1 (de la α spre β): $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$. (Se vede ușor că putem evita ca L_1 și L_2 să aibă segmente comune). Punctele α și γ_1 pot fi unite printr-o porțiune a liniei L_1, disjunctă de A_2 și printr-o porțiune a liniei L_2, disjunctă de A_1; aceste două linii poligonale nu au alte puncte comune și deci formează un poligon simplu, care nu poate separa $A_1 \cap A_2$ pentru că această mulțime este disjunctă de poligon și conexă. Deci α și γ_1 nu sînt separate de $A_1 \cup A_2$. La fel γ_1 și γ_2 etc.

Corolarul 2. *Dacă A_1 și A_2 sînt închise în $\bar{C}$ și $\mathbf{C}A_1$, $\mathbf{C}A_2$ sînt conexe (domenii), iar intersecția $A_1 \cap A_2$ este de asemenea conexă (continuu), atunci și $\mathbf{C}(A_1 \cup A_2)$ este conexă (domeniu).*

Urmare imediată a corolarului 1.

Observația 2. Condiția relativă la $A_1 \cap A_2$ este satisfăcută dacă $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Ca o primă aplicație a lemei precedente vom demonstra:

Teorema 1. *Dacă mulțimea închisă A determină în C sau $\bar{C}$, domeniile (Δ) și este conținută în domeniul D, atunci componentele mulțimii $D - A$ sînt $(D \cap \Delta)$.*

Δ fiind unul din domeniile determinate de A, $D \cap \Delta \neq \varnothing$. Într-adevăr, $\mathbf{C}A - \Delta$ este deschisă, ca reuniune a celorlalte domenii determinate de A și dacă $D \cap \Delta = \varnothing$, am avea partiția

$$\mathcal{S} = \Delta \cup [(\mathbf{C}A - \Delta) \cup D] \quad (\mathcal{S} = C \text{ sau } \bar{C}).$$

Apoi $D \cap \Delta$ fiind deschisă, mai trebuie arătat că este conexă: Două puncte z_1, z_2 din această mulțime nu sînt separate de $\mathbf{C}D$ și A; cum $\mathbf{C}D \cap A = \varnothing$, se aplică corolarul 1 al lemei 3: z_1, z_2 nu sînt separate de $\mathbf{C}D \cup A$, adică sînt în aceeași componentă a mulțimii $\mathbf{C}(\mathbf{C}D \cup A) = D \cap \mathbf{C}A = D - A$.

În sfîrșit, $D - A = D \cap \mathbf{C}A = D \cap \mathbf{C} \Delta = \mathbf{C} D \cap \Delta$, ceea ce dovedește că $(D \cap \Delta)$ sînt componentele lui $D - A$.

§ 65. Domenii determinate de curbe simple

Teorema 1. *Un arc simplu C_0 determină în C sau $\bar{C}$ un singur domeniu, a cărui frontieră este.*

A doua afirmație rezultă imediat (dacă prima este demonstrată) din faptul că un arc simplu nu are puncte interioare (§ 62, teorema 6).

Pentru a demonstra prima afirmație vom arăta că două puncte α și β, care nu aparțin arcului simplu C_0, pot fi unite printr-un drum poligonal în $\mathbf{C}C_0$.

Vom arăta că ipoteza: C_0 separă α de β, duce la absurd. În acest caz, dacă C_0 este împărțit în două arce simple $C_0 = C' \cup C''$ cu $C' \cap C'' = z$, unul din aceste arce trebuie să separe α de β. Căci în cazul contrar aplicînd § 64, lema 3, corolarul 1, ar urma că C_0 nu separă α de β. Acum, arcul C_0 fiind considerat ca imagine a intervalului $[0, 1]$, să-l împărțim în două arce împărțind intervalul în intervale egale; fie C_1 arcul care separă α și β. Împărțindu-l iar în două arce prin împărțirea intervalului corespunzător vom avea din nou un arc C_2 care separă α și β. În definitiv se definește astfel un șir de arce $C_0 \supset C_1 \supset C_2 \supset \ldots$ care corespund unui șir de intervale monoton descrescător și care au un punct comun t_0 Corespunzătorul z_0 al acestuia este comun arcelor $C_0, C_1, C_2, \ldots$. Ori, dacă o vecinătate U_{z_0} lasă afară punctele α și β, arcele C_n care (pentru $n > \nu$) sînt $\subset U_{z_0}$ (din cauza continuității reprezentării) nu pot separa α de β.

Teorema 2. *(Jordan). O curbă simplă închisă C_0 determină, în C sau $\bar{C}$, două domenii a căror frontieră este.*

Dacă C_0 (considerat în $\bar{C}$) trece prin ∞, o aducem la distanță finită cu o transformare liniară.

1° Orice domeniu D determinat de C_0 are frontiera C_0. Într-adevăr, fr $D \subset C_0$. Aceasta este adevărat pentru orice domeniu D determinat de o mulțime închisă C_0. Un punct z care nu este în C_0 aparține unui domeniu determinat de C_0 și deci este în D sau în ext D. Apoi fie $\zeta \in C_0$ un punct care n-ar fi în fr D. Cum fr D este închisă și deci închisă în C_0, există un arc $C_1 \subset C_0$ care conține ζ și este disjunct de fr D, așa că fr $D \subset C_0 - C_1$. După teorema 1, ζ și un punct $z \in D$ nu sînt separate de arcul simplu $C_0 - C_1$ și cu atît mai puțin de fr D. Deci $\zeta \in D$, ceea ce-i absurd.

2° Teorema este adevărată cînd C_0 conține un segment $\overline{ab}$. Demonstrăm întîi că C determină cel puțin două domenii. Fie $c \in \overline{ab}$ și o vecinătate U_c disjunctă de $C_0 - \overline{ab} = C_1$ (mulțime închisă). În U_c considerăm punctele z, z' situate de o parte și de alta a lui $\overline{ab}$. Dacă z, z' n-ar fi separate de C_0, ar exista o linie frîntă L cu extremitățile z, z', disjunctă de C_0. Linia $\overline{zz'} \cup L$ este un poligon care se descompune în orice caz în poligoane simple. Dintre acestea unul, P, are o latură ce conține punctul $c = \overline{ab} \cap \overline{zz'}$ și este situată pe segmentul $\overline{zz'}$. Punctele a, b sînt separate de P fiindcă $\overline{ab}$ traversează P numai în c (L fiind disjunctă de $\overline{ab}$); deci C_1 intersectează P și prin urmare L (deoarece nu intersectează $\overline{zz'} \subset U_c$). Contrazicerea demonstrează că z, z' sînt în domenii diferite față de C_0.

După 1°, orice domeniu determinat de C_0 are frontiera C_0 și în particular punctul frontieră c. El conține unul din semicercurile deschise în care U_c este împărțită de $\overline{ab}$. Deci C_0 determină numai două domenii.

3° În cazul general, fie D un domeniu determinat de C_0. Dintr-un punct $m \in D$ să ducem două semidrepte care intersectează C_0 și fie a, b primele lor intersecții cu C_0. Linia frîntă $\lambda = \overline{am} \cup \overline{mb} \subset D$. Punctele a, b determină în C_0 niște arce C_1 și C_2 ($C_0 = C_1 \cup C_2 \cup a \cup b$).

Considerăm curbele simple închise $\Gamma_1 = C_1 \cup \overline{\lambda}$, $\Gamma_2 = C_2 \cup \overline{\lambda}$, pentru care teorema este adevărată (2°). Dintre cele două domenii determinate de Γ_1, unul $E_1 \supset C_2$ (disjunct de Γ_1), iar celălalt Δ_1 este disjunct de C_2. La fel Γ_2 determină un domeniu $E_2 \supset C_1$ și altul Δ_2 disjunct de C_1.

Vom demonstra că $D = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \lambda$.

Mai întîi $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$. Căci dacă Δ_1, Δ_2 ar avea un punct comun, cum Δ_2 este disjunct de fr $\Delta_1 = C_1 \cup \overline{\lambda}$, ar urma $\Delta_2 \subset \Delta_1$ și tot așa $\Delta_1 \subset \Delta_2$, deci $\Delta_1 = \Delta_2$, și în consecință fr $\Delta_1 =$ fr Δ_2 sau $\Gamma_1 = \Gamma_2$, absurd.

Un punct $q \in \lambda$ are o vecinătate circulară $U_q \subset D$; aceasta conține cîte un sector în Δ_1 și Δ_2 (q fiind în frontierele Γ_1, Γ_2 ale acestor domenii). Aceste sectoare sînt deosebite, căci altfel $\Delta_1 \cap \Delta_2 \neq \varnothing$. Urmează $\Delta_1 \subset D$ și $\Delta_2 \subset D$ (întrucît Δ_1 și Δ_2 sînt disjuncte de $C_0 =$ fr D) și $D \supset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \lambda$.

Invers, dacă $z \in D$, dar z nu-i pe λ, putem uni z în D cu un punct de pe λ, printr-o linie frîntă pe care o oprim la prima sa intersecție q cu λ; aceasta va intersecta unul din sectoarele considerate mai sus, și cum ea nu are alt punct comun cu Γ_1 sau Γ_2 decît q, punctul z va aparține aceluiași domeniu determinat de Γ_1 sau Γ_2 ca și sectorul intersectat. Astfel $D \subset \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \lambda$, ceea ce demonstrează afirmația.

4° C determină cel puțin două domenii.

Fie $\zeta \in C_1$. Prin definiția lui Δ_2, ζ nu este în $\overline{\Delta}_2 = \Delta_2 \cup \Gamma_2$. Deci există U_ζ disjunctă de $\overline{\Delta}_2$. Cum $\zeta \in$ fr E_1, U_ζ conține puncte din E_1; acestea nu sînt în $\overline{\Delta}_1$, nici în $\overline{\Delta}_2$, deci nici în $\overline{D} = D \cup C = \overline{\Delta}_1 \cup \overline{\Delta}_2$; ele aparțin așadar unui al doilea domeniu determinat de C_0.

5° C_0 determină numai două domenii.

Într-adevăr, D fiind domeniul considerat la 3° (care are frontiera C_0), fie z_1, $z_2 \in$ ext D. Cum z_1, z_2 nu sînt în $\overline{\Delta}_1$ (căci nu sînt în $\Delta_1 \subset D$, nici în $\Gamma_1 = C_1 \cup \overline{\lambda}$), ele nu sînt separate de Γ_1; tot așa nici de Γ_2, deci după lema lui Janiszewski (§ 64, lema 3, corolarul 1) nici de $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = C_0 \cup \lambda$, și cu atît mai puțin de C_0. Astfel ext D este al doilea domeniu detesminat de C_0, și după 4° el nu este vid.

Observație. În C un arc simplu sau o curbă simplă închisă sînt prin definiție mărginite (vezi § 56, cazuri particulare ale teoremelor 2, 3) în $\bar{C}$ aceste curbe sînt mărginite dacă nu trec prin ∞.

Definiție. *Un domeniu care are ca frontieră o curbă simplă închisă se mai numește domeniu Jordan sau scurt: domeniu J.*

Dacă o curbă simplă închisă C este mărginită (nu trece prin ∞), dintre cele două domenii pe care le determină se numește domeniu exterior cel care conține ∞ și domeniu interior, celălalt. Ele se pot nota cu ext C și int C (aceste notații neputînd duce la confuzii). De asemenea, se zice că o mulțime A este exterioară respectiv interioară curbei C, cînd $A \subset$ ext C sau $A \subset$ int C.

Cînd curba C nu este mărginită (trece prin ∞) nu se poate face în general o discriminare între cele două domenii (ci numai pentru anumite categorii de curbe, cum sînt poligoanele simple (§ 63), sau alte curbe conexe).

Teorema 3. *Dacă două curbe simple închise sînt disjuncte, fiecare dintre ele este într-un domeniu determinat de cealaltă și acest domeniu conține un domeniu determinat de prima curbă.*

Prima afirmație rezultă imediat din faptul că o curbă închisă este un continuu și din § 60, teorema 8. Fie curbele C determinînd domeniile D_1, D_2 și C' domeniile D_1' și D_2' (vezi fig. 43). Avem de exemplu $C' \subset D_1$ și $C \subset D_2'$; atunci $D_1' \subset D_1$. În adevăr D_1' este disjunctă de C (fiindcă $C \subset D_2' \subset CD_1'$) și cum are puncte în D_1 — în vecinătatea lui C' — urmează $D_1' \subset D_1$.

Teorema 4. *Două curbe simple închise disjuncte și mărginite pot prezenta numai următoarele două cazuri:*

1°. *Una din ele, C', este interioară celeilalte, C, și atunci* int $C' \subset$ int C, ext $C' \supset$ ext C, *iar C este exterioară lui C'.*

2°. *Fiecare este exterioară celeilalte, și atunci* int $C \subset$ ext C int $C' \subset$ ext C.

Într-adevăr, dacă de exemplu $C' \subset$ int C, int C conține, după teorema precedentă, un domeniu determinat de C'; cum nu conține ∞, avem int $C \supset$ int C'. De aici urmează imediat $C \subset$ ext C' și, printr-un raționament analog, ext $C' \supset$ ext C.

Dacă nu are loc cazul precedent rămîne numai $C \subset$ ext C' și $C' \subset$ ext C.

Atunci ext C conține după teorema precedentă un domeniu determinat de C' și acesta nu poate fi ext C', care $\supset C$, deci ext $C \supset$ int C'. La fel ext $C' \supset$ int C.

Teorema 5. *Fie D un domeniu în C sau $\bar{C}$ și $C_0 \subset D$ o curbă simplă închisă. Atunci $D - C_0$ are două componente (domenii) ale căror frontiere sînt $C_0 \cup F_1$ și $C_0 \cup F_2$, unde F_1 și F_2 sînt intersecțiile* fr D *cu cele două domenii determinate de C_0.*

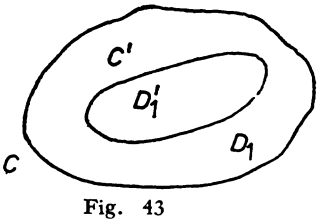

Fig. 43

Dacă D_1 și D_2 sînt domeniile determinate de C_0, mulțimea descihsă $D - C_0$ are componentele $\mathfrak{D}_1 = D \cap D_1$ și $\mathfrak{D}_2 = D \cap D_2$ (§ 64, teorema 1); cît privește frontierele acestora, să aplicăm 35 și 36 din § 54:

$$\text{fr } \mathfrak{D}_1 \subset \bar{D} \cap \text{fr } D_1 \cup \bar{D}_1 \cap \text{fr } D = C_0 \cup D_1 \cap \text{fr } D,$$

căci fr $D_1 = C$ disjunctă de fr D,

$$\text{fr } \mathfrak{D}_1 \supset D \cap \text{fr } D_1 \cup D_1 \cap \text{fr } D = C_0 \cup D_1 \cap \text{fr } D.$$

Deci fr $\mathfrak{D}_1 = C_0 \cup F_1$ cu $F_1 = D_1 \cap$ fr D.

La fel se raționează pentru $\mathfrak{D}_2$.

§ 66. Conexiunea domeniilor

Vom studia aici mai de aproape proprietățile de conexiune în domeniile unui plan C sau $\bar{C}$.

Definiție. *Numim (tăietură) transversală într-un domeniu D, un arc simplu $L \subset D$. dar cu extremitățile conținute în* fr D. *(Cu L am notat arcul fără extremități; deci arcul întreg se va nota cu $\bar{L}$.) Noțiunea a fost deja întrebuințată în cazul transversalelor poligonale.*

O transversală este de specia I sau II după cum extremitățile ei sînt în aceiași componentă a fr D *sau în componente deosebite.*

Numim tăietură cu un capăt într-un domeniu D, un arc simplu $L \subset D$, cu o singură extremitate aparținînd la fr D *(L este aici arcul fără această extremitate).*

Observație. Din § 61, teorema 6 rezultă că, fiind date două puncte $\alpha, \beta \in$ fr D, există transversale avînd extremitățile în vecinătăți U_α, U_β date. În particular există transversale care unesc două componente ale fr D dacă numărul componentelor este finit.

Teorema 1. *Dacă L este o tăietură în domeniul D sau o curbă simplă conținută în D, atunci $D - L$ este o mulțime deschisă și* fr $(D - L) =$ fr $D \cup L$.

Prima afirmație este evidentă. Apoi, deoarece $D - L = D \cap \mathbf{C}L$, avem (§ 54, 36.)

$$\text{fr}\,(D - L) \supset \mathbf{C}L \cap \text{fr}\,D \cup D \cap \text{fr}\,\mathbf{C}L = \text{fr}\,D \cup L.$$

Pe de altă parte se vede imediat că fr $(D - L) \subset$ fr $D \cup L$.

Definiție. *Zicem că un domeniu D în $\bar{C}$ are ordinul de conexiune (mai scurt: conexiunea) k, dacă* fr D *are k componente (în $\bar{C}$). Ordinul de conexiune este infinit, $k = \infty$, dacă* fr D *are o infinitate de componente. Un domeniu se zice simplu conex dacă are conexiunea $k = 1$, ceea ce înseamnă că frontiera lui este conexă.*

Aceeași definiție a conexiunii se poate aplica în C unui domeniu mărginit. Dacă domeniul nu este mărginit, ordinul de conexiune în C este prin definiție același ca în $\bar{C}$ (conform exemplului 1 § 70).

Teorema 2. *Dacă D este un domeniu și Γ o componentă a complementarei $\mathbf{C}D$ (în $\bar{C}$), atunci* fr Γ *este o componentă a* fr D.

Mai întîi, după § 61, teorema 7, fr $\Gamma = \Gamma \cap \text{fr}\,\mathbf{C}D = \Gamma \cap \text{fr}\,D$.

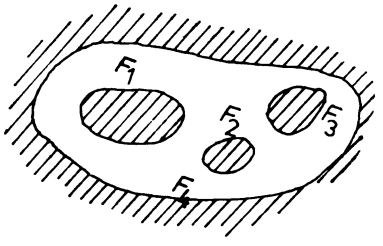

Fig. 44

Apoi fr Γ este conexă. Într-adevăr, altfel ar exista un poligon simplu Π care o separă fără s-o intersecteze (§ 64, lema 2). Dar, cele două domenii determinate de Π conțin atît puncte din Γ cît și din D (în veciunătatea punctelor din fr $\Gamma \subset$ fr D), ar urma ca Π să conțină puncte din Γ și din D ($\subset \mathbf{C}\Gamma$) și deci și puncte din fr Γ; contradicție.

fr Γ fiind conexă, se află într-o componentă F_1 a fr D: fr $\Gamma \subset F_1 \subset$ fr D (vezi fig. 44).

Cum $F_1 \subset \mathbf{C}D$ și intersectează Γ, avem $F_1 \subset \Gamma$, și deci $F_1 \subset \Gamma \cap \text{fr}\,D =$ $=$ fr Γ; așa dar $F_1 =$ fr Γ.

Teorema 3. *Pentru ca un domeniu D în $\bar{C}$ să aibă ordinul de conexiune k, este necesar și suficient ca $\mathbf{C}D$ să aibă k componente; frontierele acestora sînt componentele frontierei lui D.*

Urmează din teorema 2, observînd că, deoarece fr $D \subset \mathbf{C}D$, orice componentă a fr D se află într-o componentă a lui $\mathbf{C}D$.

Teorema 4. *O tăietură cu un capăt L nu schimbă conexiunea unui domeniu* D: $D - L$ *are aceiaşi conexiune ca* D *şi* $\mathrm{fr}(D - L) = \mathrm{fr}\, D \cup L$.

Două puncte $z, z' \in D - L$ pot fi unite printr-o mulţime conexă din $D - L$, după cum rezultă din § 64, lema 3, corolarul 1, aplicat mulţimilor închise fr D şi L, a căror intersecţie este conexă (fiind un punct) (vezi fig. 45). Deci $D - L$ este un domeniu şi ca şi în teorema 1, $\mathrm{fr}(D - L) = \mathrm{fr}\, D \cup L$. Cum L are puncte comune cu o componentă a fr D, $\mathrm{fr}(D - L)$ are acelaşi număr de componente ca fr D.

Teorema 5. *O transversală de specia II nu distruge conexiunea unui domeniu, dar micşorează ordinul de conexiune cu* 1.

Fie $F_1, F_2, \ldots$ componentele fr D şi L o transversală cu extremităţile $\alpha_1 \in F_1$ şi $\alpha_2 \in F_2$ (vezi fig. 46). Este de arătat că $D - L$ este un domeniu; atunci vom avea după teorema 1,

$$\mathrm{fr}(D - L) = \mathrm{fr}\, D \cup L = (F_1 \cup L \cup F_2) \cup F_3 \cup \ldots$$

Şi cum $F_1 \cup L \cup F_2$ este un continuu, ordinul de conexiune al lui $D - L$ este $k - 1$ (k fiind conexiunea lui D).

Pentru a dovedi că $D - L$ este un domeniu, să considerăm două puncte $z, z' \in D - L$. Există o partiţie fr $D = M \cup N$ astfel că $M \supset F_1$, $N \supset F_2$ (§ 61, teorema 12). Aplicînd § 64, lema 3, corolarul 1 mulţimilor M şi L (cu $M \cap L = \alpha_1$ conex) rezultă că $M \cup L$ nu separă z, z'; apoi aplicînd din nou aceeaşi lemă mulţimilor închise $M \cup L$ şi N, rezultă că $M \cup L \cup N = \mathrm{fr}\, D \cup L$ nu separă z, z'. Cum $\mathrm{fr}(D - L) = \mathrm{fr}\, D \cup L$, afirmaţia este demonstrată şi cu ea întreaga teoremă.

Corolar. *Dintr-un domeniu de conexiune k (finită) se pot scoate $h < k$ transversale de specia* II *care sînt disjuncte şi astfel că două din ele nu unesc aceleaşi componente ale frontierei; atunci se obţine un domeniu de conexiune $k - h$. În particular domeniul poate fi făcut simplu conex cu ajutorul a $k - 1$ transversale de specia a* II-a.

Se vede aplicînd repetat teorema şi observaţia de la începutul paragrafului. Fie $F_1, F_2, \ldots, F_k$ componentele frontierei lui D. Putem de exemplu uni F_1 cu F_k printr-o transversală $L_1 \subset D$; $D - L_1$ are conexiunea $k - 1$

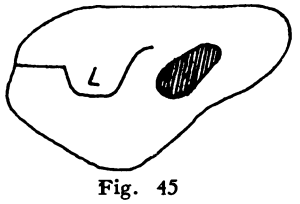

Fig. 45

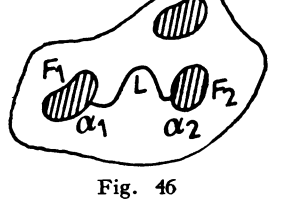

Fig. 46

şi fr $(D - L_1) = F_2 \cup \ldots \cup (F_k \cup F_1 \cup L_1)$. Apoi putem uni F_k cu F_2 printr-o transversală $L_2 \subset D - L_1$; $D - L_1 - L_2$ are conexiunea $k - 2$ şi fr $(D - L_1 - L_2) = F_3 \ldots \cup (F_k \cup F_1 \cup F_2 \cup L_1 \cup L_2)$. Etc.

Teorema 6. *Pentru ca un domeniu D în C sau $\bar{C}$ să fie simplu conex este necesar şi suficient ca orice curbă simplă închisă conţinută D şi chiar numai orice poligon simplu conţinut în D să determine un domeniu conţinut în D (sau: să nu separe* fr$D$).

Considerăm D simplu conex în $\bar{C}$; atunci fr D este un continuu și o o curbă simplă închisă $C_0 \subset D$ nu poate separa fr D(§ 60, teorema 8).

Reciproc, să presupunem că nici un poligon simplu $\mathbf{C}D$ nu separă fr D (în C sau în $\bar{C}$). Dacă D nu ar fi simplu conex, fr D în $\bar{C}$ nefiind conexă, ar exista un poligon simplu P care o separă (§ 64, lema 2) (evident, atît în C cît și în $\bar{C}$), fără s-o intersecteze, și care este în D fiindcă ambele domenii determinate de P conțin puncte din D (în vecinătatea fr D) și deci P conține puncte din D, pe drumuri ce unesc asemenea puncte în D.

Teorema 7. *Un domeniu D simplu conex, în C sau $\bar{C}$, este împărțit de o transversală L în două domenii simplu conexe*: $D - L = D_1 \cup D_2$ *cu* $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, *și avem*: fr $D_1 = L \cup C_1$, fr $D_2 = L \cup C_2$, *unde* $C_1 \cup C_2 = F =$ fr D *și* C_1, C_2 *sînt continuuri.*

Reciproc, dacă orice transversală, chiar numai poligonală, distruge conexiunea unui domeniu, acel domeniu este simplu conex.

1. *Demonstrăm că $D - L$ are două componente cînd L este o linie poligonală.* Continuul $F \cup L$ conținînd cel puțin un segment I (se aplică § 63, lema 1) determină două domenii, D_1 și D_2, care sînt conținute în $D - L$ pentru că au puncte din $D - L$ în vecinătatea lui I. Se vede ca în lema 3 (§ 63) că $D_1 \neq D_2$ și că D_1 și D_2 conțin vecinătățile transversalei L de o parte și de alta a ei. Apoi orice punct $z \in D - L$ poate fi unit cu L printr-un drum poligonal $\mathcal{L} = \widehat{z\zeta} \subset D$, care nu are decît extremitatea ζ în L (îl oprim la prima sa intersecție cu L). Cum $\mathcal{L}$ conține puncte din D_1 sau D_2 în vecinătatea lui ζ, $\mathcal{L} - \zeta$ și totodată punctul z este în D_1 sau D_2 (fiind disjuncte de frontierele acestor domenii, care sînt $\subset F \cup L$). Așadar $D - L = D_1 \cup D_2$, cu $D_1 \cap D_2 = \varnothing$.

2. *Demonstrăm acum același rezultat în cazul unei curbe L oarecare.* Considerăm o linie poligonală simplă $M \subset D$, care intersectează L numai în extremitățile ei, ζ_1 și ζ_2 (vezi fig. 47). (Putem construi o asemenea linie ducînd dintr-un punct $z \in D - L$ ca extremitate, două linii poligonale simple și disjuncte, în D, pe care le oprim la primele lor intesrsecții cu L.) Pentru a asigura aceste condiții vom face construcția într-o vecinătate $U_\zeta \subset D$ a unui punct $\zeta \in L$. Punctele distincte ζ_1, ζ_2 definesc un arc $L_0 \subset L$ și linia L este astfel împărțită în trei arce: $L = L_0 \cup L_1 \cup L_2$.

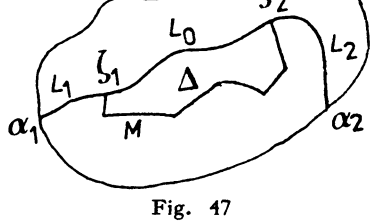

Fig. 47

$\Pi = L_0 \cup \bar{M}$ este o curbă simplă închisă, care determină un domeniu $\Delta \subset D$ (teorema 6). Cum L_1 ri L_2 sînt tăieturi disjuncte, $D - L_1 - L_2$ este un domeniu simplu conex (teorema 4) și M este o transversală în acest domeniu; deci conform punctului 1, $D - L_1 - L_2 - M$ se descompune în două domenii:

$$D - L_1 - L_2 - M = \Delta_1 \cup \Delta_2, \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing. \tag{8}$$

Cum Δ este disjunctă de frontierele acestor domenii (conținute în fr $(D - L_1 - L_2 - M) = F \cup L_1 \cup L_2 \cup M$ (teorema 1)), Δ este într-unul din domeniile Δ_1, Δ_2; fie $\Delta \subset \Delta_1$. Vom avea atunci și $L_0 \subset \Delta_1$, L_0 fiind socotit

fără extremitățile ζ_1, ζ_2 pentru că $L_0 \subset \bar{\Delta} \subset \bar{\Delta}_1$, dar $L_0 \not\subset \operatorname{fr} \Delta_1$). Putem scrie (8)

$$D - L = (\Delta_1 - L_0) \cup (\Delta_2 \cup M)$$

$$= (\Delta_1 - \Delta - L_0) \cup (\Delta_2 \cup \Delta \cup M) = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \varnothing.$$

Rezultatul urmărit va fi stabilit dacă vom arăta că ultimele două mulțimi sînt domenii $\neq \varnothing$. Avem $\Delta_2 \cup \Delta \cup M \neq \varnothing$ pentru că $\Delta \neq \varnothing$ și $\Delta_1 - \Delta - L_0 \neq \varnothing$ pentru că vecinătatea unui punct din L_0 nu poate fi în $\Delta \cup L_0$. Se vede ușor că $D_2 = \Delta_2 \cup \Delta \cup M$ este deschisă: Δ_2 și Δ sînt deschise și M are vecinătăți în Δ_2 și în Δ; de asemenea $D_1 = \Delta_1 - \Delta - L_0 = \Delta_1 \cap \mathbf{C}\bar{\Delta}$. Apoi, D_2 este conexă pentru că Δ_2 poate fi unit cu M și la rîndul lui M cu Δ. Mai rămîne de dovedit că D_1 este conexă.

Cum $D_1 = \Delta_1 \cap \mathbf{C}\bar{\Delta}$, două puncte $z_1, z_2 \in D_1$ nu sînt separate de $\operatorname{fr} \Delta_1$ și nici de $\operatorname{fr} \Delta = L_0 \cup \bar{M}$. De aici urmează, avînd în vedere că $\operatorname{fr} \Delta_1 \cap \operatorname{fr} \Delta = \bar{M}$ este un continuu, că z_1, z_2 nu sînt separate de $\operatorname{fr} \Delta_1 \cup \operatorname{fr} \Delta = \operatorname{fr} \Delta_1 \cup L_0$ (§ 64, lema, 3, corolarul 1). Ele nu sînt separate nici de $\operatorname{fr} D_1$, deoarece $\operatorname{fr} D_1 \subset \operatorname{fr} \Delta_1 \cup L_0$; într-adevăr, D_1 fiind una din componentele mulțimii $\Delta_1 - L_0$ (căci Δ este o componentă și $\Delta_1 - L_0 = \Delta \cup D_1$), avem (§ 61, teorema 5) $\operatorname{fr} D_1 \subset \operatorname{fr} (\Delta_1 - L_0) = \operatorname{fr} \Delta_1 \cup L_0$ (teorema 1).

Aceasta rezultă și din 39, § 54, aplicat la $D_1 = \Delta_1 \cap \mathbf{C}\bar{\Delta}$.

3. *Domeniile D_1 și D_2 sînt simplu conexe*: un poligon simplu în D_1 determină un domeniu care conține $\operatorname{fr} D \cup L$, căci poligonul se află în $D - L$ și $\operatorname{fr} (D - L) = \operatorname{fr} D \cup L$; deci poligonul nu separă $\operatorname{fr} D_1 \subset \operatorname{fr} (D - L)$ și se aplică teorema 6. Exact la fel se arată că D_2 este simplu conex.

4. $L \subset \operatorname{fr} D_1$. Dacă un punct $\zeta \in L$ nu ar fi în $\operatorname{fr} D_1$, ar exista chiar un arc $L_0' \subset L$ disjunct de $\operatorname{fr} D_1$ (într-o vecinătate U_ζ disjunctă de $\operatorname{fr} D_1$); dar atunci, dacă $L = L_0' \cup L_1' \cup L_2'$, L_1' și L_2' fiind tăieturi cu un capăt în D, am putea uni un punct din D_1 cu un punct din D_2 printr-un drum în $D - L_1 - L_2$ (teorema 4), care nu intersectează $\operatorname{fr} D_1 (\subset \operatorname{fr} D \cup L)$.

În același mod se arată de asemenea că $L \subset \operatorname{fr} D_2$.

5. Putem pune acum $\operatorname{fr} D_1 = L \cup C_1$, $\operatorname{fr} D_2 = L \cup C_2$ și avem (§ 61, teorema 5): $\operatorname{fr} (D - L) = \operatorname{fr} (D_1 \cup D_2) = \operatorname{fr} D_1 \cup \operatorname{fr} D_2$, sau $\operatorname{fr} D \cup L = C_1 \cup C_2 \cup L$, de unde $C_1 \cup C_2 = \operatorname{fr} D$.

Observație. În această relație nu avem, în general, $C_1 \cap C_2 = \varnothing$.

6. *C_1 și C_2 sînt continuuri.* Să presupunem că C_1 nu este conexă. Extremitățile α_1, α_2 ale lui L nu pot fi în aceeași componentă H a lui C_1, fiindcă atunci $H \cup L$ ar fi evident o componentă a $\operatorname{fr} D_1$ (care este conexă). Deci C_1 are două componente, $H_1 \supset \alpha_1$ și $H_2 \supset \alpha_2$; și nu poate avea alte componente căci atunci $H_1 \cup H_2 \cup L$ ar fi o componentă a $\operatorname{fr} D_1$. Așa dar $C_1 = H_1 \cup H_2$, unde $H_1 \cap H_2 = \varnothing$. Să ducem acum, în D_1, o transversală poligonală M', cu extremitățile ζ_1', ζ_2' în L (ca la 2). După cele demonstrate pînă acum, $D_1 - M' = \Delta_1' \cup \Delta'$, cu $\Delta_1' \cap \Delta' = \varnothing$, unde Δ' este desigur un domeniu Jordan cu $\operatorname{fr} \Delta' = \bar{M}' \cup L_0''$, $L_0'' \subset L$ avînd extremitățile ζ_1', ζ_2'. Punînd $L = L_1'' \cup L_0'' \cup L_2''$, cu $L_1'' \ni \alpha_1$, ζ_1' și $L_2'' \ni \alpha_2$, ζ_2', urmează $\operatorname{fr} \Delta_1' = C_1 \cup L_1'' \cup L_2'' \cup M' = (H_1 \cup L_1'') \cup (H_2 \cup L_2'') \cup M'$ cu L_1'', L_2'', M' disjuncte; de asemenea și $H_1 \cup L_1''$, $H_2 \cup L_2''$, M' sînt disjuncte (se aplică 5). Continuurile $H_1 \cup L_1''$ și $H_2 \cup L_2''$ pot fi separate printr-un poligon simplu Π', disjunct de ele (§ 64, lema 1, corolarul 2) (căci unul din ele este mărginit).

Poligonul Π' conține puncte $z \in \Delta_1'$, pentru că domeniile pe care le determină conțin puncte din Δ_1' (în vecinătatea lui H_1 și H_2); el separă ζ_1' de ζ_2' și deci traversează M' într-un număr impar de puncte sau segmente (§ 63, teorema 6). (Π' nu poate intersecta fr Δ_1' decît în M'). Scoțînd din Π' punctele și segmentele de traversare ale lui M', rămîne un număr impar de linii poligonale, care trebuie să fie alternativ în $\overline{\Delta_1'}$ sau $\mathbf{C}\Delta_1'$ — absurd.

7. *Teorema reciprocă*: Dacă odomeniul D nu este simplu conex, fr D are cel puțin două părți disjuncte fr $D = \Phi_1 \cup \Phi_2$. Ele sînt liniar accesibile din D (§ 61, teorema 6), adică există niște drumuri poligonale L_1 și L_2, avînd cîte o extremitate în D și cealaltă în Φ_1 respectiv Φ_2 (anume, în vecinătăți disjuncte a două puncte din Φ_1, Φ_2); deci aceste din urmă extremități sînt în componente diferite ale fr D. Fie apoi L_0 un drum poligonal care unește în D, extremitățile din D ale drumurilor L_1 și L_2. Linia $L_1 \cup L_0 \cup L_2$ conține o linie poligonală simplă cu aceleași extremități. Aeasta va fi o transversală de specia II și astfel (teorema 5) ipoteza ar fi contrazisă.

Teorema 8. *Un domeniu D de conexiune k finită în C sau $\bar{C}$, este împărțit de o transversală L de specia* I *în două domenii: $D - L = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, ale căror ordine de conexiune verifică relația*

$$k_1 + k_2 = k + 1.$$

Dacă L are extremitățile în componenta F_1 a fr D_1, *avem*

$$\text{fr } D_1 = C_1 \cup L \cup \mathcal{F}_1, \quad \text{fr } D_2 = C_2 \cup L \cup \mathcal{F}_2$$

unde C_1, C_2 sînt continuuri și

$$C_1 \cup C_2 = F_1, \quad \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = \text{fr } D - F_1.$$

1. F_1 este frontiera unei componente Γ_1 a lui $\mathbf{C}D$ (teorema 3) și $\mathbf{C}\Gamma_1$ este un domeniu (§ 61, teorema 11); evident $\mathbf{C}\Gamma_1 \supset D$. Cum fr $\mathbf{C}\Gamma_1 =$ fr Γ_1 este un continuu, $\mathbf{C}\Gamma_1$ este simplu conex și după teorema 7, avem:

$\mathbf{C}\Gamma_1 - L = \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2$, $\mathfrak{D}_1$ și $\mathfrak{D}_2$ fiind domenii simplu conexe disjuncte;

$$\text{fr } \mathfrak{D}_1 = L \cup C_1, \quad \text{fr } \mathfrak{D}_2 = L \cup C_2 \quad \text{cu} \quad C_1 \cup C_2 = F_1.$$

Să punem

$$D_1 = D \cap \mathfrak{D}_1, \quad D_2 = D \cap \mathfrak{D}_2; \quad \text{avem}$$

$$D - L = (\mathbf{C}\Gamma_1 - L) \cap D = D_1 \cup D_2, \quad D_1 \cap D_2 = \varnothing.$$

Vom arăta că D_1, D_2 sînt componentele lui $D - L$. Aceste mulțimi fiind evident deschise și disjuncte, mai rămîne să dovedim că sînt conexe. Într-adevăr: Două puncte $z_1, z_2 \in D_1$ nu sînt separate de fr D, nici de fr $\mathfrak{D}_1$; și cum fr $D \cap$ fr $\mathfrak{D}_1 = C_1$ este un continuu (teorema 7), z_1, z_2 nu sînt separate nici de fr $D \cup$ fr $\mathfrak{D}_1$ (§ 64, lema 3, corolarul 1), și cu atît mai puțin de fr $D_1 =$ fr $(D \cap \mathfrak{D}_1) \subset$ fr $D \cup$ fr $\mathfrak{D}_1$ (39, § 54).

2. Aplicînd unele relații stabilite în § 54, (35 și 36), avem

$$\text{(9)} \qquad \text{fr } D_1 \subset \bar{D} \cap \text{fr } \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_1 \cap \text{fr } D = L \cup C_1 \cup \mathcal{F}_1,$$

$$\text{fr } D_1 \supset D \cap \text{fr } \mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_1 \cap \text{fr } D = L \cup \mathcal{F}_1,$$

unde $\mathcal{F}_1 = \mathfrak{D}_1 \cap \operatorname{fr} D$. Vom ameliora ultima inegalitate arătînd că $C_1 \subset \operatorname{fr} D_1$. Fie $z \in C_1$; deci $z \in F_1 = \operatorname{fr} \Gamma_1$ este disjunct de celelalte componente ale lui $\mathbf{C}D$ (presupuse în număr finit). O vecinătate U_z disjunctă de aceste componente conține puncte din $\mathfrak{D}_1$, adică din $\mathbf{C}\Gamma_1 - L$ și aceste puncte sînt și în $D = \mathbf{C}\Gamma_1 - \Gamma_2 - \ldots - \Gamma_k$. De aici urmează $z \in \operatorname{fr}(D \cap \mathfrak{D}_1) = \operatorname{fr} D_1$. Avem deci și inegalitatea contrară lui (8), deci

$$\operatorname{fr} D_1 = L \cup C_1 \cup \mathcal{F}_1, \quad \operatorname{fr} D_2 = L \cup C_2 \cup \mathcal{F}_2,$$

cu $\mathcal{F}_1 = \mathfrak{D}_1 \cap \operatorname{fr} D$, $\mathcal{F}_2 = \mathfrak{D}_2 \cap \operatorname{fr} D$. În sfîrșit avem

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 = (\mathfrak{D}_1 \cup \mathfrak{D}_2) \cap \operatorname{fr} D = (\mathbf{C}\Gamma_1 - L) \cap \operatorname{fr} D = \mathbf{C}\Gamma_1 \cap \operatorname{fr} D = \operatorname{fr} D - F_1.$$

Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

Teorema 9. *Pentru ca un domeniu D în C* sau *$\bar{C}$ să aibă ordinul de conexiune k (finit) este necesar și suficient să existe $k-1$ transversale (de specia* II*) $L_1, \ldots, L_{k-1}$ care nu-i distrug conexiunea ($D - L_1 - \ldots - L_{k-1} =$ = domeniu), dar nu k transversale.*

Condiția teoremei este necesară, după cum rezultă din teorema 5, corolarul ei și teorema 7. Suficiența condiției se va demonstra prin inducție cu privire la k. Cazul $k = 1$ este cunoscut (reciproca teoremei 7). În cazul general, fie L_1 una din cele $k-1$ transversale care nu distrug conexiunea lui D. Toate aceste transversale sînt de specia II (teorema 8). Fie F_1 și F_2 componentele fr D care conțin extremitățile lui L_1. Să considerăm domeniul $D - L_1$. Avem prin ipoteză $(D - L_1) - L_2 - \ldots - L_{k-1} =$ domeniu. Dacă de exemplu L_2 intersectează L_1, se vede ușor că un arc L_2' al lui L_2 este transversală în $D - L_1$; transversalele $L_2, \ldots, L_{k-1}$ conțin transversalele $L_2', \ldots, L_{k-1}'$ în $D - L_1$ distincte ($L_m = L_m'$ cînd L_m nu intersectează L_1) și este clar că $(D - L_1) - L_2' - \ldots - L_{k-1}' =$ domeniu (un punct ζ din această mulțime, care nu este în $D - L_1 - L_2 - \ldots - L_{k-1}$, are o vecinătate U_ζ în aceeași mulțime și care conține un z în a doua mulțime; deci ζ și z pot fi unite în prima mulțime). Pe de altă parte, nu pot exista în $D - L_1$, $k-1$ transversale $\mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$, care nu distrug conexiunea acestui domeniu. Într-adevăr, dacă o asemenea transversală $\mathcal{L}_m$ are ambele extremități în fr D, ea este și transversală în D (să se observe că $\operatorname{fr}(D - L_1) = \operatorname{fr} D \cup L_1$); dacă nu, $\mathcal{L}_m$ are o extremitate în L_1 (și cealaltă într-o componentă a fr D diferită de F_1 și F_2) și adăugînd la $\mathcal{L}_m$ un arc al lui L_1 obținem o transversală $\mathcal{L}_m'$ în D. Scriind și în primul caz $\mathcal{L}_m = \mathcal{L}_m'$, avem $D - L_1 - \mathcal{L}_2' - \ldots - \mathcal{L}_k' =$ $= (D - L) - \mathcal{L}_2 - \ldots - \mathcal{L}_k =$ domeniu, contrar, ipotezei.

Așa dar, în virtutea ipotezei de inducție, $D - L_1$ este un domeniu de conexiune $k-1$, adică fr $(D - L_1)$ are $k-1$ componente: $\operatorname{fr}(D - L_1) =$ $= \mathcal{F}_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_k$. Una din componente este desigur $\mathcal{F}_2 = F_1 \cup F_2 \cup L_1$ (continuu disjunct de restul frontierei lui $D - L_1$); astfel

$$\operatorname{fr}(D - L_1) = \operatorname{fr} D \cup L_1 = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k \cup L_1,$$

de unde

$$\operatorname{fr} D = F_1 \cup F_2 \cup \ldots \cup F_k;$$

$F_1, \ldots, F_k$ fiind continuuri disjuncte, teorema este demonstrată.

§ 67. Domenii limitate de curbe simple închise

Sînt importante pentru teoria funcțiilor domeniile de conexiune finită ale căror frontiere au drept componente curbe simple închise (în număr finit și disjuncte), care se vor numi *contururile* domeniilor. Le vom numi pe scurt *domenii* J_k.

Un domeniu J_1 (simplu conex (cu un contur)) este un *domeniu Jordan*.

Domeniile J_2 (cu două contururi (ordinul de conexiune 2)) se mai numesc *inele* și dacă sînt mărginite, *coroane*.

În cazul domeniilor Jordan, teorema 7, § 66 poate fi completată cu:

Teorema 1. *O transversală L împarte un domeniu Jordan D în două domenii Jordan, ale căror frontiere sînt $L \cup C_1$ și $L \cup C_2$, unde C_1 și C_2 sînt arcele simple determinate de extremitățile lui L în conturul lui D.*

Deoarece curba simplă închisă $L \cup C_1$ este disjunctă de domeniul $\mathbf{C}\bar{D}$, ea determină un domeniu $\mathfrak{D}_1 \subset D$ (disjunct de $\mathbf{C}\bar{D}$). Cum $\mathfrak{D}_1$ este disjunct de L, $\mathfrak{D}_1$ este conținut într-o componentă D_1 a lui $D - L$. Avem chiar $\mathfrak{D}_1 = D_1$, pentru că altfel D_1 ar intersecta fr $\mathfrak{D}_1 = L \cup C_1$. Așadar fr $D_1 = L \cup C_1$; și tot așa, pentru a doua componentă a lui $D - L$, avem fr $D_2 = L \cup C_2$.

Teorema 2. *Două curbe simple închise, disjuncte, determină trei domenii, dintre care un domeniu J_2 (inel) și două domenii J_1 (domenii Jordan).*

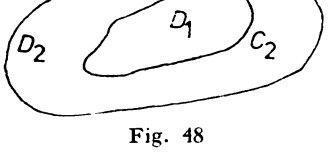

Fig. 48

Fie C_1 și C_2 cele două curbe (vezi fig. 48). C_2 se găsește într-un domeniu $\mathfrak{D}$, determinat de C_1 și $\mathfrak{D} - C_2$ are două componente, $\mathfrak{D} - C_2 = D_1 \cup D_2$ ale căror frontiere sînt: fr $D_1 = C_2$ și fr $D_2 = C_2 \cup$ fr $\mathfrak{D} \cap \mathbf{C}\bar{D}_1 = C_1 \cup C_2$ (§ 65, teoremele 3 și 5). În sfîrșit $\mathbf{C}\mathfrak{D} = D_3$ este al treilea domeniu.

Observație. În S putem avea cazurile: $C_2 \subset \operatorname{int} C_1$, (sau vice-versa): atunci inelul D_2 este mărginit; sau $C_1 \subset \operatorname{ext} C_2$, $C_2 \subset \operatorname{ext} C_1$ și atunci D_2 este nemărginit (vezi § 65, teorema 4).

Teorema 3. *k curbe simple închise, disjuncte, determină $k + 1$ domenii J_n, care au aceste curbe (sau o parte din ele) drept contururi. Cel puțin două sînt domenii Jordan (sau cel puțin două din curbe nu separă pe toate celelalte).*

Suma ordinelor de conexiune ale domeniilor este $2k$.

Teorema este cunoscută pentru $k = 1$. O demonstrăm prin inducție. Fie $C_1, \ldots, C_k$ curbele date. Curbele $C_1, \ldots, C_{k-1}$ determină k domenii $\mathfrak{D}_1, \ldots, \mathfrak{D}_k$, avînd frontierele formate din una sau mai multe dintre aceste curbe și ordine de conexiune care satisfac relația

$$\delta_1 + \ldots + \delta_k = 2(k - 1).$$

Curba C_k fiind disjunctă de celelalte aparține unuia din acele domenii; fie $C_k \subset \mathfrak{D}_k$. Avem $\mathfrak{D}_k - C_k = D_k \cup D_{k-1}$, unde fr $D_k = C_k \cup \Delta_k \cap$ fr $\mathfrak{D}_k$ și fr $D_{k+1} = C_k \cup \mathbf{C}\bar{\Delta}_k \cap$ fr $\mathfrak{D}_k$, Δ_k și $\mathbf{C}\bar{\Delta}_k$ fiind domeniile determinate de C_k. Cum fr $\mathfrak{D}_k$ este formată din curbe C_m ($m = 1, \ldots, k-1$) și aceste curbe sînt disjuncte de C_k, deci situate în Δ_k sau $\mathbf{C}\bar{\Delta}_k$, urmează că fr D_k este formată din curbe C_m. Mai mult, notînd cu d_k și d_{k+1} ordinele de conexiune ale lui D_k și D_{k+1}, avem

$$d_k + d_{k+1} = 2 + \delta_k.$$

Aşadar, punînd $\mathfrak{D}_m = D_m$ şi $\delta_m = d_m$, avem

$$\mathcal{S} - C_1 - \ldots - C_k = \mathfrak{D}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{D}_k - C_k$$
$$= D_1 \cup \ldots \cup D_k \cup D_{k+1} \ (\mathcal{S} = C \text{ sau } \bar{C}),$$

unde domeniile $D_1, \ldots, D_{k+1}$ au frontierele formate din curbe C_n $(n = 1, \ldots, k)$;

$$d_1 + \ldots + d_{k+1} = \delta_1 + \ldots + \delta_{k+1} + (\delta_k + 2)$$
$$= 2(k-1) + 2 = 2k.$$

În sfîrşit a doua parte a enunţului rezultă din această formulă: dacă toate domeniile afară de unul, ar avea conexiunea > 1, suma $d_1 + \ldots + d_{k+1}$ ar fi $\geqslant 2k + 1 > 2k$.

Teorema 4. *Un domeniu J_k (cu k contururi) este intersecţia a k domenii Jordan cu aceleaşi contururi.*

Avem (§ 66, teorema 3) $\mathbf{C}D = \cup\, \Gamma_n$, cu $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \varnothing$ pentru $i \neq j$, $D = \cap\, \mathbf{C}\Gamma_n$, unde fr $\mathbf{C}\Gamma_n = \text{fr}\ \Gamma_n = C_n$ $(n = 1, \ldots, k)$, C_n fiind contururile lui D; $C\Gamma_n$ fiind deschise şi avînd C_n ca frontiere sînt domenii Jordan.

Teorema 5. *În C un domeniu D cu k contururi mărginite poate fi:*

1° Mărginit şi atunci un contur C_1 conţine în interiorul lui pe celelalte, $C_2, \ldots, C_k$, care sînt mutual exterioare, şi $D = \text{int}\, C_1 \cap \text{ext}\, C_2 \cap \ldots \cap \text{ext}\, C_k$.

2° Nemărginit, în care caz contururile $C_1, \ldots, C_k$ sînt mutual exterioare şi $D = \text{ext}\, C_1 \cap \text{ext}\, C_2 \cap \ldots \cap \text{ext}\, C_k$.

Reciproc: Dacă curbele simple închise $C_1, \ldots, C_k$ sînt într-una din situaţiile 1° sau 2°, ele sînt contururile unui domeniu, respectiv mărginit sau nemărginit.

1° Vom păstra notaţiile de la teorema 4. Dacă D este mărginit, $\mathbf{C}D$ este nemărginit, deci o componentă Γ_1 este nemărginită. Urmează $\mathbf{C}\Gamma_1 = \text{int}\, C_1$. Apoi Γ_m $(m = 2, \ldots, k)$ fiind disjuncte de Γ_1, avem $\Gamma_m \subset \text{int}\, C_1$ şi prin urmare $C_m \subset \text{int}\, C_1$. Deci $\mathbf{C}\Gamma_m = \text{ext}\, C_m$ (§ 61, teorema 4) şi $D = \cap\, \mathbf{C}\Gamma_n = \text{int}\, C_1 \cap \text{ext}\, C_2 \cap \ldots \cap \text{ext}\, C_k$. Cum $\Gamma_m = \overline{\text{int}\, C_m}$ şi aceste mulţimi sînt disjuncte cîte două, interioarele a două C_m sînt disjuncte şi deci două C_m sînt exterioare (§ 65, teorema 4).

2° Dacă D este nemărginit, $\mathbf{C}D$ şi totodată toate Γ_n sînt mărginite, deci $\mathbf{C}\Gamma_n = \text{ext}\, C_n$ şi $D = \cap\, \mathbf{C}\Gamma_n = \text{ext}\, C_1 \cap \text{ext}\, C_2 \cap \ldots \cap \text{ext}\, C_k$. Contururile C_n sînt exterioare cîte două pentru acelaşi motiv ca mai sus.

Reciproca: Fie în primul rînd $C_m \subset \text{int}\, C_1$ $(m = 2, \ldots, k)$ şi C_m mutual exterioare. Atunci $\text{int}\, C_m \subset \text{int}\, C_1$ şi aceste mulţimi sînt disjuncte (§ 65, teorema 4). Rezultă că $\text{int}\, C_m$ şi $\text{ext}\, C_1$ sînt k domenii determinate de curbele date, toate de conexiune 1. După teorema 3, aceste curbe determină încă un domeniu de conexiune $2k - k = k$, aceea ce înseamnă că acest domeniu are drept contururi toate curbele date.

Acelaşi raţionament se aplică şi în cazul cînd curbele C_n sînt în situaţia 2° (mutual exterioare).

§ 68. Invarianţa topologică a mulţimilor deschise (în C sau $\bar{C}$)

Se ştie că un homeomorfism între un plan $\mathcal{S}$ euclidian sau Gauss şi un plan $\mathcal{T}$ de acelaşi fel (care poate coincide cu $\mathcal{S}$) duce o mulţime deschisă $A \subset \mathcal{S}$ într-o mulţime de asemenea deschisă $B \subset \mathcal{T}$ (§ 57, teorema 1). Aici vom stabili invarianţa noţiunii de mulţime deschisă în condiţii mai generale: Dacă A este deschisă, un homeomorfism oarecare (care nu este în mod

necesar subordonat unui homeomorfism între plane) o transformă într-o mulțime deschisă.

Să amintim că o proprietate analoagă de invarianță are loc pentru mulțimile închise în $\bar{C}$ (§ 57, teorema 3, cazuri particulare).

În acest scop vom stabili întîi următorul rezultat particular:

Lema 1. *Fie M un dreptunghi deschis în C sau $\bar{C}$ și $\overline{N} = f(\overline{M})$ o imagine topologică a dreptunghiului închis $\overline{M}$, în același plan sau un plan de același fel. Atunci $N = f(M)$ este un domeniu Jordan și $f(\mathrm{fr}\ M)$ este frontiera acestui domeniu:* $\mathrm{fr}\ N = \mathrm{f}(\mathrm{fr}\ M)$.

1. Știm că $\overline{N}$ și N sînt conexe. Vom arăta că $\mathbf{C}\overline{N}$ este $\neq \varnothing$ și conexă. Să observăm că $C_0 = f(\mathrm{fr}\ M)$ este o curbă închisă, formată din patru arce simple (imagini topologice ale laturilor lui M) și deci o curbă simplă închisă. Cum N este conex, $\overline{N} = N \cup C_0$ nu poate ocupa tot planul (pentru că atunci N ar avea două componente). Deci $\mathbf{C}\overline{N} \neq \varnothing$.

2. Fie $z_1, z_2 \in \mathbf{C}\overline{N}$. Pentru a dovedi că $\mathbf{C}\overline{N}$ este conexă, vom arăta că presupunerea z_1, z_2 sînt separate de $\overline{N}$ (mulțime închisă, după cum am amintit mai sus) duce la absurd. Să împărțim dreptunghiul $\overline{M}$ în două dreptunghiuri egale, $\overline{M}_1$ și $\overline{M}'_1$, avînd în comun segmentul I_1, (vezi (fig. 49). În ipoteza adoptată, cel puțin una din mulțimile (închise) $\overline{N}_1 = f(\overline{M}_1)$, $\overline{N}'_1 = f(\overline{M}'_1)$ trebuie să separe z_1 de z_2. În caz contrar, cum $\overline{N}_1 \cap \overline{N}'_1 = f(I_1)$ este un continuu, ar urma că nici $\overline{N} = \overline{N}_1 \cup \overline{N}'_1$ nu separă z_1 de z_2 (§ 64, lema 3, corolarul 1). Prin împărțiri succesive, cu segmente $I_1, I_2, \ldots$ alternativ perpendiculare, vom putea deci construi un șir de dreptunghiuri $\overline{M} \supset \overline{M}_1 \supset M_2 \supset \ldots$ (ale căror diametre $\to 0$) și astfel că z_1, z_2 sînt separate de mulțimile corespunzătoare prin homeomorfismul f, $\overline{N} \supset \overline{N}_1 \supset \overline{N}_2 \supset \ldots$ Cum mulțimile $\overline{M}_0$ au un singur punct comun, $\alpha \in \overline{M}$, mulțimile $\overline{N}_q$ au un singur punct comun, $\beta \subset \overline{N}$. Ori, dacă o vecinătate U_β lasă afară punctele z_1, z_2, mulțimile $\overline{N}_q$ care pentru q destul de mare sînt $\subset U_\beta$ (din cauza continuității reprezentării f) nu pot separa z_1 de z_2. Această contradicție dovedește afirmația (cf. demonstrației teoremei 1, § 65).

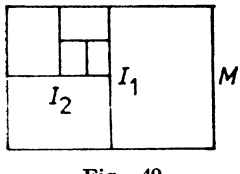

Fig. 49

3. Fie D_1 și D_2 cele două domenii determinate de C_0. Deoarece N este conexă și disjunctă de C_0, avem de exemulu $N \subset D_1$ și pentru același motiv $\mathbf{C}\overline{N} \subset D_2$, pentru că $\mathbf{C}\overline{N}$ conține ∞. Însă $\overline{N} \cup \mathbf{C}\overline{N} = N \cup C \cup \mathbf{C}\overline{N} = D_1 \cup C \cup D_2$, de unde $N \cup \mathbf{C}\overline{N} = D_1 \cup D_2$. Deci $N = D_1$, $\mathbf{C}\overline{N} = D_2$ și prin urmare $\mathrm{fr}\ N = C_0 = f(\mathrm{fr}\ M)$.

Putem acum demonstra:

Teorema 1. (*Brouwer*). *Dacă între mulțimile A și B din plane C sau $\bar{C}$ există un homeomorfism f, atunci acesta duce* $\mathrm{int}\ A$ *în* $\mathrm{int}\ B$.

Într-adevăr, fie $z \in \mathrm{int}\ A$ și $w = f(z)$. Aplicînd la nevoie un homeomorfism planului $\mathcal{S}$, putem presupune $z \neq \infty$. La un dreptunghi M așa fel încît $z \in M \subset A$ corespunde conform lemei precedente, un domeniu Jordan N astfel că $w \in N \subset B$. Deci există o vecinătate $V_w \subset N \subset B$, deci $w \in \mathrm{int}\ B$.

Corolarul 1. *Dacă $B = f(A)$ este o imagine topologică a mulțimii A într-un plan C sau $\bar{C}$, și dacă A este deschisă, și B este deschisă.*

Corolarul 2. *O imagine topologică a unui domeniu, în C sau $\bar{C}$, este tot un domeniu* (§ 60, teorema 3).

Corolarul 3. *Dacă $B = f(A)$ este o imagine topologică a mulțimii compacte A, în C sau $\bar{C}$ (A este închisă în $\bar{C}$, închisă și mărginită în C), atunci* $\operatorname{fr} B = f(\operatorname{fr} A)$.

B fiind compactă (§ 57, teorema 2), este închisă și prin urmare $\operatorname{fr} B = B - \operatorname{int}_f B = f(A) - f(\operatorname{int} A) = f(A - \operatorname{int} A) = f(\operatorname{fr} A)$.

Corolarul 4. *O imagine topologică a închiderii $\bar{J}_k$ în $\bar{C}$ a unui domeniu J_k, este tot o astfel de mulțime și contururile acestor domenii se corespund.*

Rezultă din corolarul 3 și din faptul că imaginea topologică a unei curbe simple închise este tot o astfel de curbă.

Corolarul 5. *Planul $\bar{C}$ nu poate fi homeomorf cu o submulțime a sa, diferită de el însuși.*

Într-adevăr dacă mulțimea A este homeomorfă cu $\bar{C}$, ea este deschisă (corolarul 1) și compactă (§ 57, teorema 2), deci închisă. Cum $\bar{C}$ este conex (§ 60, teorema 10, corolarul 5), trebuie să avem $A = \bar{C}$ (§ 60, teorema 1).

Observația 1. Din contra planul C poate fi reprezentat homeomorf pe o submulțime mărginită.

Observația 2. În legătură cu corolarul 4, nu se poate afirma că imaginile topologice ale unui domeniu J_k sînt domenii de aceeași natură.

Deocamdată vom demonstra următoarea completare a corolarului 2:

Teorema 2. *O imagine topologică a unui domeniu în $\bar{C}$ este un domeniu cu același ordin de conexiune.*

Fie: E homeomorf cu domeniul D, $E = f(D)$; F o componentă a $\operatorname{fr} D$ și punctul $\alpha \in F$. U_α fiind un disc de centru α, $M = D \cap U_\alpha$ este deschisă și tot așa $N = f(M)$ (corolarul 1). Dar $\bar{N}$ nu poate fi $\subset E$, pentru că atunci am avea $f^{-1}(\bar{N}) = \bar{M} \subset D$ (corolarul 3); or, $\alpha \subset \bar{M}$ nu este în D. Deci N are puncte frontieră care nu sînt în E și deci sînt în $\operatorname{fr} E$.

Fie acum $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ puncte din componente distincte (și în număr finit) ale $\operatorname{fr} D$. Dacă luăm cercurile $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_h}$ destul de mici, mulțimile corespunzătoare $N_1, \ldots, N_h$ vor avea puncte frontieră în h componente distincte ale $\operatorname{fr} E$. Într-adevăr: Două oarecare dintre componentele considerate $F_1, \ldots, F_h$, ale $\operatorname{fr} D$, pot fi separate prin poligoane (P) în număr finit $(=(h/2))$, disjuncte de $\operatorname{fr} D$ (§ 64, lema 2) și se vede imediat că aceste poligoane sînt în D (fiindcă separă puncte din D fără a intersecta $\operatorname{fr} D$). Vom lua $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_h}$ disjuncte de aceste poligoane. Atunci, dacă de exemplu P separă F_1 de F_2, $\Pi = f(P)$ este o curbă simplă închisă, care separă N_1 de N_2. Astfel în caz contrar, ar exista un drum în E unind puncte din N_1 și N_2 fără a intersecta Π și la acest drum ar corespunde în D un continuu unind puncte din M_1 și M_2 fără a intersecta P. $\bar{N}_1$ și $\bar{N}_2$ au puncte în $\operatorname{fr} E$, care sînt separate de Π (căci nu sînt pe Π): aceste puncte aparțin la componente distincte ale $\operatorname{fr} E$. Urmează că $\operatorname{fr} E$ are cel puțin h componente.

Dacă D și E au ordinele de conexiune k și k', avem așadar $k' \geqslant k$ și tot așa $k \geqslant k'$. deci $k = k'$. Aceasta este adevărat și atunci cînd de exemplu $k = \infty$; în acest caz h poate fi oricît de mare și deci $k' = \infty$.

§ 69. Mulţimi convexe

Reamintim:

Definiţie: *Se numeşte mulţime convexă în C (sau într-un spaţiu euclidian) o mulţime care odată cu două puncte oarecare ale ei conţine şi segmentul ce le uneşte.*

Mulţimile convexe sînt deci conexe.

De aici urmează (§ 60, teorema 10).

Teorema 1. *Mulţimile convexe ale unei drepte (mulţimi convexe liniare) sînt: punctele, segmentele, semidreptele şi dreapta însăşi.*

Lema 1. *Dacă o mulţime convexă A conţine trei puncte necoliniare α, β, γ, el conţine şi domeniul triunghiular (α, β, γ) determinat de aceste puncte.*

Căci conţine segmentul (β, γ) şi toate segmentele (α, z) unde $z \in (\beta, \gamma)$.

Corolar. *Mulţimile convexe neliniare au puncte interioare.*

Lema 2. *Fie A o mulţime convexă; α, α' puncte interioare; ζ, ζ' puncte frontieră. Atunci:* $[\alpha, \alpha'] \subset \operatorname{int} A$, $[\alpha, \zeta) \subset \operatorname{int} A$, $[\zeta, \zeta'] \subset \bar{A}$.

1. Există într-o vecinătate $U_\alpha \subset A$, un segment $[\beta, \gamma] \subset A$, conţinînd α în interior şi situat pe o dreaptă $\neq \alpha\alpha'$. După lema 1, $(\alpha, \alpha') \subset (\alpha', \beta, \gamma) \subset \operatorname{int} A$ (vezi fig. 50).

2. Demonstrăm întîi $(\alpha, \zeta) \subset A$. Luăm ca mai sus $[\beta, \delta] \subset \operatorname{int} A$, conţinînd α în interior şi pe o dreaptă diferită de $\alpha\zeta$. Fie un punct $z \in (\alpha, \zeta)$; unghiul opus la vîrf unghiului $\widehat{\beta z \gamma}$ conţine ζ şi deci puncte $z' \in A$. (Vezi fig. 51.) Dreapta zz' taie (β, γ) într-un punct $z'' \in A$, deci $[z', z''] \subset A$, deci $z \in A$. Aşadar $(\alpha, \zeta) \subset A$. Dacă acum z'' este un punct oarecare din (β, γ), $z'' \in \operatorname{int} A$ după 1 şi $(\zeta, z'') \subset A$ deci $(\zeta, \beta, \gamma) \subset \operatorname{int} A$. Rezultă $[\alpha, \zeta) \subset \operatorname{int} A$.

3. După 2, $(\alpha, \zeta) \subset A$ şi $(\alpha, \zeta') \subset A$. O paralelă la $[\zeta, \zeta']$, secantă a domeniului (α, ζ, ζ'), intersectează (α, ζ) şi (α, ζ') în punctele $z, z' \in A$ deci $(z, z') \subset A$ şi $(\alpha, \zeta, \zeta') \subset A$, deci $[\alpha, \zeta, \zeta'] \subset \bar{A}$ şi $[\zeta, \zeta'] \subset \bar{A}$ (vezi fig 52).

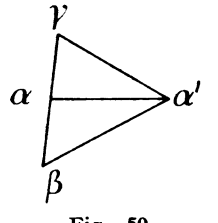

Fig. 50

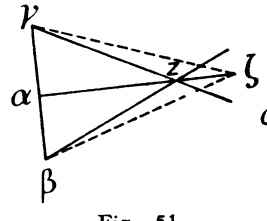

Fig. 51

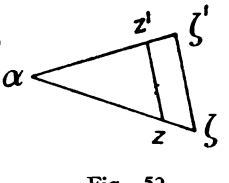

Fig. 52

Teorema 2. *Dacă $A \subset C$ este o mulţime convexă,* $\operatorname{int} A = D$ *este un domeniu convex,* $\operatorname{fr} D = \operatorname{fr} A$ *şi* $\bar{A} = \bar{D}$ *e convexă* unde dacă A este liniară, $\operatorname{int} A$ se ia în raport cu topologia dreptei considerată ca subspaţiu al lui C.

Teorema este evidentă cînd A este o mulţime convexă liniară (teorema 1). Putem deci presupune $\operatorname{int} A \neq \emptyset$. Atunci, după lema 2, 1, $\operatorname{int} A$ este convex şi fiind conex, este un domeniu.

După aceeaşi lemă, 2, un punct $\zeta \in \operatorname{fr} A$ este punct limită al lui $D = \operatorname{int} A$, deci $\zeta \in \operatorname{fr} D$; invers, dacă $\zeta \in \operatorname{fr} D$, o vecinătate U_ζ conţine puncte din A şi din $\complement A$ (altfel $\zeta \in D$) deci $\zeta \in \operatorname{fr} A$. Aşa dar $\operatorname{fr} A = \operatorname{fr} D$.

În sfîrşit $\bar{A} = \operatorname{int} A \cup \operatorname{fr} A = D \cup \operatorname{fr} D = \bar{D}$ este convex conform lemei 2 (1.2.3).

Corolar. *O mulţime deschisă convexă este un domeniu convex.* O mulţime închisă convexă neliniară este închiderea unui domeniu convex.

Observație. Teorema arată că o mulțime convexă neliniară este un domeniu convex plus eventual puncte frontieră ale lui. Este suficient să ne ocupăm numai de domenii convexe.

Teorema 3. *Un domeniu convex D este intersectat de o dreaptă secantă L într-o mulțime convexă liniară, $I = D \cap L$ (segment, semidreaptă sau dreaptă), ale cărei extremități constituie intersecția dreptei L cu* fr D.

Prima afirmație este evidentă. Prin ipoteză L conține un punct (interior) $\alpha \in D$. Dacă ζ este o extremitate a intersecției I, orice U_ζ conține puncte din D și $\complement D$ (pe L), deci $\zeta \in$ fr D. Invers, fie $\zeta \in L \cap$ fr D. Atunci $[\alpha, \zeta) \subset D$ (lema 2, punctul 2.) deci $[\alpha, \zeta) \subset I$; și cum $\zeta \notin I$ (fiindcă $\zeta \notin D$), ζ este o extremitate a lui I.

Corolar. *Un domeniu convex mărginit D este intersectat de o secantă într-un segment deschis, iar* fr D *este intersectată de secantă în extremitățile segmentului, deci în două puncte distincte. O semidreaptă cu originea în D taie deci* fr D *într-un punct și numai unul.*

Teorema 4. *Un domeniu convex care conține o dreaptă este planul C, sau un semiplan deschis, sau o bandă deschisă.*

Fie domeniul convex D și dreapta $L_0 \subset D$. Să observăm că, dacă D conține un punct z, conține și paralela L prin z la L_0 (vezi fig. 53). Să luăm (într-o vecinătate $U_z \subset D$) un punct z_1 în semiplanul determinat de L, care exclude L_0; z' fiind oarecare pe L_0, segmentul $[z_1, z'] \subset D$ și cum prin orice punct din L trece un asemenea segment, $L \subset D$; de aici urmează ușor teorema.

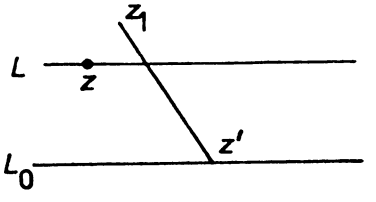

Fig. 53

Definiție. *Se numesc drepte de sprijin ale unei mulțimi convexe A, dreptele care intersectează* fr A *dar nu* int A.

Teorema 5. *Frontiera unei mulțimi convexe este intersectată de o dreaptă de sprijin într-o mulțime convexă liniară.*

Căci dacă A este convexă și $\mathcal{L}$ o dreaptă de sprijin, $\mathcal{L} \cap$ fr $A = \mathcal{L} \cap \bar{A}$ (teorema 2); ori $\bar{A}$ fiind convexă (teorema 2), $\mathcal{L} \cap \bar{A}$ este evident convexă.

Corolar. *O dreaptă poate intersecta frontiera unui domeniu convex mărginit într-un punct sau un segment închis, și atunci este o dreaptă de sprijin, ori în două puncte, și atunci este o secantă a domeniului.*

Teorema 6. *Printr-un punct frontieră al unui domeniu convex $D \subset C$ trece cel puțin o dreaptă de sprijin; dacă trec mai multe, ele formează două unghiuri închise opuse la vîrf (unde prin unghi închis se înțelege închiderea domeniului delimitat de un unghi ascuțit).*

Fie $\zeta \in$ fr D și Γ o circumferință de centru $\zeta \cdot \lambda$ fiind un punct pe Γ, să notăm cu Λ semidreapta de origine ζ prin λ. Fie M mulțimea punctelor λ pentru care Λ intersectează D. Evident $M \neq \varnothing$ și de asemenea $\complement M = \Gamma - M \neq \varnothing$, pentru că două puncte diametral opuse, λ și λ', nu pot fi amîndouă în M (altfel $\lambda\lambda'$ ar conține puncte din D de ambele părți ale lui ζ și ar urma $\zeta \in D$). M este deschisă în Γ și deci $\complement M$ închisă. Deoarece dacă $\lambda \in M$, Λ conține un punct $z \in D$ și semidreptele care proiectează din ζ o vecinătate $U_z \subset D$ intersectează Γ într-un arc care conține λ și este în M.

În plus M este conexă. Dacă $\lambda_1, \lambda_2 \in M$, semidreptele corespunzătcare Λ_1, Λ_2 conţin puncte $z_1, z_2 \in D$ şi segmentul $[z_1, z_2] \subset D$ este proiectat din ζ în arcul $\overset{\frown}{[z_1, z_2]} \subset M$. Urmează că M este un arc deschis în Γ (fără extremităţi) şi deci $\mathbf{C}M$ un arc închis. Lungimea arcului $\mathbf{C}M$ este $\geqslant \pi R$ (altfel M ar conţine puncte diametral opuse). Cînd aceasta este $= \pi R$, diametrul care conţine extremităţile lui este o dreaptă de sprijin. În caz contrar diametrii extremităţilor determină două unghiuri formate din drepte care nu intersectează M, şi care sînt drepte de sprijin (unghiuri suplimentare cu unghiul format de dreptele care proiectează M din ζ).

Definiţie. *Cînd printr-un punct frontieră al unui domeniu convex trec mai multe drepte de sprijin, acel punct se numeşte un vîrf al frontierei. Dreapta de sprijin unică sau laturile unghiului de drepte de sprijin care trec printr-un punct al frontierei se numesc tangenta, respectiv tangentele frontierei în acel punct.*

Teorema 7. *Un domeniu convex este situat de aceeaşi parte a unei drepte de sprijin a lui.*

Evident.

Teorema 8. *Domeniile convexe mărginite sînt domenii Jordan.*

Fie D un domeniu convex mărginit şi să arătăm că fr D este o curbă simplă închisă. Luăm un cerc $\Omega \subset D$ cu centrul ω şi stabilim între Ω şi fr D o corespondenţă f, atribuind unui punct $\lambda \in \Omega$ punctul ζ unde fr D este intersectată de semidreapta Λ de origină ω prin λ (teorema 3, corolar). Corespondenţa f este evident biunivocă şi afirmaţia va fi dovedită dacă arătăm că f este continuă în sensul $\lambda \to \zeta$ (§ 57, teorema 3, cazuri particulare). Fie U_ζ un cerc disjunct de Ω şi $\mathcal{L}$ o dreaptă de sprijin prin ζ; fie încă z un punct în U_ζ şi (ω, ζ), deci în D (lema 2, 2) (vezi fig. 54). Se vede uşor că există un segment I paralel cu $\mathcal{L}$ şi avînd în interiorul lui punctul z, conţinut în D şi U_ζ, şi proiectat din ω pe $\mathcal{L}$ într-un segment de asemenea conţinut în U_ζ. (I este comun la următoarele trei segmente, care conţin pe z

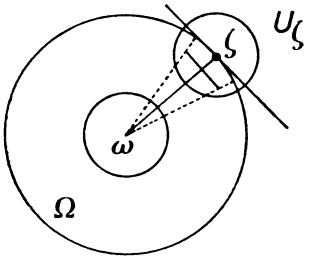

Fig. 54

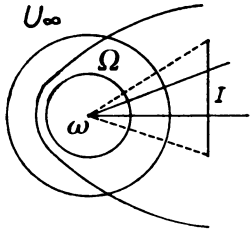

Fig. 55

în interiorul lor: intersecţia lui D cu paralela L la $\mathcal{L}$ prin z, intersecţia $L \subset U_\zeta$ şi proiecţia din ω pe L a diametrului $\mathcal{L} \cap U_\zeta$.) Semidreptele care proiectează I din ω intersectează fr D în U_ζ (în puncte situate în semiplanul determinat de $\mathcal{L}$ care conţine ω şi semiplanul determinat de L care exclude ω, deci în puncte situate între I şi $\mathcal{L}$), aceleaşi semidrepte intersectează Ω în punctele unui arc într-o vecinătate a lui Ω. La această vecinătate f face să corespundă o mulţime $\subset U_\zeta$, ceea ce înseamnă că f este continuă.

Observaţie. În cazul domeniilor convexe nemărginite diferite de C, se raţionează ca mai sus, iar în cazul $\zeta = \infty \in$ fr D, se consideră fig. 55.

Altă demonstrație se întemeiază pe § 62, teorema 7. Fie ζ_1, ζ_2 două puncte oarecare în fr D și L dreapta $\zeta_1\zeta_2$. (Unul din aceste puncte poate fi ∞ cînd D este nemărginit.) Dacă L este o secantă, putem scrie

$$\text{fr } D - \zeta_1 - \zeta_2 = F_1 \cup F_2, \quad F_1 \cap F_2 = \varnothing,$$

unde F_1 și F_2 sînt intersecțiile fr D cu semiplanele deschise determinate de L. Aceasta este o partiție: $F_1 \neq \varnothing$ și $F_2 \neq \varnothing$ pentru că au puncte într-o vecinătate $U_z \subset D$, cu centrul în segmentul $(\zeta_1, \zeta_2) \subset D$ (lema 2,1); apoi F_1 și F_2 sînt deschise în fr $D - \zeta_1 - \zeta_2$ (ca intersecții cu cele două semiplane deschise, § 54, 27). Dacă L este o dreaptă de sprijin, $[\zeta_1, \zeta_2] \subset$ fr D (teorema 5) și avem de asemenea o partiție dacă punem $F_1 = (\zeta_1, \zeta_2)$ și $F_2 = C[\zeta_1, \zeta_2] \cap$ fr D. În adevăr, $F_2 \neq \varnothing$ pentru că segmentul $[\zeta_1, \zeta_2]$ nu poate fi frontieră unui domeniu convex (evident domeniul pe care îl determină nu este convex) și F_2 este deschis în fr $D - \zeta_1 - \zeta_2$ (tot § 54, 27). Tot așa este și F_1: să luăm un punct $\alpha \in D$. Domeniul triunghiular $(\alpha, \zeta_1, \zeta_2) \subset D$, fiindcă este $\subset \bar{D}$ (lema 1) și cum F_2 este disjunct de semiplanul determinat de L care nu conține $(\alpha, \zeta_1, \zeta_2)$ (teorema 7) urmează $\bar{F}_2$ disjunct de (ζ_1, ζ_2). Putem deci scrie $F_1 = \mathbf{C}\bar{F}_2 \cap$ (fr $F - \zeta_1 - \zeta_2$), de unde afirmația.

Pe de altă parte, fr D este un continuu (adică D este simplu conex): întradevăr, dacă un poligon simplu este $\subset D$, interiorul său este $\subset D$, pentru că se poate descompune în domenii triunghiulare și laturi ale acestora, care sînt în D (§ 63, teorema 5 și lema 1 de mai sus); se aplică deci § 66, teorema 6. În rezumat, fr D în $\bar{C}$ este un continuu (compact) și conexiunea ei este distrusă prin scoaterea a două puncte oarecare; putem deci conchide că fr D este o curbă simplă închisă (§ 62, teorema 7).

Definiție. *Se numește ovală frontiera unui domeniu convex mărginit.*

Teorema 9. *O ovală este caracterizată (ca mulțime de puncte în C) prin următoarele proprietăți:*

1° *Este o curbă simplă închisă și mărginită.*

2° *Dacă o dreaptă o intersectează în mai mult de două puncte, o intersectează într-un segment.*

Că o ovală posedă proprietățile 1° și 2° rezultă din definiție, teorema 8 și teorema 5.

Reciproc, fie C_0 o mulțime de puncte care verifică condițiile 1° și 2°. În virtutea celei dintîi, C_0, determină un domeniu D mărginit (interior), a cărui frontieră este. Rămîne să arătăm că D este convex. Fie z_1, $z_2 \in D$. Deoarece semidreptele de origini z_1, z_2 de pe dreapta z_1z_2 conțin puncte din $\mathbf{C}D$, ele conțin și puncte ζ_1, $\zeta_2 \in$ fr D (§ 60, teorema 8); aceste puncte sînt exterioare segmentului (z_1, z_2).

Dacă segmentul (z_1, z_2) ar conține un punct din $\mathbf{C}D$, el ar conține, pentru același motiv, și puncte din fr D (diferite de ζ_1, ζ_2 care sînt exterioare); deci după 2° dreapta z_1z_2 ar intersecta fr D într-un segment care, conținînd ζ_1 și ζ_2, ar conține z_1 și z_2 — absurd. Deci $[z_1\, z_2] \subset D$.

Teorema 10. *Dacă două ovale C_0, C_1 se corespund printr-un homeomorfism, $C_1 = \varphi(C_0)$, există un homeomorfism ψ al planelor C, C' al celor două curbe, care induce homeomorfismul φ și face să corespundă domeniile interioare curbelor. Se poate impune homeomorfismului ψ și condiția de a face să se corespundă două puncte date în aceste domenii.*

Fie: ω, ω_1 punctele date în $D = \text{int } C_0$ și $D_1 = \text{int } C_1$; z un punct oarecare în C (vezi fig. 56). Definim o corespondență $C' = \psi(C)$ în felul următor: Fie Λ, Λ_1 semidreptele de origini ω, ω_1 prin z, z_1 respectiv și $\zeta = \Lambda \cap C_0$, $\zeta_1 = \Lambda_1 \cap C_1$. Vom pune $z_1 = \psi(z)$ dacă:

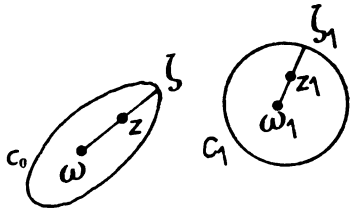

Fig. 56

$$(10) \qquad \zeta_1 = \varphi(\zeta) \text{ și } \frac{\overline{\omega_1 z_1}}{\overline{\omega_1 \zeta_1}} = \frac{\overline{\omega z}}{\overline{\omega \zeta}}.$$

Corespondența ψ astfel definită induce $C_1 = \varphi(C_0)$, $\omega_1 = \psi(\omega)$ și $D_1 = \psi(D)$. Ea este evident biunivocă și rămîne să arătăm că este continuă de exemplu în sensul $C \to C'$.

Luînd ω și ω_1 ca origini ale unor sisteme de coordonate polare în C și C', avem ca ecuații ale curbelor C_0, C_1:

$$\rho = \rho(\theta), \quad \rho_1 = \rho_1(\theta_1)$$

unde $\rho(\theta)$ și $\rho_1(\theta_1)$ sînt funcții continue și $\neq 0$ în $[0, 2\pi)$.

Coordonatele punctelor z, z_1 fiind (r, θ), (r_1, θ_1), avem din (10):

$$\theta_1 = \varphi(\theta), \quad \frac{r_1}{\rho_1} = \frac{r}{\rho},$$

unde $\varphi(\theta)$ este continuă în $[0, 2\pi)$. Ecuațiile corespondenței ψ sînt așadar

$$\theta_1 = \varphi(\theta), \quad r_1 = r\frac{\rho_1(\varphi(\theta))}{\rho(\theta)}$$

și funcțiile din membrul al doilea sînt continue în C.

Corolar. *Un domeniu convex se poate reprezenta homeomorf pe un disc.*

§ 70. Accesibilitate

Definiție. *Un punct ζ al frontierei unui domeniu D se zice accesibil din D, dacă există o tăietură (curbă simplă) $L \subset D$, cu o extremitate în ζ.*

Am definit deja accesibilitatea liniară (L linie poligonală) și am arătat că punctele liniar accesibile sînt dense în fr D, oricare ar fi domeniul D (§ 61, teorema 6).

Există domenii a căror frontieră nu este accesibilă în orice punct (vezi exemplele 6 și 7). Vom vedea însă că frontiera unui domeniu Jordan este accesibilă peste tot, în sensul larg definit mai sus (dar nu liniar accesibil în orice punct al său) (vezi exemplul 9)).

Lema 1. *Fiind dat un domeniu Jordan D, determinat de curba C_0 (în C sau $\bar{C}$) și ζ fiind un punct al curbei C_0, la orice U_ζ corespunde o vecinătate V_ζ astfel că două puncte oarecare din $D \cap V_\zeta$ să poată fi unite (printr-o linie poligonală) în $D \cap U_\zeta$.*

U_ζ conține un arc $C_1 \subset C_0$ și trecînd prin ζ. Cum $\overline{C_0 - C_1}$ este închis și disjunct de ζ, există o vecinătate V_ζ disjunctă de $\overline{C_0 - C_1}$. Două puncte $z_1, z_2 \in D \cap V_\zeta$ nu sînt separate de C_0 și de asemenea nici de $\Gamma \cup \overline{C_0 - C_1}$, Γ fiind circumferința lui U_ζ: căci un drum $\overset{\frown}{z_1 z_2} \subset V_\zeta$ este disjunct de Γ și de $\overline{C_0 - C_1}$. Apoi intersecția $C_0 \cap (\Gamma \cup \overline{C_0 - C_1}) = C_0 \cap \Gamma \cup \overline{C_0 - C_1} = \overline{C_0 - C_1}$ este un continuu (s-a observat că $C_0 \cap \Gamma \subset \overline{C_0 - C_1}$). Urmează (§ 64, lema 3, corolarul 1) că $C_0 \cup (\Gamma \cup \overline{C_0 - C_1}) = C_0 \cup \Gamma$ nu separă z_1, z_2. Ceea ce înseamnă că z_1 și z_2 pot fi unite printr-o linie poligonală într-un domeniu determinat de $C_0 \cup \Gamma$, deci în $D \cap U_\zeta$.

Lema 2. *D fiind domeniul determinat de un arc simplu C_0, extremitățile acestui arc au proprietatea din lema 1 față de D.*

Demonstrația este aceeași ca în lema 1, cu diferența că arcul C_1, are extremitatea ζ comună cu C_0.

Observație. Această lemă nu este adevărată pentru un punct al arcului diferit de extremități: Dacă U_ζ este destul de mic, circumferința lui U_ζ intersectează ambele arce determinate de ζ în C_0; considerînd primele intersecții ale acestor arce cu circumferința lui U_ζ obținem o transversală (în U_ζ) care împarte U_ζ în două domenii, în a căror frontieră intră transversala; deci C_0 distruge conexiunea lui $D \cap U_\zeta$ și orice V_ζ conține puncte din D în cele două domenii precedente; un drum care unește în U_ζ asemenea puncte va trebui deci să intersecteze C_0.

Se poate de altfel vedea că demonstrația de mai sus nu subsistă în acest caz.

Se zice că un punct din frontiera unui domeniu, care nu posedă proprietatea descrisă în lema 1, este *barat* (pentru acel domeniu). Astfel punctele unui arc simplu diferite de extremități, sînt barate (pentru domeniul determinat de arc) (vezi exemplele 6 și 7).

Teorema 1. *Frontiera unui domeniu Jordan este accesibilă din acel domeniu în orice punct al ei (Schönfliess).*

Fie ζ un punct din fr D (D domeniu Jordan). Să considerăm o vecinătate circulară U_ζ și vecinătatea V_ζ care îi corespunde în lema 1 (vezi fig. 57). Să luăm un arc (ξ, η) al curbei $C = \text{fr } D$ astfel ca $\zeta \in (\xi, \eta) \cap V_\zeta$. Arcele (ξ, ζ) și (η, ζ) determinate de ζ în precedentul conțin puncte liniar accesibile, λ și μ (§ 61, teorema 6). Există deci în $V_\zeta \cap D$ niște segmente cu extremități λ, μ și celelalte extremități pot fi unite în $U_\zeta \cap D$ printr-o linie poligonală. Astfel avem o linie poligonală $\mathcal{L} \subset D \cap U_\zeta$, cu extremitățile λ, μ și care se poate presupune simplă. Aceasta fiind o transversală în D determină un domeniu $\mathfrak{D} \subset D$, care este un domeniu Jordan și are frontiera $\mathcal{L} \cup \overset{\frown}{[\lambda, \mu]}$, $\overset{\frown}{[\lambda, \mu]}$ fiind arcul curbei C care conține ζ și deci este conținut în U_ζ. Cum fr $\mathfrak{D} \subset U_\zeta$ și $\mathfrak{D}$ nu poate conține circumferința lui U_ζ, avem $\mathfrak{D} \subset U_\zeta$, deci $\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D} \cap U_\zeta$.

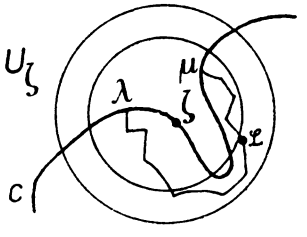

Fig. 57

$\mathfrak{D}$ fiind un domeniu Jordan, putem să-i aplicăm aceleași considerațiuni cu o nouă vecinătate U'_ζ.

Putem deci defini inductiv un șir de domenii $\mathfrak{D}_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) astfel că: $\mathfrak{D}_n \subset \mathfrak{D}_{n-1} \cap U_\zeta(1/n)$, $\mathfrak{D}_0 = D$ și fr $\mathfrak{D}_n = \mathcal{L}_n \cup [\lambda_n, \mu_n]$, unde $U_\zeta(1/n)$

este un disc de rază $1/n$ și centrat în ζ, $\mathcal{L}_n$ este o transversală în $\mathfrak{D}_{n-1}$ cu extremitățile λ_n, $\mu_n \in C$ și $\zeta \in (\lambda_n, \mu_n) \subset C$. Să luăm acum pe fiecare $\mathcal{L}_n$ cîte un punct z_n. Cum $\mathcal{L}_n \subset U_\zeta(1/n)$, $z_n \to \zeta$.

În $\mathfrak{D}_n$ tranversala $\mathcal{L}_{n+1}$ determină, pe lîngă domeniul $\mathfrak{D}_{n+1}$, și domeniul $\mathfrak{D}_n - \mathfrak{D}_{n+1} - \mathcal{L}_{n+1}$ în a cărui frontieră intră $\mathcal{L}_{n+1}$ și $\mathcal{L}_n$ (pentru că $\mathcal{L}_{n+1}$ este disjunctă de fr $\mathfrak{D}_n$) (vezi § 67, teorema 1). Deoarece punctele acestor linii sînt liniar accesibile (vezi § 63, lema 1), există o linie poligonală simplă $L_n = \overset{\frown}{(z_n, z_{n+1})} \subset \mathfrak{D}_n - \mathfrak{D}_{n+1} - \mathcal{L}_{n+1}$. Cum aceste domenii (pentru $n = 1, 2, \ldots$) sînt disjuncte, și $z_n \to \zeta$, mulțimea $L = \bigcup_1^\infty L_n \cup \zeta$ este o curbă simplă, conținută în D cu excepția extremității ζ. Într-adevăr, se vede imediat că, dacă se reprezintă topologic fiecare L_n pe un interval $\left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ și ζ în punctul O, se obține o reprezentare biunivocă și continuă a mulțimii L pe intervalul $[0, 1]$.

Teorema 2. *Un arc simplu C_0 este accesibil în orice punct al său (din domeniul $\mathbf{C}C_0$).*

Fie mai întîi ζ un punct al lui C_0 diferit de extremități. Afirmația se reduce la teorema 1 dacă arătăm că există un arc $\overset{\frown}{(\lambda, \mu)}$ astfel ca $\zeta \in (\lambda, \mu) \subset C_0$ și ale cărui extremități să poată fi unite printr-o linie poligonală simplă $\mathcal{L}$ în $\mathbf{C}C_0$; atunci $\mathcal{L} \cup \overset{\frown}{[\lambda, \mu]}$ este o curbă simplă închisă. Dacă notăm cu α și β extremitățile lui C, atunci arcele (α, ζ) și (β, ζ) conțin puncte λ, respectiv μ liniar accesibile din $D = \mathbf{C}C_0$ (§ 61, teorema 6). Fie $z \in D$ și fie (z, λ), $(z, \mu) \subset D$ două linii poligonale, atunci există o linie poligonală simplă $L \subset (z, \lambda) \cup (z, \mu) \subset D$, care să unească λ cu μ (§ 63, teorema 7).

În cazul cînd ζ este o extremitate, de exemplu $\zeta = \alpha$, atunci lema 2 permite să se demonstreze accesibilitatea lui α printr-un raționament analog cu cel din teorema precedentă. Într-adevăr, fie V_α o vecinătate ce corespunde ca în lema 2 vecinătății circulare de rază 1, $U_\alpha(1)$, fie $C_1 \subset V_\alpha \cap C_0$ un arc simplu cu o extremitate α, fie λ_1, $\lambda_1' \in C_1$ două puncte liniar accesibile din D (în virtutea primei părți a demonstrației, toate punctele lui $C_0 - \{\alpha \cup \beta\}$ sînt liniar accesibile din D), fie L_1, L_2 două linii poligonale ce unesc λ_1 și λ_1' cu cîte un punct din D și fie $L_1' \subset L_1$, $L_2' \subset L_2$ două segmente cu cîte o extremitate în λ_1, respectiv λ_1' și conținute în V_α. Dacă ζ_1 și ζ_2 sînt celelalte două extremități, atunci, în virtutea lemei 2, există o linie poligonală $L' \subset U_\alpha(1) \cap D$ care să le unească. Fie $L \subset L_1' \cup L_2' \cup L'$ o linie poligonală simplă ce unește λ_1 cu λ_1'. $L \cup \overset{\frown}{[\lambda_1, \lambda_1']}$ formează evident o curbă simplă închisă ce determină două domenii Jordan $D_1 \subset U_\alpha(1)$ și D_1'. Dacă $\alpha \notin D_1$, fie L_1'', L_2'' două linii poligonale ce unesc un punct $\mu \in [\lambda_1, \lambda_1']$ cu cîte un punct din D_1 și din D_1' (ceea ce-i posibil în virtutea teoremei precedente). Fie apoi $L_1''' \subset L_1'' \cap V_\alpha$ și $L_2''' \subset L_2'' \cap V_\alpha$ două segmente cu cîte o extremitate în μ și fie z, z' celelalte două extremități ale lor. În virtutea lemei 2, z și z' pot fi unite printr-o linie poligonală simplă $L'' \subset U_\alpha(1) \cap D$. Fie $L''' \subset L'' \cup$

$\cup L_1''' \cup L_2'''$ o linie poligonală ce conține cîte un segment din L_1''' și din L_2''' cu o extremitate μ. Să notăm $\mathcal{L}_1 = L \cup [\lambda_1, \lambda_1']$ dacă $\alpha \in D_1$ sau $\mathcal{L}_1 = L'''$ dacă $\alpha \notin D_1$ și fie $d = \rho(\alpha, \mathcal{L}_1) > 0$ și $p_1 > 1/d$ un număr natural. Evident $U_\alpha(1/p_1) \cap \mathcal{L}_1 = \varnothing$. Repetînd raționamentul de mai sus cu vecinătatea $U_\alpha(1/p_1)$ se obține o nouă linie poligonală simplă $\mathcal{L}_2$ cu $\mathcal{L}_2 \cap \mathcal{L}_1 = \varnothing$, $\mathcal{L}_2 \subset U_\alpha(1/p_1)$ și un domeniu D_2 cu fr $D_2 = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$. Fie $z_1 \in \mathcal{L}_1 \cap D$ și $z_2 \in \mathcal{L}_2 \cap D$, (vezi fig. 58). Întrucît $\mathcal{L}_1 \cap D$ și $\mathcal{L}_2 \cap D$ sînt linii poligonale simple, rezultă că z_1 și z_2 pot fi unite în D_2 printr-o linie poligonală simplă $\mathcal{L}_1'$. Putem defini inductiv un șir de numere naturale p_n, de vecinătăți $U_\alpha(1/p_n)$, de puncte z_n, de domenii D_n și de linii poligonale $\mathcal{L}_n$ și $\mathcal{L}_n'$.

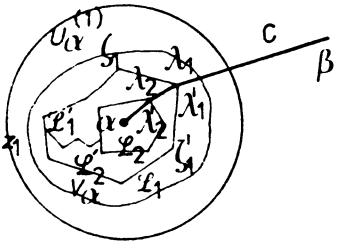

Fig. 58

Deoarece $\mathcal{L}_n \subset U_\alpha(1/p_n)$, rezultă că $z_n \to \alpha$, iar mulțimea $\mathcal{L}' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{L}_n'$ este un arc simplu conținut în D cu excepția extremității α[7].

Exemple

1) *O hiperbolă se compune din două curbe simple închise în $\bar{C}$ (e o curbă simplă închisă în planul proiectiv).*

2) *Ramurile unei hiperbole determină domenii convexe nemărginite.*

3) *Domenii convexe: unghiurile (în sens restrîns), segmentele, benzile, poligoanele convexe interiorul unei elipse. O curbă închisă regulată de ordin 2, cu curbura > 0 determină un domeniu convex.*

4) Pentru *mulțimea R a punctelor raționale*, $\bar{R} = C = \text{fr } R$, $\text{int } R = 0$. *Deci* $\text{fr}(\text{int } R) \neq \text{fr } R$ fr $R \neq \text{fr } \bar{R}$.

5) (Fig. 59) fr $D \neq$ fr (ext D).

6) *Pătratul de latură 2 minus segmentele* $\left[0,1 + \frac{i}{n}\right]$ $(n = 1,2, \ldots)$, *segmentul* (0 1) *este inaccesibil* (fig. 60).

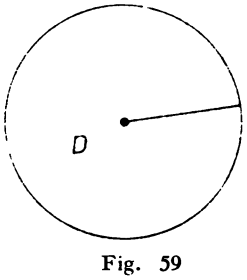

Fig. 59

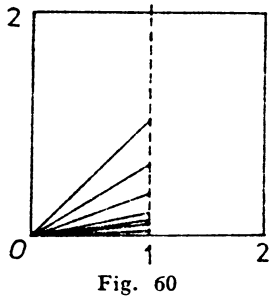

Fig. 60

7) *Pătratul minus segmentele* $I_n\left(0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2},\ y = \frac{1}{n}\right)$ $(n \geqslant 2)$ (fig. 61). *Segmentul* $0 \leqslant x < \frac{1}{2}$ *al frontierei este inaccesibil.* Fie α în acest segment și o vecinătate V_α pe care o

[7] În manuscris nu figura decît enunțul teoremei și primele trei rînduri ale demonstrației. Restul a fost completat de noi — P.C. — urmînd în mare raționamentul din teorema precedentă.

intersectează toate segmentele I_n ($n > \nu$). Dacă α este accesibil cu o curbă C, un arc $C_0 = \overset{\frown}{(\alpha, \beta)}$ al acesteia este în V_α (fig. 62). Există un segment I_n de ordin $\frac{1}{n} <$ ordinul lui β; el determină în V_α un segment circular care conține pe β, dar nu pe α. Deci C_0 intersectează frontiera segmentului circular și cum nu intersectează circumferința lui V_α, va intersecta pe I_n.

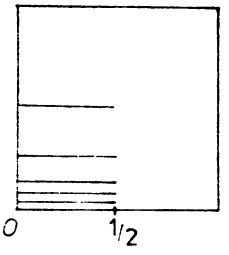

Fig. 61

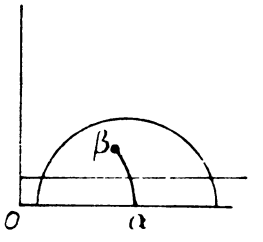

Fig. 62

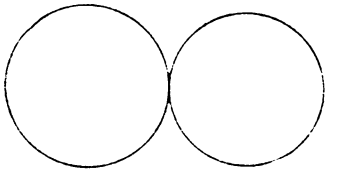

Fig. 63

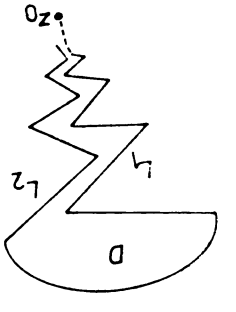

Fig. 64

8) (Fig. 63) *Interiorul acestei mulțimi nu-i conexă.*

9) În figura 64, *domeniul D este un domeniu Jordan, dar punctul z_0 nu-i liniar accesibil*, arcele L_1 și L_2 fiind formate dintr-o infinitate de segmente.

Capitolul IV

Teoria integrării în domeniul complex

§ 71. Drumuri şi curbe în planul complex

1 a) Numim *drum* orice reprezentare continuă (în plan) a unui segment (interval) închis $[a, b]$; cu alte cuvinte, figura reprezentată de o ecuaţie de forma $z = z(t)$ cu $z(t)$ funcţie continuă în intervalul $[a, b]$ descris de *parametrul* t. Vom mai presupune că $z(t)$ nu este constantă, adică vom exclude cazul cînd figura se reduce la un punct.

Alte denumiri: *curbă continuă, continuu peanian.* A doua (curbă continuă) e nepotrivită (deşi foarte uzitată), pentru că poate fi în opoziţie prea flagrantă cu ideea comună de curbă deoarece se pot da exemple de drumuri care sînt domenii închise. (Primul exemplu de acest fel a fost dat de Peano; vezi altul în F. Hausdorff: „Mengenlehre" Dover Publications, New York 1944). A treia denumire (continuu peanian) este cea mai potrivită, dar, fiind prea lungă, preferăm pe cea dintîi.

b) Definiţia de mai sus se întregeşte cu următoarea:

Două drumuri, cu reprezentările

$$z = z(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \qquad z = z_1(t_1) \quad (a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1),$$

sînt privite ca identice atunci şi numai atunci cînd între intervalele $[a, b]$ şi $[a_1, b_1]$ se poate stabili un homeomorfism $t_1 = \varphi(t)$ astfel ca valori corespunzătoare t şi t_1 să dea acelaşi punct z:

$$z_1(\varphi(t)) \equiv z(t) \text{ în } [a, b].$$

După cum ştim, funcţia $\varphi(t)$ este strict monotonă şi continuă. Invers, dacă $\varphi(t)$ esteo asemenea funcţie, şi $\psi(t_1)$ inversa ei, care este de acelaşi fel, ecuaţia $z_1 = z(\psi(t_1))$ reprezintă un drum identic cu $z = z(t)$.

Aşadar, noţiunea de *drum* nu se reduce la aceea a unei mulţimi de puncte, ci echivalează cu o clasă de reprezentări prin mijlocirea unor anumiţi *parametri ai drumului (normali)*, care se deduc unul din altul prin transformări de forma $t_1 = \varphi(t)$ cu $\varphi(t)$ funcţie strict monotonă şi continuă.

Să mai observăm că intervalul de variaţie al unui parametru poate fi oarecare. De exemplu, el va fi $[0, 1]$, dacă în locul lui t, de la care am plecat, introducem parametrul $t_1 = \dfrac{t - a}{b - a}$ (evident normal).

Exemple 1. *Drumurile* $z = t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ *şi* $z = \tau^2$ $(0 \leqslant \tau \leqslant 1)$ *sînt identice, pentru că* $t = \tau^2$ *este o funcţie crescătoare şi continuă de* τ.

2. $z = \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ *şi* $z = \tau$ $(-1 \leqslant \tau \leqslant 1)$ *nu sînt drumuri identice,* deşi au ca suport aceeaşi mulţime de puncte: pentru că sin t nu este o funcţie monotonă în intervalul $[0,2\pi]$.

c) *O imagine continuă şi care nu se reduce la un punct, a unui drum, este tot un drum.* Evident.

d) *Mulţimea de puncte ale unui drum este compactă şi conexă,* pentru că aceste proprietăţi le are segmentul $[a, b]$ a cărui imagine continuă e drumul. Aşadar, un drum este un continuu mărginit în planul euclidian sau un continuu ce conţine punctul ∞ în planul lui Gauss. În ultimul caz continuitatea funcţiei $z(t)$ trebuie înţeleasă în sens larg.

e) Un punct al unui drum poate corespunde la mai multe valori ale parametrului şi atunci el se numeşte *punct multiplu (nod)*; numărul acestor valori (care poate fi infinit) este *multiplicitatea* punctului.

Astfel, drumul $z = \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$ are toate punctele de mult implicitate 2, afară de $z = \pm 1$, de multiplicitate 1 şi $z = 0$ de multiplicitate 3.

Este evident, că o schimbare de parametru (normal) păstrează multiplicităţile punctelor drumului.

Nici multiplicităţile punctelor unui drum nu sînt suficiente pentru a-l defini.

Exemplul 3. *Ecuaţiile*

$$z = \begin{cases} t & (0 \leqslant t \leqslant 1) \\ e^{2\pi i t} & (1 \leqslant t \leqslant 2) \end{cases}, \qquad z = \begin{cases} \tau & (0 \leqslant \tau \leqslant 1) \\ e^{-2\pi i \tau} & (1 \leqslant \tau \leqslant 2) \end{cases}$$

reprezintă aceeaşi mulţime de puncte, care au multiplicitatea 1, cu excepţia lui $z = 1$, *de multiplicitate* 2. *Însă ele nu reprezintă acelaşi drum,* pentru că funcţia $\tau = \varphi(t)$ ar trebui să fie egală cu t în intervalul $[0,1]$ şi cu $-t$ în intervalul $[1, 2]$, deci discontinuă.

f) Punctele $\alpha = z(a)$ şi $\beta = z(b)$, care corespund extremităţilor intervalului de variaţie a parametrului t, se numesc *extremităţile* drumului. Este evident că o schimbare de parametru (normal) sau o reprezentare continuă nu schimbă caracterul acestor puncte.

Cînd extremităţile coincid, drumul se zice *închis*. Atunci este convenabil să prelungim funcţia $z(t)$ într-o funcţie periodică. De exemplu, luînd intervalul $[0, 2\pi]$, vom defini $z(t + 2k\pi) = z(t)$ şi această funcţie va reprezenta drumul în orice interval de lungime 2π. (Trecerea de la un interval la altul se face printr-o schimbare de parametru de forma $t_1 = t + c$, care dă tot un parametru normal). Rezultă de aici că drumul este o imagine continuă a cercului $|z| = 1$, şi că orice punct al său poate fi luat drept punct iniţial (extremitate). Imaginea continuă a unui drum închis este de asemenea un drum închis.

În exemplul 2, primul drum este închis (cu punctul iniţial $z = 0$).

g) Un drum $z = z(t)$ poate fi *orientat* ataşîndu-i un anumit sens de variaţie (crescător sau nedescrescător) a parametrului t. Dacă drumul nu este închis, orientarea lui este definită prin ordinea în care enunţăm extremităţile: $\alpha\beta$ sau $\beta\alpha$. Parametrii unui drum orientat sînt definiţi pînă la o transformare $t_1 = \varphi(t)$ cu $\varphi(t)$ crescătoare şi continuă. (Numai aceste transformări păstrează sensul de variaţie a parametrului).

h) Vom numi *subdrum* al unui drum $z = z(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$ drumul reprezentat de aceeaşi ecuaţie într-un subinterval al intervalului $[a, b]$. Se presupune că în acest subinterval $z(t)$ nu este constant (altfel subdrumul se reduce

la un punct al drumului). Prin orientarea drumului sînt orientate și subdrumurile lui. Dacă notăm cu C drumul și cu Γ un subdrum, vom scrie $\Gamma \subset C$.

i) Două drumuri orientate se zic *consecutive* dacă extremitatea finală a primului coincide cu extremitatea inițială a celui de al doilea. Alegînd intervalele consecutive, ecuațiile drumurilor vor fi de forma

$$z = z_1(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \qquad z = z_2(t) \quad (b \leqslant t \leqslant c);$$

ele definesc în intervalul $[a, c]$ o funcție continuă neconstantă, deci un drum care se va numi *suma drumurilor* consecutive date. Acestea fiind notate cu C_1 și C_2, suma lor se va nota $C = C_1 \cup C_2$. Aceeași relație are loc și între mulțimile de puncte ale drumurilor.

Este evident că dacă două drumuri sînt identice cu alte două, suma primelor este identică cu suma ultimelor.

Invers, un drum poate fi descompus într-o sumă de subdrumuri consecutive, descompunînd intervalul de variație al parametrului în subintervale consecutive.

În exemplu 3 avem drumuri consecutive.

2 a) Cînd toate punctele unui drum sînt simple (de multiplicitate 1), sau, cu alte cuvinte, un parametru al drumului este în corespondență biunivocă cu punctele drumului, acesta se numește *arc simplu* (de curbă). Un arc simplu este, așadar (ca mulțime de puncte), o imagine homeomorfă a unui segment.

Arcele simple pot fi definite numai ca mulțimi de puncte. Aceasta înseamnă: pentru ca două arce simple să fie identice, este necesar și suficient ca ele să aibă aceleași puncte. Într-adevăr, necesitatea acestei condiții este evidentă; reciproc, dacă arcele simple $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ și $z = z_1(t_1)$ $(a_1 \leqslant t_1 \leqslant b_1)$ formează aceeași mulțime C de puncte, avem un homeomorfism între intervalul $[a, b]$ și C, și altul între C și intervalul $[a_1, b_1]$. Produsul acestora este un homeomorfism între $[a, b]$ și $[a_1, b_1]$, $t_1 = \varphi(t)$, în care valori corespunzătoare t și t_1 dau același $z \in C$. Astfel, cele două arce sînt identice prin definiție.

b) *O imagine homeomorfă a unui arc simplu este tot un arc simplu.* Evident.

c) *Un arc simplu este un continuu compact (ca și mulțimea de puncte ale unui drum oarecare), care are și proprietatea (pe care nu o au celelalte drumuri) de a-și pierde conexiunea cînd se scoate un punct al său diferit de extremități.* Într-adevăr, arcul dat C, avînd ecuația $z = z(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$, fie $\gamma = z(c)$ un punct al său diferit de extremitățile α, β (deci $c \neq a, b$). Scoțînd pe c din intervalul $[a, b]$, obținem o partiție $[a, b] - c = [a, c) + (c, b]$, căreia îi corespunde o partiție a arcului din care s-a scos punctul γ: $C - \gamma = C_1 \cup C_2$. ($C_1$ și C_2 sînt disjuncte pentru că corespondența dintre interval și arc este biunivocă). Din contra, arcul nu-și pierde conexiunea prin scoaterea unei extremități (devine un arc *deschis*) și aceasta caracterizează topologic extremitățile. Și reciproc (§ 62 teorema 7, Janiszewsky), o mulțime de puncte care posedă cele două proprietăți precedente, este un arc simplu (vezi Hausdorff, op. citat).

Proprietatea a doua are drept consecință că un arc simplu nu poate conține puncte interioare (ca mulțime plană). Căci, dacă un punct $z \in C$ ar fi interior, ar exista o vecinătate $U_z \subset C$; or, scoaterea unui punct din U_z nu poate, evident, strica conexiunea mulțimii C.

Totuși, un arc simplu poate fi o mulțime foarte diferită de noțiunea obișnuită de curbă. De exemplu, sînt arce simple care au o arie >0 (vezi Hausdorff, op. citat).

d) *Singurele continuuri conținute într-un arc simplu sînt subarcele lui (de asemenea simple).*

Rezultă din faptul că un asemenea continuu corespunde unui continuu din segmentul $[a, b]$, deci unui segment.

e) Orientarea definită mai sus pentru orice drum poate fi asociată în cazul unui arc simplu $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ cu o ordonare a punctelor lui (sau sens de parcurs), definită (ca și într-un segment), astfel: Un punct z_1 precede alt punct z_2 al arcului dacă z_1 se află în subarcul $\overset{\frown}{\alpha z_2}$ (de extremități α și z_2). În această ordonare, α e primul punct și β ultimul.

f) Un drum închis, ale cărui puncte sînt simple, se numește *curbă simplă închisă* (în cazul cînd este mărginită, și curbă Jordan). Altfel spus, o curbă simplă închisă este o imagine homemorfă a unui cerc. Acesta poate fi cercul de rază 1 și atunci curba este reprezentată de o ecuație $z = z(t)$ cu $z(t)$ funcție continuă de perioadă 2π, și astfel că un punct z al curbei corespunde numai la valori t ce diferă între ele prin $2k\pi$; t poate fi restrîns la un interval de lungime 2π.

g) O curbă închisă simplă este un continuu compact, cu proprietatea că prin scoaterea *oricărui* punct al său nu-și pierde conexiunea, dar și-o pierde cînd se scot două puncte. Aceste proprietăți caracterizează curbele închise simple (§ 62, teorema 8 (Janiszewsky)).

Proprietățile b), d), e) rămîn valabile pentru curbele închise, cu deosebirea că ordonările ce se pot atașa unei curbe închise simple sînt *ciclice* (ca pe arc) și una din ele poate fi dată cu ajutorul unei succesiuni ciclice de 3 puncte.

Exemplul **4.** *O dreaptă în planul lui Gauss este o curbă închisă simplă,* cum reiese din faptul că o putem considera ca transformată a unui cerc printr-o transformare liniară (și deci homeomorfă), sau din reprezentarea sub forma $z = z_0 + \alpha \operatorname{tg} t$, unde luăm $z = \infty$, pentru $t = (2k + 1)\,\frac{\pi}{2}$.

Exemplul **5.** *O elipsă* $z = a \cos t + 2\,b \operatorname{sint}$ *este o curbă închisă simplă (mărginită). De asemena o ramură de hiperbolă* $z = \frac{a}{\cos t} + i\,b \operatorname{tg} t \left(-\frac{\pi}{2} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$, *cu* $z = \infty$ *pentru* $t = \pm\frac{\pi}{2}$. *Nu însă și hiperbolă întreagă,* căci, dacă scoatem din cele două ramuri cîte un punct, ea nu-și pierde conexiunea (în planul lui Gauss).

3 a) Vom numi *curbă* (în sensul cel mai general) un drum care este o reuniune de arce simple, consecutive, în număr finit: $C = \overset{\frown}{\alpha\alpha_1} \cup \overset{\frown}{\alpha_1\alpha_2} \cup \ldots \cup \overset{\frown}{\alpha_{p-1}\beta}$; α și β sînt extremitățile curbei. Curba este închisă cînd $\alpha = \beta$.

b) *O curbă este un continuu compact, care nu poate avea puncte interioare.*

c) *Fiecare punct al unei curbe are o multiplicitate finită, care este evident egală cu numărul arcelor componente ce conțin punctul, o extremitate comună la două arce consecutive fiind socotită ca aparținînd unui singur arc.*

O curbă poate avea o infinitate de puncte multiple, care pot forma arce sau șiruri infinite.

O curbă fără puncte multiple este evident un arc simplu sau o curbă închisă simplă.

Exemplul 6. $z = \begin{cases} t + it \sin \frac{\pi}{t} & \left(0 < t \leqslant \frac{1}{2}\right) \\ 1 - t & \left(\frac{1}{2} < t \leqslant 1\right) \end{cases}$ *reprezintă o curbă închisă având punctele duble* $z = \frac{1}{n}$ $(n = 3, 4, \ldots)$.

d) O orientare a unei curbe $C = \widehat{\alpha\alpha_1} \cup \ldots \cup \widehat{\alpha_{p-1}\beta}$ este asociată cu sensurile de parcurs $\widehat{\alpha\alpha_1}$, $\widehat{\alpha_1\alpha_2}$, ..., $\widehat{\alpha_{p-1}\beta}$ pe arcele componente, iar orientarea opusă este asociată cu sensurile $\widehat{\beta\alpha_{p-1}}$, ..., $\widehat{\alpha_1\alpha}$. Cînd un punct descrie curba în unul din aceste sensuri, el trece de m ori printr-un punct de multiplicitate m.

e) *O reprezentare homeomorfă a unei curbe este tot o curbă, ale cărei puncte au aceleaşi multiplicităţi. Cînd un punct descrie prima curbă într-un sens, corespunzătorul său descrie curba a doua într-un sens.*

4 a) Se numeşte *curbă local simplă* un drum $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ care are proprietatea că fiecare valoare $t \in [a, b]$ a parametrului normal poate fi inclusă într-un interval $[t - \varepsilon, t + \varepsilon]$, la care corespunde un arc simplu (subdrum al drumului dat). (Bineînţeles se consideră numai intersecţia intervalului precedent cu $[a, b]$.)

Este evident că noţiunea precedentă nu depinde de alegerea parametrului normal şi de asemenea, că o reprezentare homeomorfă a unei curbe local simple este de aceeaşi natură.

b) Fie $\varepsilon(t)$ valoarea lui ε care corespunde intervalului maxim cu proprietatea precedentă pentru t dat. Vom demonstra că $\inf \varepsilon(t) > 0$. Într-adevăr, dacă $\inf \varepsilon(t) = 0$, ar exista un şir de valori t_n, care converg către valoarea $t_0 \in [a, b]$, şi astfel că $\varepsilon(t_n) < \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Or, dacă luăm n destul de mare, t_n se va găsi în intervalul $\left[t_0 - \frac{1}{2}\varepsilon(t_0),\ t_0 + \frac{1}{2}\varepsilon(t_0)\right]$ şi pentru aceşti t_n vom avea $\varepsilon(t_n) \geqslant \frac{1}{2}\varepsilon(t_0)$, în contradicţie cu $\varepsilon(t_n) < \frac{1}{n}$. Rezultă că:

Pentru ca un drum $z = z(t)$, $(a \leqslant t \leqslant b)$ să fie local simplu, este necesar şi suficient să existe un $\eta > 0$ astfel că la orice subinterval de lungime $< \eta$ al intervalului $[a, b]$ să corespundă un subdrum simplu.

De aici urmează că *o curbă local simplă este o curbă în sensul definiţiei de la nr. 3*: pentru că împărţind intervalul $[a, b]$ în intervale consecutive de lungime $< \eta$, ea apare ca o reuniune de arce simple consecutive.

Reciproca nu este adevărată:

Exemplul 7. $z = t^2$, $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$ *este o curbă, care constă din segmentul* $[0, 1]$ *de pe axa reală, parcurs de două ori în sensuri opuse; această curbă nu este local simplă,* fiindcă punctul $t = 0$ nu satisface definiţia: într-un interval $[-\varepsilon, \varepsilon]$ ecuaţia $z = t^2$ nu reprezintă un arc simplu. La fel curba din exemplul 6.

c) Condiţia necesară şi suficientă pentru ca un drum să fie local simplu, se mai poate pune sub forma următoare, evident echivalentă cu b): *Un drum este local simplu dacă şi numai dacă există un $\eta > 0$, astfel ca distanţa dintre două valori ale parametrului normal t, ce dau acelaşi punct z, să fie întotdeauna $> \eta$.*

De aici, urmează imediat că *un drum ale cărui puncte multiple au multiplicități finite și sînt în număr finit, este o curbă local simplă.*

d) *Altă condiție necesară și suficientă, și care este independentă de alegerea parametrului normal* este următoarea:

Să existe un $\delta > 0$, *astfel ca orice subdrum de diametru* $< \delta$ *să fie simplu.*

1° În virtutea continuității uniforme, pentru $\delta > 0$ dat, există un $\eta > 0$, astfel că la $|\Delta t| < \eta$ corespunde $|\Delta z| < \delta$. Deci, dacă este satisfăcută condiția precedentă, la orice subinterval de lungime $|\Delta t| < \eta$ corespunde un subdrum de diametru $< \delta$, care este un arc simplu; și drumul dat este deci local simplu.

2° Pentru a demonstra că, invers, o curbă local simplă are proprietatea precedentă, ne vom folosi de următoarea lemă:

Lemă. *Fiind dat un drum* $z = z(t)$ *cu* $z(t)$ *neconstant în nici un subinterval, și* η *fiind un număr* >0, *diametrii subdrumurilor corespunzătoare la subintervale de lungime* $\geqslant \eta$ *admit un minim* $\delta > 0$.

Într-adevăr, dacă $\delta = 0$, va exista un șir de subintervale $[t_n, t'_n]$ astfel că t_n și t'_n converg către valori t_0 și t'_0 din intervalul $[a, b]$, iar diametrul subdrumului corespunzător subintervalului $[t_n, t'_n]$ este $< \frac{1}{n}$, în timp ce $|t_n - t'_n| \geqslant \eta$. Atunci, $|t_0 - t'_0| \geqslant \eta$ și din $|z(t_n) - z(t'_n)| < \frac{1}{n}$ urmează că $z(t_n)$ și $z(t'_n)$ tind la același punct $z_0 = z(t_0) = z(t'_0)$. Deoarece intervalul $[t_n, t'_n]$ tinde la $[t_0, t'_0]$, vom avea (din același motiv) și pentru orice $t \in [t_0\ t'_0]$, $z(t) = z_0$ (const.); ceea ce este exclus prin ipoteză.

Acum, η fiind numărul definit la b) și δ numărul dat de lema precedentă pentru acest η, urmează din definiția lui δ că orice subdrum de diametru $< \delta$ corespunde unui subinterval de lungime $< \eta$, și deci că un asemenea subdrum este simplu. Lema este aplicabilă, fiindcă în cazul unei curbe local simple $z(t)$ nu poate fi constant într-un subinterval, deoarece acesta conține un subinterval (de lungime $< \eta$) la care corespunde un arc simplu — și un arc simplu nu se poate reduce la un punct.

5 a) Se numește *arc regulat* în planul euclidean un drum $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ reprezentat de o funcție $z(t)$ cu derivată continuă, finită și diferită de zero în $[a, b]$. Parametrii normali vor fi în acest caz legați printr-o relație de forma $t_1 = \varphi(t)$ cu $\varphi(t)$ strict monotonă și admițînd derivata $\varphi'(t)$ constantă, finită și diferită de zero.

b) Un arc regulat este o curbă local simplă. Într-adevăr, pentru o valoare t_0 oarecare, una din derivatele $x'(t)$, $y'(t)$ trebuie să fie $\neq 0$. Fie $x'(t_0) \neq 0$; vom avea, în adevăr, un interval $[t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon]$ în care $x'(t) \neq 0$ (din cauza continuității). În acest interval, funcția $x(t)$ este strict monotonă și continuă, deci t este o funcție uniformă de x pe subdrumul corespunzător, ceea ce înseamnă că la fiecare x al subdrumului corespunde un singur t; așadar subdrumul este simplu.

Un arc regulat este, prin urmare, o reuniune de arce simple regulate, consecutive, în număr finit (vezi 4 b).

Din geometria diferențială se știe că un arc regulat are tangentă în fiecare punct diferit de extremități și semitangente în extremități; într-un punct multiplu, tangentele sînt acelea ale arcelor simple componente care trec prin el.

6. a) Se numește *drum deschis* (la un capăt) o reprezentare continuă a unui interval (segment) semideschis $[a, b)$, $z = z(t)$, cu $z(t)$ neconstantă.

Un drum deschis este întotdeauna orientat, în sensul în care parametrul normal t variază de la a (corespunzător extremității) la b.

Identitatea a două drumuri deschise se definește ca la nr. 1. Doi parametri normali sînt legați printr-o relație de forma $t_1 = \varphi(t)$ cu $\varphi(t)$ continuă și crescătoare.

Intervalul $[a, b)$ poate fi orice interval semideschis.

Cînd drumul nu are puncte multiple, adică reprezentarea lui este homeomorfă, el este un *arc simplu deschis*.

Cînd, în plus, $z(t)$ admite derivată continuă, finită și diferită de zero în $[a, b)$, arcul deschis este *regulat*.

O reprezentare continuă duce un drum deschis într-un drum deschis.

Un homeomorfism păstrează caracterul de arc simplu deschis sau arc deschis regulat al unui drum; în acest din urmă caz, parametrii normali sînt definiți pînă la o transformare de forma $t_1 = \varphi(t)$ cu $\varphi(t)$ crescătoare și admițînd derivată continuă, finită și diferită de zero.

b) Drumurile deschise intervin în studiul proprietăților „la limită" (pe frontieră) ale funcțiilor definite în domenii, și mai general — în spații topologice necompacte.

Se zice că un drum deschis $z = z(t)$, $(a \leqslant t < b)$ dintr-un domeniu D tinde către fr D, sau că un drum deschis dintr-un spațiu topologic necompact este strict deschis, dacă pentru orice șir de valori t_n ce converg la b, șirul de puncte corespunzătoare $z(t_k)$ nu converge. În cazul unui spațiu topologic oarecare, z trebuie interpretat ca punct din acel spațiu.

Teorema 1. *Pentru ca un drum deschis în D să tindă la fr D (respectiv într-un spațiu necompact, să fie strict deschis), este necesar și suficient ca orice mulțime compactă $M \subset D$ (respectiv conținută în spațiul dat) să lase afară un subdrum deschis al drumului dat (adică subdrumul corespunzător unui subinterval (t_0, b) cu t_0 destul de apropiat de b).*

1° Presupunem această condiție satisfăcută și fie $t_n \to b$. Șirul de puncte corespunzătoare $z(t_n) = z_n$ nu poate converge (în D), pentru că, dacă $z_n \to \zeta$, luînd $M = U_\zeta$ $(\subset D)$ ar urma să existe un $t_0 \in [a, b)$ astfel ca subdrumul corespunzător subintervalului $[t_0, b)$ să fie disjunct de U_ζ; atunci, pentru n destul de mare vom avea $t_n \in [a, t_0]$, în contradicție cu $t_n \to b$.

2° Presupunem că drumul este strict deschis și fie M o mulțime compactă $(\subset D)$. Dacă M nu lasă afară nici un subdrum deschis al drumului dat, M conține puncte $z_k = z_k(t_k)$ cu $t_k \to b$. Atunci un subșir al șirului (z_k) ar converge (M fiind compactă), în contradicție cu ipoteza.

Exemple: **8.** *Arcul de spirală logaritmică $r = e^{-\theta}$ $(\theta \geqslant 0)$ este un arc simplu și regulat deschis. El tinde către origine (ca frontieră a domeniului ce se obține scoțînd acest punct din plan). Adăugînd arcului originea, obținem un arc simplu, care poate fi reprezentat homeomorf pe segmentul $[0, 1]$ punînd $\theta = \dfrac{t}{1-t}$ și făcînd să corespundă la $t = 1$ originea. Acest arc însă nu este regulat în origine (nu are semitangentă).*

9. *În domeniul $\mathrm{Re}\, z > 0$, ecuația $z = t + i \sin \dfrac{1}{t}$ reprezintă un arc simplu deschis, ce tinde către frontiera domeniului.*

Considerat în tot planul, acest arc are ca aderență mulțimea formată din el însuși și din segmentul $z = iy$, $(-1 \leqslant y \leqslant 1)$.

c) *În planul euclidean (care este un spațiu necompact) un drum strict deschis este reprezentat de o ecuație $z = z(t)$, $(a \leqslant t < b)$ cu $z(t) \to \infty$ pentru $z \to b$.*

Căci după teorema precedentă pentru $K > 0$ dat există un t_0 astfel că $|z| > K$ pentru $t \in [t_0, b)$. Şi reciproc, dacă $z(t) \to \infty$ pentru $t \to b$, drumul este strict deschis cum se vede, luînd cercul $|z| \leqslant K$ astfel ca să conţină o mulţime compactă dată M.

Cînd drumul este simplu şi regulat, avem noţiunea de arc infinit al geometriei diferenţiale. În acest caz, transformarea $z^* = \frac{1}{z}$ duce arcul infinit C într-un arc deschis C^* care tinde către origine. Adăugînd la C punctul ∞ şi la C^* punctul O, obtinem evident arcele simple $\bar{C}$ de extremităţi α, ∞ (în planul lui Gauss) şi $\bar{C}^*$ de extremităţi α^*, O; aceste arce nu sînt în general regulate în a doua extremitate a lor.

Arcul C are o direcţie asimptotică (faţă de O) dacă dreapta Oz are limită cînd $t \to b$, ceea ce evident revine la condiţia ca dreapta Oz^* să aibă limită, adică la condiţia ca arcul $\bar{C}^*$ să admită semitangentă în O.

Arcul $\bar{C}$ este (prin definiţie) regulat la ∞ dacă $\bar{C}^*$ este regulat în origine, adică $z^*(t) = \frac{1}{z(t)}$ are derivată continuă pentru $t = \bar{b}$ (ceea ce înseamnă că tangenta acestui arc într-un punct $z^*(t)$ tinde către tangenta în O cînd $t \to b$). Atunci, tangenta la C tinde către direcţia asimptotică. Într-adevăr, fie $z(t) = x(t) + iy(t)$. Direcţia asimptotică este $m = \lim_{t \to b} \frac{y}{x} = \lim_{t \to b} \frac{y'}{x'}$ şi deci direcţia tangentei este $\frac{y'}{x'}$.

Exemplul **10.** *Arcul de spirală logaritmică* $r = e^{\theta}$ $(\theta \geqslant 0)$ *este un arc infinit fără direcţie asimptotică transformatul său prin* $z^* = 1/z$ *nu are semitangenta în* O (vezi exemplul 8). *Arcul considerat nu este deci regulat la* ∞.

7. Fie $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ un drum oarecare. Să considerăm lanţul

(1) $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < b = t_n$

şi *linia poligonală înscrisă*, determinată de lanţul corespunzător:

$$\alpha = z(t_0) = z_0, z_1 = z(t_1), \ldots, z_k = z(t_k), \ldots, \beta = z(t_n) = z_n.$$

Dacă notăm $\Delta_k z = z_k - z_{k-1}$, lungimea acestei linii poligonale este

$$l = \sum_1^n |\Delta_k z|.$$

Se zice că drumul este *rectificabil* dacă mulţimea lungimilor l ale liniilor poligonale înscrise este mărginită; în acest caz, marginea superioară s a acestei mulţimi $\{l\}$ se numeşte *lungimea drumului* (Peano):

$$s = \sup l.$$

Dacă se schimbă parametrul normal, totalitatea lungimilor l nu se schimbă şi deci definiţia este independentă de alegerea parametrului.

Teorema 2. *Lungimea* $s \geqslant 0$, *şi* $s = 0$ *numai cînd drumul degenerează într-un punct.*

Teorema 3. *Oricare ar fi linia poligonală înscrisă, de lungime* l, *avem* $s \geqslant l$, *cu egalitate numai atunci cînd drumul se confundă cu acea linie poligonală.*

Într-adevăr, dacă linia poligonală $\alpha z \dots z_{n-1}\beta$ coincide cu drumul, lungimea drumului este l, pentru că orice altă linie poligonală înscrisă are lungimea $< l$ (cum se vede imediat). În caz contrar, fie $z(t^*) = z^*$ un punct al drumului, ce nu aparține liniei poligonale și t^* cuprins între t_{k-1} și t_k. Linia poligonală $\alpha_0 z_1 \dots z_{k-1} z^* z_n \dots \beta$ are lungimea $l^* > l$, și cum $s \geqslant l^*$, avem $s > l$.

Teorema 4. *Un drum rectificabil este mărginit.*

Căci $\alpha z \beta$ este o linie poligonală înscrisă, oricare ar fi punctul $z = z(t)$ al drumului; cum lungimea acesteia este $\geqslant |z - \alpha|$, avem pentru tot drumul $|z - \alpha| \leqslant s$. (Adică drumul este conținut în cercul de centru α și rază s). Se vede la fel că un drum de lungime s este conținut în cercul de rază s, cu centrul într-un punct al drumului.

Teorema 5. *Dacă C este un drum rectificabil de lungime s, orice subdrum C_1 este de asemenea rectificabil și are lungimea $s_1 \leqslant s$, cu egalitate numai cînd $C_1 = C$.*

Orice linie poligonală înscrisă în C_1 face parte din liniile poligonale înscrise în C; orice lungime l_1 fiind cel mult egală cu o lungime l, urmează $s_1 \leqslant s$. A doua afirmație va rezulta din teorema următoare:

Teorema 6. *Dacă C_1 și C_2 sînt drumuri consecutive rectificabile, de lungimi s_1 și s_2, atunci reuniunea lor $C = C_1 \cup C_2$ este un drum rectificabil, de lungime $s = s_1 + s_2$.*

Drumurile C_1 și C_2 fiind reprezentate pe intervale consecutive $[a, b]$ și $[b, c]$, drumul C este reprezentat pe intervalul $[a, c]$. Considerînd o diviziune a lui $[a, c]$, fie t_{k-1}, t_k valorile între care se află b. Linia poligonală $\alpha z_1 \dots z_{k-1} z_k \dots \gamma$ corespunzătoare acestei diviziuni are o lungime l. Dacă liniile poligonale $\alpha z_1 \dots z_{k-1}\beta$ și $\beta z_{k+1} \dots \gamma$ au lungimile l_1 și l_2, avem $l \leqslant l_1 + l_2$. De aici rezultă că lungimile l sînt mărginite — deci C este rectificabilă — și are lungimea

$$s < s_1 + s_2. \tag{2}$$

Pe de altă parte, prin definiția lui s_1 și s_2 există diviziuni ale intervalelor $[\alpha, \beta]$ și $[\beta, \gamma]$, la care corespund poligonale de lungimi $l_1 > s_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ și $l_2 > s_2 - \frac{\varepsilon}{2}$, ($\varepsilon > 0$ arbitrar). Aceste două linii poligonale constituie împreună o linie poligonală înscrisă în C, de lungime $l > s_1 + s_2 - \varepsilon$. Acest rezultat, împreună cu (2), arată că $s = s_1 + s_2$.

Teorema 7. *Pentru ca un drum $z = x(t) + \mathrm{i}\, y(t)$ ($a \leqslant t \leqslant b$) să fie rectificabil, este necesar și suficient ca funcțiile $x(t)$ și $y(t)$ să aibă variație mărginită în $[a, b]$ (Jordan).*

O funcție $f(t)$ are *variație mărginită* în $[a, b]$ dacă suma variațiilor absolute $|\Delta_k f|$, relative la o diviziune oarecare a intervalului, este mărginită.

Într-adevăr, avem:

$$\left.\begin{matrix} |\Delta_k x| \\ |\Delta_k y| \end{matrix}\right\} \leqslant |\Delta_k z| \leqslant |\Delta_k x| + |\Delta_k y|,$$

de unde

$$\left.\begin{matrix} \Sigma\, |\Delta_k x| \\ \Sigma\, |\Delta_k y| \end{matrix}\right\} \leqslant 1 \leqslant \Sigma\, |\Delta_k x| + \Sigma\, |\Delta_k y|.$$

De aici se vede că, dacă drumul este rectificabil, $\Sigma|\Delta_k x|$ și $\Sigma|\Delta_k y|$ sînt mărginite, adică $x(t)$ și $y(t)$ sînt funcții cu variație mărginită; și reciproc.

Teorema 8. *(Jordan). Dacă o funcție $f(t)$ are variație mărginită, ea este egală cu diferența a două funcții mărginite și crescătoare. Dacă $f(t)$ este și continuă, aceste funcții se pot lua continue.*

$f(t)$ fiind o funcție cu variație mărginită, în $[a, b]$, să notăm cu v suma variațiilor absolute, $v = \Sigma|\Delta_k f|$, cu p și $-n$ suma variațiilor $\Delta_k f$ pozitive, respectiv negative. Avem

$$v = p + n, \quad f(b) - f(a) = p - n,$$

de unde

$$v = 2p + f(a) - f(b), \quad v = 2n - f(a) + f(b).$$

Fie apoi V, P, N marginile superioare ale lui v, p, n. Evident,

$$V = 2P + f(a) - f(b), \quad V = 2N - f(a) + f(b). \tag{3}$$

Pentru un interval $[a, t] \subset [a, b]$ avem funcțiile $V(t)$, $P(t)$, $N(t)$ legate prin relațiile precedente cu t în loc de b și evident nedescrescătoare și mărginite. Se vede astfel că funcția cu variație mărginită $f(t)$ poate fi exprimată ca diferență a două funcții nedescrescătoare și mărginite:

$$f(t) = [C + f(a) + P(t)] - [C + N(t)], \tag{4}$$

C constantă arbitrară.

Să presupunem acum că $f(t)$ este și continuă. Vom arăta că $V(t)$ este continuă. Fie dat $\varepsilon > 0$. Există $\delta > 0$ așa fel ca

$$|f(t) - f(t')| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

pentru $|t - t'| < \delta$. Pe de altă parte, prin definiția lui $V(t)$, există diviziuni ale intervalului $[a, t]$, pentru care $v(t) > V(t) - \frac{\varepsilon}{2}$.

Dacă introducem noi valori de subdiviziune în ultimul interval, este clar că $v(t)$ nu poate descreşte. Deci putem presupune că punctul de subdiviziune t' care precede pe t satisface condiția (5).

Considerăm suma celorlalte variații absolute ce intră în $v(t)$

$$v(t') = v(t) - |f(t) - f(t')|.$$

Cum acestea se referă la intervalul $[a, t']$, avem

$$V(t') \geqslant v(t') > v(t) - \varepsilon,$$

sau (deoarece $V(t)$ este nedescrescătoare)

$$|V(t) - V(t')| < \varepsilon \text{ pentru } |t - t'| < \delta.$$

(Dacă $t < t'$ vom schimba valorile lui t și t'). Așadar, $V(t)$ este o funcție continuă. Din (3) urmează că $P(t)$ și $N(t)$ sînt de asemenea continue, și (4) arată că $f(t)$ este diferență a două funcții continue și nedescrescătoare.

În sfîrșit, dacă la aceste două funcții adăugăm o aceeași funcție crescătoare și continuă, vom obține două funcții crescătoare și continue avînd diferența $f(t)$.

Lemă. *Dacă C este o curbă continuă şi mărginită, pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$, astfel că $|\Delta t| < \delta$ în $[a, b]$ atrage $|\Delta z| < \varepsilon$ ($|\Delta z|$ este coarda corespunzătoare subintervalului Δt).*

Rezultă din continuitatea uniformă a funcţiilor $x(t)$, $y(t)$ în $[a, b]$.

Teorema 9. *Dacă C este continuă şi rectificabilă de lungime s, pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta > 0$, astfel că la orice δ-lanţ (1) din $[a, b]$ (adică cu $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} < \delta$, pentru $i = 1, \ldots, n$) corespunde o linie poligonală L de lungime $l > s - \varepsilon$.*

Deoarece $s(C) = s$, există o linie poligonală L_0 înscrisă în C, de lungime $l_0 > s - \frac{\varepsilon}{2}$. Conform lemei, o linie poligonală L înscrisă în C va avea laturile $< \varepsilon'$ (număr ce vom determina ulterior), dacă corespunde unui δ-lanţ, (δ un număr corespunzător lui ε'). Să presupunem că între vîrfurile z_{i-1}, z_i ale lui L_0 avem vîrfurile $z_h, \ldots, z_k$ ale lui L.

$$|z_h - z_{i-1}| + |z_{h+1} - z_h| + \ldots + |z_k - z_{k-1}| + |z_i - z_k| \geqslant |z_i - z_{i-1}|,$$

$$|z_h - z_{i-1}| < \varepsilon', \quad |z_i - z_k| < \varepsilon'$$

(căci $t_h - t_{i-1} \leqslant t_h - t_{h-1} < \delta$ etc.). Deci,

$$|z_{h+1} - z_h| + \ldots + |z_k - z_{k-1}| \geqslant |z_i - z_{i-1}| - 2\varepsilon',$$

şi sumînd la toate laturile lui L_0, în număr de n_0:

$$l \geqslant l_0 - 2n_0\varepsilon' > s - \frac{\varepsilon}{2} - 2n_0\varepsilon'.$$

Luînd $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{4n_0}$ vom avea $l > s - \varepsilon$ pentru toate lanţurile din $[a, b]$.

Corolar. *Dacă C este continuă şi de lungime $s(< +\infty)$, la un şir de δ_m-lanţuri s_m cu $\delta_m \to 0$ corespunde un şir de linii frînte înscrise de lungime $l_m \to s$.*

Teorema 10. *Pe un drum rectificabil $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, lungimea s a subdrumului corespunzător subintervalului $[a, t]$ este un parametru normal.*

Avem de demonstrat că $s = s(t)$ este o funcţie crescătoare şi continuă. Prima afirmaţie rezultă imediat din teorema 6.

Pentru a demonstra afirmaţia a doua, vom folosi teorema lui Jordan. Avem deci pentru drumul nostru:

$$x(t) = x_1(t) - x_2(t), \quad y(t) = y_1(t) - y_2(t),$$

funcţiile din membrul al doilea fiind continue şi nedescrescătoare. La un subinterval de lungime Δt corespund

$$\Delta x = \Delta x_1 - \Delta x_2, \quad \Delta y = \Delta y_1 - \Delta y_2,$$

şi avem

$$|\Delta x| \leqslant \Delta x_1 + \Delta x_2, \quad |\Delta y| \leqslant \Delta y_1 + \Delta y_2.$$

Să considerăm o diviziune a intervalului precedent, la care corespunde o linie poligonală de lungime Δl, înscrisă în subdrumul corespunzător intervalului. Aplicînd inegalităţile precedente, avem:

$$\Delta l \leqslant \sum |\Delta_k x| + \sum |\Delta_k y| \leqslant \sum \Delta_k x_1 + \sum \Delta_k x_2 + \\ + \sum \Delta_k y_1 + \sum \Delta_k y_2,$$

sau

$$\Delta l \leqslant \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta y_1 + \Delta y_2$$

(căci $\sum \Delta_k x_1 = \Delta x_1$ etc.). În virtutea continuității, fiind dat $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel că $\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta y_1, \Delta y_2 < \frac{\varepsilon}{4}$ cînd $\Delta t < \delta$. Vom avea deci $\Delta l \leqslant \varepsilon$ și

$$\Delta s = \sup (\Delta l) \leqslant \varepsilon \text{ pentru } \Delta t < \delta.$$

Aceasta înseamnă că funcția $s(t)$ este continuă.

Corolarul 1. *$s(t)$ fiind crescătoare și continuă, există o funcție inversă $t = t(s)$ (uniformă), crescătoare și continuă (C curbă continuă rectificabilă),*

Corolarul 2. *Dacă C este o curbă continuă rectificabilă, la orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel că $|\Delta s| < \delta$ atrage $|\Delta z| < \varepsilon$. Cu alte cuvinte $z = z(s)$ este continuă în $[0, s]$.*

Căci $z = z(t(s))$. De altfel se vede și direct că $|\Delta s| < \varepsilon$ atrage $|\Delta t| < \varepsilon$ (teorema 3) (putem deci lua $\delta < \varepsilon$). De aici urmează teorema în cazul cînd t este în corespondență biunivocă cu curba.

Teorema 11. *Dacă C este continuă, simplă și rectificabilă (curbă Jordan rectificabilă), pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\eta > 0$, astfel că orice linie poligonală L înscrisă de laturi $< \eta$ are lungimea $l > s - \varepsilon$ ($s = s(C)$).*

Corespondența $t \to z$ fiind homeomorfă, pentru orice $\delta > 0$ există $\eta > 0$, astfel că $|\Delta z| < \eta$ atrage $|\Delta t| < \delta$. Teorema rezultă acum din teorema 9.

Corolar. *Dacă C este o curbă Jordan de lungime s ($< +\infty$) și L_m un șir de linii frînte înscrise de laturi $< \eta_m$, unde $\eta_m \to 0$, atunci $s = \lim l_m$ (l_m fiind lungimea lui L_m).*

Observație. Pe o curbă C simplă și continuă (curbă Jordan) orientările sînt definite intrinsec (invariante la homeomorfii) (vezi 1 *g*, *i*) și o linie frîntă înscrisă, $\alpha = z_0 z_1 \ldots z_n = \beta$ se poate defini de asemnea intrinsec, ca formată din vîrfuri ce se succed în același sens.

Teorema 12. *Pe o curbă Jordan rectificabilă, arcul $s = s(\overset{\frown}{\alpha z})$ este funcție continuă de punctul z al curbei și viceversa.*

Într-adevăr s este funcție continuă de t (teorema 10) și t este funcție continuă de punctul z pe C, fiindcă corespondența $z \to t$ este continuă.

Corolar. *C fiind o curbă Jordan rectificabilă, pentru orice $\varepsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel că $|\Delta z| < \delta$ să atragă $|\Delta s| < \varepsilon$, sau $\Delta t < \varepsilon$.*

Se poate demonstra (Lebesgue) că o funcție cu variația mărginită admite derivată aproape peste tot. Prin urmare, un drum rectificabil are tangentă aproape peste tot.

Teorema 13. *Un drum rectificabil formează o mulțime de puncte de măsură Lebesgue nulă.*

Într-adevăr, luînd pe s ca parametru normal, să împărțim intervalul de variație $(0, \sigma)$ al acestui parametru, în n subintervale egale. Subdrumurile corespunzătoare avînd lungimea $\frac{\sigma}{n}$, pot fi acoperite cu discuri de rază $\frac{\sigma}{n}$.

Aria totală a acestor discuri, care acoperă drumul, este $\frac{\pi\sigma^2}{n}$ și poate fi oricît de mică.

Consecință. Mulțimea de puncte ale unui drum rectificabil nu este nicăeri densă, și deci nu are puncte interioare. (Căci o mulțime densă într-un domeniu are măsura Lebesgue >0).

Lemă. *O funcție $x(t)$ în $[a, b]$ care are derivată mărginită, are variație mărginită.*

Într-adevăr, teorema mediei se aplică în orice subinterval, $x(t)$ fiind finită, continuă și derivabilă (căci $x'(t)$ este finit):

$$\Delta_i x = x'(\theta_i)\Delta_i t, \quad t_{i-1} < \theta_1 < t_i.$$

Deci

$$\Sigma\,|\Delta_i x| \leqslant \Sigma\,|x'(\theta_i)|\Delta_i t \leqslant M(b-a),$$

$M = \sup |x'(t)|$.

Teorema 14. *O curbă $z = x(t) + y(t)$, unde $x(t)$ și $y(t)$ au derivate mărginite, (pe scurt: z' există și e mărginit) este continuă și rectificabilă. Avem*

$$s \leqslant \int_a^b |z'|\,dt. \tag{6}$$

Prima afirmație rezultă din teorema 7 și lema precedentă.

Fie

$$|\Delta_i z| = |z(t_i) - z(t_{i-1})| = \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.$$

Să notăm pentru moment $t_i = t$ și $\varphi(t) = |z(t) - z(t_{i-1})|$. Atunci $\varphi(t_{i-1}) = 0$ și deci, în virtutea teoremei creșterilor finite, aplicate funcției $\varphi(t)$ în intervalul $[t_{i-1}, t_i]$ avem

$$|\Delta_i z| = \Delta\varphi(t) = \varphi(t) - \varphi(t_{i-1}) = \varphi'(t')\Delta t =$$

$$= \frac{[x(t') - x(t_{i-1})]x'(t') + [y(t') - y(t_{i-1})]y'(t')}{\sqrt{[x(t') - x(t_{i-1})]^2 + [y(t') - y(t_{i-1})]^2}}\,\Delta t =$$

$$= [x'(t')\sin\theta + y'(t')\cos\theta]\Delta t,$$

unde $t_{i-1} < t' < t_i$ și

$$\sin\theta = \frac{x(t') - x(t_{i-1})}{\sqrt{[x(t') - x(t_{i-1})]^2 + [y(t') - y(t_{i-1})]^2}},$$

$$\cos\theta = \frac{y(t') - y(t_{i-1})}{\sqrt{[x(t') - x(t_{i-1})]^2 + [y(t') - y(t_{i-1})]^2}},$$

așa că

$$|\Delta_i z| = \varphi'(t')\Delta t = [x'(t')\sin\theta + y'(t')\cos\theta]\Delta t \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}\,\sqrt{x'(t')^2 + y'(t')^2}\,\Delta t \leqslant \sqrt{x'(t')^2 + y'(t')^2}\,\Delta t,$$

şi notînd cu M_i marginea superioară a funcţiei

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |z'(t)|$$

în intervalul $[t_{i-1}, t_i]$ rezultă

$$|\Delta_i z| \leqslant M_i \Delta_i t,$$

şi sumînd după i:

$$l \leqslant \sum M_i \Delta_i t.$$

(6) se obţine luînd un şir de δ_m-lanţuri cu $\delta_m \to 0$ şi trecînd la limită.

Teorema 15. *O curbă $z = x(t) + iy(t)$, cu $x'(t)$, $y'(t)$ mărginite şi continue, este continuă şi are lungimea de arc dată de*

$$s(\overset{\frown}{xz}) = s(t) = \int_a^t |z'|\,dt = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt. \tag{7}$$

Într-adevăr, într-un interval $[t_{i-1}, t_i]$ determinat de punctele t_{i-1}, t_i ale unui δ_m-lanţ, vom avea, în virtutea teoremei creşterilor finite

$$|\Delta_i z| = \sqrt{(\Delta_i x)^2 + (\Delta_i y)^2} = \Delta_i t \sqrt{x'(\theta_i)^2 + y'(\tau_i)^2}, \tag{8}$$

unde

$$t_{i-1} < \theta_i, \tau_i < t_i \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Fie $\{\varepsilon_k\}$, $\varepsilon_k > 0$, un şir care converge la 0. Fiecărui ε_k îi va corespunde cîte un δ_{m_k}-lanţ (pentru un m_k suficient de mare), aşa fel încît oscilaţia lui $\sqrt{x'(\theta)^2 + y'(\tau)^2}$ pentru θ şi τ variind in intervalele $[t_{i-1}, t_i]$ $(i = 1, \ldots, n)$ să fie mai mică decît ε_k, ceea ce este posibil graţie continuităţii lui $z'(t)$. Atunci, notînd cu m_i şi M_i marginea inferioară şi cea superioară a funcţiei $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = |z'(t)|$ şi ţinînd seama de (8),

$$(m_i - \varepsilon_k)\Delta_i t < |\Delta_i z| < (M_i + \varepsilon_k)\Delta_i t$$

şi sumînd după i

$$\sum_i m_i \Delta_i t - \varepsilon_k(b-a) < l_k < \sum M_i \Delta_i t + \varepsilon_k(b-a).$$

Trecînd la limită pentru $k \to \infty$, şi ţinînd seama că $\delta_{m_k}, \varepsilon_k \to 0$, iar $|z'(t)|$ fiind continuă este integrabilă, obţinem tocmai formula (7).

Corolarul 1. *Pentru o curbă regulată $z = z(t)$*

$$\frac{ds}{dt} = |z'| \tag{9}$$

şi în particular $(t = s)$.

Corolarul 2.

$$\left|\frac{dz}{ds}\right| = 1 \quad \textit{sau} \quad ds^2 = dx^2 + dy^2. \tag{10}$$

Teorema 16. *Pe o curbă regulată* $\lim_{\Delta s \to 0} \frac{|\Delta z|}{\Delta s} = 1$ *uniform.*

Este destul să considerăm un arc simplu regulat. Luînd parametrul s, avem (după teorema creşterilor finite)

$$\frac{|\Delta z|}{\Delta s} - 1 = \sqrt{x'(s_1)^2 + y'^2(s_2)} - 1,$$

unde s_1 şi s_2 sînt valori cuprinse în intervalul $[s, s + \Delta s]$. Cum $x'(s)^2$ şi $y'(s)^2$ sînt uniform continue, avem

$$x'(s_1)^2 > x'(s)^2 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad y'(s_2)^2 > y'(s)^2 - \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru $\Delta s < \delta$, şi ţinînd seama de (10) urmează

$$0 \leqslant -\frac{|\Delta z|}{\Delta s} + 1 = \frac{-x'(s_1)^2 - y'(s_2)^2 + 1}{\sqrt{x'(s_1)^2 + y'(s_2)^2 + 1}} < \varepsilon$$

dacă $\Delta s < \delta$.

Dacă $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ *este un arc simplu regulat (de extremităţi* α *şi* β*), există un subarc* $\overset{\frown}{\alpha\gamma}$ *pe care raza vectoare* $\rho = |z - \alpha|$ *poate fi luată ca parametru normal.*

În adevăr, ρ este funcţie continuă de s (lungimea subarcului $\overset{\frown}{\alpha z}$). Avem

$$\frac{d\rho}{ds} = \frac{(x - \alpha_1)x' + (y - \alpha_2)y'}{\rho},$$

unde $\alpha = \alpha_1 + i\alpha_2$ şi $x'(s)$, $y'(s)$ sînt funcţii continue pentru $s = 0$. Pe de altă parte

$$\frac{\Delta x}{\rho} = \frac{\Delta x}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta z} \to x'(0) \text{ şi } \frac{\Delta y}{\rho} \to y'(0)$$

cînd $\Delta s = s \to 0$, unde

$$\Delta x = x - \alpha_1, \quad \Delta y = y - \alpha_2.$$

Deci, în virtutea corolarului 2 al teoremei 15,

$$\lim_{s \to 0} \frac{d\rho}{ds} = x'(0)^2 + y'(0)^2 = 1.$$

Rezultă că într-un interval $[0, s_0]$ destul de mic avem $\frac{d\rho}{ds} > 0$, şi prin urmare, $\rho(s)$ fiind o funcţie continuă şi crescătoare, cu derivată continuă, finită şi $\neq 0$, ρ poate fi luat ca parametru normal pe subarcul corespunzător intervalului $[0, s_0]$.

Consecinţă. Dacă un arc infinit $\overset{\frown}{\alpha\infty}$ *este regulat (inclusiv punctul* ∞*), există un subarc infinit al său* $\overset{\frown}{\gamma\infty}$ *pe care raza vectoare* $\rho = |z|$ *este un parametru normal (deci* ρ *funcţie crescătoare şi cu derivată continuă de* s*).*

Aceasta rezultă din faptul că prin transformarea $z^* = \frac{1}{z}$, arcul dat se transformă într-un arc regulat $\widehat{\alpha^* O}$ și luînd s^* egal cu lungimea subarcului $\widehat{Oz^*}$, avem în puncte corespunzătoare

$$\rho\rho^* = 1, \quad ds = |dz|, \quad ds^* = -|dz^*|,$$

de unde

$$ds^* = -\frac{ds}{\rho^2}, \quad d\rho^* = -\frac{d\rho}{\rho^2}, \quad \frac{d\rho}{ds} = \frac{d\rho^*}{ds^*}.$$

Această formulă ne permite să transportăm rezultatul precedent de la arcul $\widehat{\alpha^* O}$ la arcul $\widehat{\alpha\infty}$.

Teorema 17. *O transformare continuă într-un domeniu D*

$$u = u(x, y), \quad v = (x, y),$$

definită de funcții cu derivate parțiale mărginite în D, duce un drum rectificabil $C \subset D$ *într-un drum rectificabil.*

Fie $z = x(t) + i\,y(t)$ ecuația drumului C $(a \leqslant t \leqslant b)$ și δ distanța mulțimii C la fr D $(\delta > 0)$. Deoarece $x(t)$ și $y(t)$ sînt continue în $[a, b]$ există $\eta > 0$ astfel ca $|\Delta z| < \delta$ pentru $|\Delta t < \eta$. Liniile poligonale înscrise vor rămîne în D dacă diviziunile intervalului $[a, b]$ satisfac condițiile $|\Delta_k t_k| < \eta$.

Fie acum M un număr fix, mai mare decît valorile absolute ale derivatelor parțiale ale lui $u(x, x)$ și $v(x, y)$ în D. Avem pe C, aplicînd teorema creșterilor finite:

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y) +$$

$$+ u(x, y + \Delta y) - u(x, y) =$$

$$= u_x\,(x + \theta\Delta x, y + \Delta y)\,\Delta x + u_y(x, y + \theta_1\Delta y)\,\Delta y,$$

unde θ și θ_1 sînt cuprinși între 0 și 1. Deci:

$$\Sigma\,|\Delta_k u| < M(\Sigma\,|\Delta_k x| + \Sigma\,|\Delta_k y|).$$

Drumul C fiind rectificabil, $\Sigma\,|\Delta_k u|$ și la fel $\Sigma\,|\Delta_k v|$ sînt mărginite. Acestea sînt sume de variații absolute, relative la funcțiile $u(t) = u(x(t), y(t))$ și $v(t) = v(x(t), y(t))$ care reprezintă transformatul drumului C; ele se referă numai la diviziuni ale intervalului $[a, b]$ cu $|\Delta_k t| < \eta$, dar aceasta este destul pentru a conchide că funcțiile $u(t)$ și $v(t)$ au variație mărginită. Deoarece dacă într-o diviziune avem intervale de lungime $\geqslant \eta$, subdivizînd aceste intervale prin introducerea unor valori intermediare, obținem sume de variații absolute cel puțin egale cu cele corespunzătoare diviziunii considerate.

Așadar, drumul transformat (dacă nu se reduce la un punct) este rectificabil.

Observație. Teorema precedentă se aplică în cazul unei transformări regulate, caz în care $u(x, y)$ și $v(x, y)$ au derivate parțiale continue; pentru a o aplica se va considera un domeniu închis $\bar{\Delta}$ conținut în D și conținînd drumul C; în acest domeniu, derivatele vor fi mărginite.

Exemple. 11. *Pentru curba* $y = y(x)$ *cu* $\frac{dy}{dx}$ *integrabil și, în particular, mărginit și continuu*

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Dacă în x, $\frac{dy}{dx} \to \pm\infty$, *trebuie ca integrala să fie convergentă.*

12. *Arcul de curbă*

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leqslant a, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

nu este rectificabil.

Aceste ecuații reprezintă o curbă — imagine topologică a segmentului $0 \leqslant x \leqslant a$ (corespondența $x \to z$ este evident biunivocă și continuă, chiar și în 0, unde $\lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0 = y(0)$). Curba face o infinitate de oscilații în vecinătatea originii; ea taie axa reală în punctele $\alpha_{2k} = \frac{2}{2k\pi}$ și e tangentă alternativ dreptelor $y = \pm x$ în punctele $\alpha_{2k+1} = \frac{2}{(2k+1)\pi}(1+(-1)^k i)$, unde $y' = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ ia valorile $(-1)^k = \pm 1$ (vezi fig. 65).

Spre a arăta că arcul dat nu este rectificabil, considerăm linia poligonală înscrisă $\alpha\alpha_{2m}\alpha_{2m+1} \ldots \alpha_{2n+2} \ldots 0$, de lungime l. Suma laturilor $\overline{\alpha_{2k}\alpha_{2k+1}} + \overline{\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2}}$ este $>$ dublul ordonatei lui α_{2k+1} în valoare absolută:

$$\overline{\alpha_{2k}\alpha_{2k+1}} + \overline{\alpha_{2k+1}\alpha_{2k+2}} > \frac{4}{(2k+1)\pi}.$$

Deci:

$$l > \sum_m^\infty \frac{4}{(2k+1)\pi}.$$

Cum $\sum_m^n \frac{1}{2k+1}$ este divergentă $\left(\text{căci } \frac{1}{2k+1} > \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{k+1} \text{ și seria armonică } \frac{1}{k+1} \text{ este divergentă}\right)$, urmează că în arcul dat putem înscrie linii poligonale de lungime oricît de mare; deci arcul nu este rectificabil. Însă orice arc $0 < a \leqslant x \leqslant b$ al aceleiași curbe care nu conține punctul 0 este rectificabil, pentru că pe un asemenea arc $y(x)$ are derivată finită.

Se poate însă observa că funcția $y(x)$ nu are variație mărginită în $[0, a]$ pentru că $\sum \Delta_k y$ formată pentru o subdiviziune $a, \frac{2}{2m\pi}, \frac{2}{(2m+1)\pi}, \ldots, \frac{2}{(2n+2)\pi}, 0$ este $> \sum_m^n \frac{4}{(2k+1)\pi}$ și deci poate fi făcută oricît de mare.

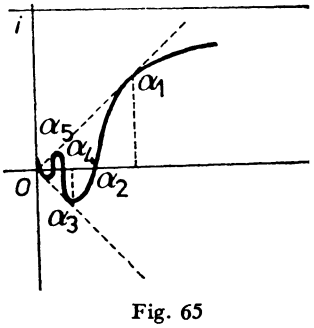

Fig. 65

13. *Arcul de curbă*

$$y = \begin{cases} x^r \sin \frac{1}{x} & 0 < x \leqslant a \\ 0 & x = 0 \end{cases} \qquad r > 1$$

este rectificabil. Lungimea lui este exprimabilă ca o integrală.

$y(x)$ are derivată finită de-a lungul arcului: Pentru $x \neq 0$, $y' = r\,x^{r-1} \sin \frac{1}{x} - x^{r-2} \cos \frac{1}{x}$, iar în $x = 0$ avem

$$y'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{y}{x} = \lim_{x \to 0} x^{r-1} \sin \frac{1}{x} = 0, \quad r > 1$$

$\left(\text{căci } \sin \frac{1}{x} \text{ este mărginit}\right)$. Deci arcul este rectificabil.

Deoarece $y'(x)$ este continuă pe arc (în $x = 0$ pentru că $y'(x) \to 0 = y'(0)$), se poate scrie

$$s = \int_0^a \sqrt{1 + y'^2}\, dx.$$

14. *Ecuația*

$$z = \begin{cases} t + it \sin \frac{\pi}{t} & (0 < t \leqslant 1), \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

reprezintă un arc simplu, care nu este rectificabil.

Pentru a dovedi aceasta, considerăm linia poligonală corespunzătoare valorilor $t_{2k} = \frac{1}{k}$, $t_{2k+1} = \frac{2}{2k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. În triunghiul $z_{2k+2} z_{2k+1} z_{2k}$ suma laturilor $\overline{z_{2k} z_{2k+1}}$ și $\overline{z_{2k+1} z_{2k+2}}$ este mai mare decît înălțimea, deci lungimea liniei poligonale este $l_n > \sum_1^n \frac{2}{2k+1} > \sum_1^n \frac{2}{2k+2}$. Deci $l_n \to \infty$.

15. *Arcul*

$$z = \begin{cases} t + it^2 \sin \frac{\pi}{t} & (0 < t \leqslant 1), \\ 0 & t = 0 \end{cases}$$

este rectificabil pentru că este regulat.

16. *Fiind dat arcul de curbă mărginit* $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ *și un punct oarecare* z *al său, dacă arcul* $\overset{\frown}{\alpha z}$ *este rectificabil și are lungimea* s *mărginită,* $(s < M$ *fix*$)$, *atunci* $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ *este rectificabil și lungimea sa este egală cu* $\sup s = \lim_{z \to \beta} s = \sigma$.

Cum s crește în sensul $\alpha \to \beta$, și este o funcție mărginită de z (sau de un parametru topologic al arcului $\overset{\frown}{\alpha\beta}$), există $\lim_{z \to \beta} s = \sigma$ și este egală cu $\sup s$. Fiind dat $\varepsilon > 0$, orice linie poligonală înscrisă în $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ are un vîrf z în vecinătatea de rază ε a lui β, sau poate fi înlocuită cu alta mai lungă, prin inserarea unui vîrf z în acea vecinătate. Cum o linie poligonală înscrisă în $\overset{\frown}{\alpha z}$ are lungimea $s < \sigma$, urmează că orice linie poligonală înscrisă în $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ are lungimea $l < \sigma + \varepsilon$, deci (ε fiind arbitrar), $l \leqslant \sigma$. Pe de altă parte, există linii poligonale înscrise în $\overset{\frown}{\alpha\beta}$, de lungime $l > \sigma - \varepsilon$. Căci, există un punct z al arcului $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ pentru care $s > \sigma - \varepsilon/2$ (pentru că $\sigma = \sup s$) și o linie, poligonală înscrisă în $\overset{\frown}{\alpha z}$ de lungime $l' > s - \varepsilon/2$ (pentru că $s = \sup l$); deci completînd-o cu latura $\overline{z\beta}$ vom avea o linie poligonală înscrisă în $\overset{\frown}{\alpha\beta}$, de lungime $l > s - \varepsilon/2 > \sigma - \varepsilon$. Acestea dovedesc că lungimea arcului $\overset{\frown}{\alpha\beta}$ este σ.

17. *Fie arcul de curbă* $\widehat{\alpha\beta}$, *cu ecuația parametrică* $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ *și* $z'(t)$ *finit și continuu în* $[a, b)$. *Arcul* $\widehat{\alpha\beta}$ *este rectificabil și are lungimea*

$$\sigma = \int_a^b \sqrt{|z'|^2}\, dt.$$

Într-adevăr, z fiind un punct al arcului $\widehat{\alpha\beta}$, atunci în virtutea teoremelor 14 și 15, arcul $\widehat{\alpha z}$ este rectificabil și are lungimea $s = \int_a^t \sqrt{|z'|^2}\, dt$, s este mărginit și are o limită $= \lim_{t \to b} s$, este (prin definiție) tocmai acea integrală (improprie cînd z' nu este mărginit în b sau cînd $b = +\infty$); această limită este lungimea lui $\widehat{\alpha\beta}$ (exemplul 16).

18. *Să se calculeze arcul de parabolă* $y = 2\sqrt{1 - x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

Arcul este rectificabil, cum se vede scriind ecuația lui sub forma $x = 1 - \frac{y^2}{4}$ $(0 \leqslant y \leqslant 2)$, $(x'(y)$ este finit și continuu în acest interval. Avem deci dreptul să scriem (exemplul 16).

$$\sigma = \int_0^1 \sqrt{\frac{2 - x}{1 - x}}\, dx$$

(integrala improprie există). Punînd $2 - x = t^2(1 - x)$, $x = \frac{t^2 - 2}{t^2 - 1}$, $dx = \frac{2t\,dt}{(t^2 - 1)^2}$, avem

$$\sigma = \int_{\sqrt{2}}^{+\infty} \frac{2t^2\, dt}{(t^2 - 1)^2} = -\frac{t}{t^2 - 1}\Big|_{\sqrt{2}}^{+\infty} + \int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2 - 1} =$$

$$= \sqrt{2} - \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1}.$$

19. *În coordonate polare* ρ, θ, *lungimea unui arc de curbă (rectificabil) este dată de*

$$s = \int_a^b \sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}\, dt$$

dacă $\rho = \rho(t)$ *și* $\theta = \theta(t)$ *au derivate finite și continue în* $[a, b]$, *sau chiar numai în* (a, b).

Într-adevăr:

$$z = \rho(\cos\theta + i \sin\theta).$$

$$z' = \rho' \cos\theta - \rho\theta' \sin\theta + i(\rho' \sin\theta + \rho\theta' \cos\theta),$$

de unde

$$|z'|^2 = \rho'^2 + \rho^2\theta'^2.$$

La extremități se va aplica, dacă este cazul, exemplul 17.

20. *Arcul de spirală logaritmică* $\rho = C\, e^{-a\theta}$, $a > 0$, $\theta \geqslant 0$, *plus punctul* O $(\rho = 0, \theta \to +\infty)$, *este rectificabil; să se afle lungimea sa.*

$$\sigma = \int_0^{+\infty} \sqrt{C^2a^2e^{-2a\theta} + C^2e^{-2a\theta}}\, d\theta =$$

$$= C\sqrt{a^2 + 1} \int_0^{+\infty} e^{-a\theta} d\theta = C\frac{\sqrt{a^2 + 1}}{a}.$$

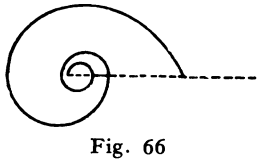

Fig. 66

(S-a aplicat exemplul 17) (Vezi fig. 66).

8. *Rotația unui drum față de un punct.* a) Fie C un drum mărginit, de extremități α, β și de ecuație $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$, t parametru normal; fie ζ un punct ce nu se află pe C.

Teorema 18. *Există o funcție unică,* $\theta(t, \zeta)$ *continuă în* (a, b), *egală cu o determinare a lui* $arg(z(t) - \zeta)$, *și egală în* $t = a$ *cu o determinare dată a lui* $arg(\alpha - \zeta)$. *Ea este continuă și ca funcție de* ζ *în orice domeniu disjunct de* C.

1°. *Unicitatea.* Dacă $\theta(t, \zeta)$ și $\theta_1(t, \zeta)$ sînt două asemenea funcții, $\theta_1(t, \zeta) - \theta(t, \zeta)$ este o funcție continuă și egală pentru fiecare t cu un $2k\pi$; din cauza continuității, k trebuie să fie constant, dar în $t = a$ avem $k = 0$, deci $\theta_1(t, \zeta) = \theta(t, \zeta)$.

2°. *Existența.* Vom construi funcția $\theta(t, \zeta)$ astfel: Fie $\delta = \rho(C, \zeta) > 0$ și $0 < \rho < \delta$. Din cauza continuității uniforme, există un $\sigma > 0$ așa fel ca $|t - t'| < \sigma$ și atrage $|z(t) - z(t')| < \rho$. Prin urmare, subdrumul C' corespunzător intervalului $[t', t'']$ de lungime $< \sigma$ este conținut în cercul Γ' de centru $z(t')$ și rază ρ. Cum acest cerc nu conține punctul ζ, arg $(z - \zeta)$ are în el determinări uniforme și continue ca funcții de z; una din aceste determinări va fi luată ca funție $\theta(t, \zeta)$ în intervalul $[t', t'']$ și va fi definită prin valoarea ei în $t = t'$. După aceasta vom împărți intervalul $[a, b]$ în subintervale de lungime $< \sigma$, prin punctele a, a_1, ..., a_n, b. Vom defini în modul arătat funcția $\theta(t, \zeta)$ în $[a, a_1]$ prin valoare inițială dată a lui arg $(\alpha - \zeta)$, apoi în $[a_1, a_2]$ prin valoarea deja definită pentru $arg(\alpha_1 - \zeta)$, unde $\alpha_1 = z(a_1)$ și așa mai departe. Astfel, $\theta(t, \zeta)$ este definită în $[a, b]$ și satisface condițiile cerute.

3°. Să presupunem că punctul ζ descrie un cerc V_{ζ_0} de rază r_0, disjunct de C; deci $r_0 < \delta_0 = \rho(C, \zeta_0)$. Cercul Γ' de mai sus va fi disjunct de V_{ζ_0} dacă raza sa este $\rho \leqslant \delta_0 - r_0$. Este evident că, pentru $z \in \Gamma'$ și $\zeta \in V_{\zeta_0}$, determinările lui arg $(z - \zeta)$ sînt separate și fiecare este definită prin valoarea inițială arg $(z(t') - \zeta_0)$, corespunzătoare centrelor celor două cercuri. Mai întîi este fixată prin valoarea inițială, determinarea lui arg $(z - \zeta_0)$, care va diferi de această valoare cu mai puțin de $\frac{\pi}{2}$, apoi, ținînd z fix, va fi fixată determinarea lui arg $(z - \zeta)$ în V_{ζ_0}, care va diferi cu mai puțin de $\frac{\pi}{2}$ de valoarea precedentă a lui arg $(z - \zeta_0)$ și deci cu mai puțin de π, de valoarea inițială $arg(z(t') - \zeta_0)$. Cu aceasta arg $(z - \zeta)$ este definit în mod unic. Rămîne să observăm că, pentru z dat în Γ', determinările acestea sînt funcții continue de ζ în V_{ζ_0}; de aici rezultă că funcția $\theta(t, \zeta)$ este continuă în V_{ζ_0} pentru fiecare t în $[a, b]$.

Observație. Se zice că $arg(z - \zeta)$ a fost prelungit din punctul α în punctul β, de-a lungul drumului C.

b) Se numește *rotația drumului orientat* C, față de punctul ζ ce nu-i aparține, variația $arg(z - \zeta)$ de-a lungul acestui drum (obținută prin prelungirea definită mai sus).

Dacă $\theta(t, \zeta)$ este funcția definită mai sus, rotația este

$$(C, \zeta) = \theta(b, \zeta) - \theta(a, \zeta). \tag{11}$$

Rotația (C, ζ) *este independentă de alegerea valorii* $arg(\alpha - \zeta)$: modificînd această valoare cu $2k\pi$, $\theta(t, \zeta)$ va suferi aceeași creștere (din cauza continuității), și diferența precedentă nu se va schimba. De asemenea (C, ζ) este *independentă de alegerea parametrului normal.* Aceasta rezultă din faptul că pentru un nou parametru $t_1 = t_1(t)$ (funcție continuă strict monotonă), $\theta_1(t_1, \zeta) =$

$= \theta(t_1(t), \zeta)$ este o funcție continuă de t, care diferă de $\theta(t, \zeta)$ prin $2k\pi$ și fiind egală cu aceasta în $t = a$, este egală în tot intervalul $[a, b]$.

c) *Rotația depinde de orientarea drumului* C; evident,

$$(C_-, \zeta) = -(C, \zeta). \tag{12}$$

Dacă $C_1, C_2, \ldots$, sînt drumuri consecutive și C suma lor (care e tot un drum), avem:

$$(C, \zeta) = (C_1, \zeta) + \ldots + (C_n, \zeta). \tag{13}$$

Căci $\arg(z - \zeta)$ poate fi prelungit de-a lungul lui C și (13) rezultă imediat din (11).

d) *Rotația* (C, ζ) *este o funcție continuă de* ζ *în orice domeniu disjunct de* C.

Rezultă din (11) și teorema 18 (3°).

e) Pentru un drum deschis $z = z(t)$ $(a \leqslant t < b)$, rotația se definește ca $\lim_{t \to b} (C_t, \zeta)$, unde C_t este subdrumul corespunzător intervalului $[a, t]$ (dacă limita există și este finită). Se vede ușor că această definiție este independentă de alegerea parametrului normal t.

Din (11) rezultă că (C_t, ζ) este o funcție continuă de t în $[a, b)$.

La noțiunea precedentă se poate reduce și aceea a rotației în jurul unui punct ce se află pe drumul simplu dat C. Este destul să presupunem că $\zeta = \beta$. Atunci se va defini (C, β) ca rotația drumului deschis $a \leqslant t < b$, adică drept $\lim_{t \to b} (C_t, \beta)$, dacă această limită există și este finită. Aceasta se întîmplă cînd drumul C are tangentă la stînga în punctul β, adică dreapta βz are limită T cînd $t \to b$. Într-adevăr, există un interval $[b_1, b)$ în care dreapta βz variază într-un unghi de semidrepte $[S_1, S_2)$, conținînd tangenta T. Determinările lui $\arg(z - \beta)$ pot fi separate în intervalul $[b_1, b)$ și aceasta ne dă mijlocul de a defini în tot intervalul $[a, b)$ o funcție $\theta(t, \beta)$ continuă și egală cu o determinare a lui $\arg(z - \beta)$ pentru fiecare t din interval: $\theta(t, \beta)$ va fi construită în $[a, b_1]$ ca la nr. 1, iar în $[b_1, b)$ va fi luată egală cu determinarea lui $\arg(z - \beta)$, egală în $t = b_1$ cu $\theta(b_1, \beta)$. Vom avea

$$(C_t, \beta) = \theta(t, \beta) - \theta(a, \beta).$$

Prin ipoteză $\theta(t, \beta) \to \theta_0$, unde θ_0 este valoarea $\arg(z, \beta)$ pe tangenta T. Deci $(C_t, \beta) \to \theta_0 - \theta(a, \beta)$.

f) În cele de mai sus se poate subsuma și cazul unui drum nemărginit, $\widehat{\alpha\infty}$, de ecuație $z = z(t)$ $(a \leqslant t < b)$ cu $\lim_{t \to b} z(t) = \infty$. Și în acest caz rotația (C, ζ) va fi definită ca rotația drumului deschis corespunzător $\lim_{t \to b} (C_t, \zeta)$.

Se poate observa că ea este egală (dacă există) cu aceea a drumului C^* obținut prin transformarea $z^* - \overline{\zeta} = \dfrac{1}{z - \zeta}$ (inversiune de pol ζ), cum reiese din faptul că $\arg(z - \zeta) = \arg(z^* - \zeta)$. Prin aceasta, drumul dat $\widehat{\alpha\infty}$ se transformă într-un drum $\widehat{\alpha^*\zeta} = C^*$, și avem $(C, \zeta) = (C^*, \zeta)$, deci acest caz se reduce la cazul precedent. Rotația din membrul al doilea există dacă C^* are tangenta în ζ, deci (C, ζ) există dacă drumul dat are direcție asimptotică în raport cu ζ.

g) Cînd C este un drum închis, mărginit și orientat ($\alpha = \beta$) rotația (C, ζ) relativă la un punct ce nu aparține lui C, este un multiplu $2k\pi$; k se numește *ordinul lui ζ față de C*:

$$k = \frac{1}{2\pi}(C, \zeta).$$

Rotația (C, ζ) nu depinde de alegerea punctului inițial: Fie $z = z(t)$ ecuația curbei, $z(t)$ avînd perioada 2π, și $\alpha = z(a)$, $\gamma = z(c)$. Luînd punctul inițial α, rotația e egală cu $(C_1, \zeta) + (C_2, \zeta)$, unde C_1 și C_2 corespund intervalelor $[a, c]$ și $[c, a + 2\pi]$. Luînd punctul inițial γ, rotația e egală cu $(C_2, \zeta) + (C_1', \zeta)$, unde C_1' corespunde intervalului $[a + 2\pi, a + c + 2\pi]$, deci $C_1' = C_1$ din cauza periodicității. Astfel cele două rotații sînt egale.

În fiecare domeniu determinat de drumul închis C, rotația (C, ζ) este constantă și egală cu un $2k\pi$; k se va numi *ordinul* acelui domeniu. Afirmația rezultă din faptul că (C, ζ) este o funcție continuă de ζ în domeniul considerat (teorema 18).

Evident, orice punct exterior unui cerc care conține pe C în interior are ordinul $k = 0$. Prin definiție se va atribui ordinul $k = 0$ și punctului de la ∞. Astfel putem zice că domeniul determinat de C, în care se află ∞, are ordinul 0.

Cînd ζ este un punct al curbei simple închise C, sau mai general, al unei curbe oarecare pentru care ζ este un punct simplu, rotația (C, ζ) există în cazul cînd C are semitangenta la stînga și dreapta lui ζ(ζ este atunci *punct unghiular*). Descompunînd curba în două arce de extremitate ζ și α, vom avea, sumînd rotațiile referitoare la aceste arce:

$$(C, \zeta) = [\theta_1 - \theta(a, \zeta)] + [\theta(a, \zeta) - \theta_2] = \theta_1 - \theta_2$$

argumentele θ_1 și θ_2 (determinate de valoarea inițială $\arg(\zeta - \alpha)$) raportîndu-se la tangentele în ζ. Așadar (C, ζ) diferă cu un multiplu de 2π, în valoare absolută, de unghiul semitangentelor în ζ. În cazul cînd există tangentă, acest unghi este egal cu π și (C, ζ) este de forma $(2k + 1)\pi$.

Exemple

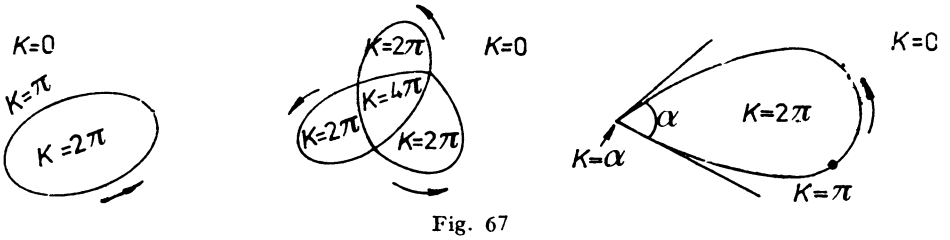

Fig. 67

9. *Ordinul unghiular al unei curbe închise.* Fie C o curbă închisă local simplă, și orientată, $z = z(t)$ cu $z(t)$ funcție continuă de perioada 2π. Există un $\varepsilon > 0$, astfel că în intervalul $[t - \varepsilon, t]$ curba să fie simplă. Fie $\varepsilon(t)$ o funcție continuă pozitivă de perioadă 2π, $\varepsilon(t) < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ și așa fel încît $t - \varepsilon(t)$ să fie crescătoare; cînd t crește cu 2π, $z(t)$ și $z(t - \varepsilon(t)) = z^*$ descriu curba C o dată, în sens pozitiv, iar $\arg(z - z^*)$ adică înclinarea coardei z^*z crește cu $2h\pi$ (h întreg). Întregul h nu depinde de alegerea funcției $\varepsilon(t)$ (în condițiile pre-

cedente). În adevăr, fie funcțiile $\varepsilon_0(t)$ și $\varepsilon_1(t)$ ce satisfac condițiile unde $\varepsilon_0(t) \leqslant \varepsilon_1(t)$. Să considerăm funcția:

$$\varepsilon(t) = \lambda\varepsilon_1(t) + (1 - \lambda)\varepsilon_0(t), \quad (0 \leqslant \lambda \leqslant 1).$$

Cum

$$\varepsilon_0(t) \leqslant \varepsilon(t) \leqslant \varepsilon_1(t),$$

$\varepsilon(t)$ satisface condițiile precedente, $z^*(t)$ fiind format cu acest $\varepsilon(t)$, este o funcție continuă de λ; la fel arg $(z - z^*)$ și creșterea acestuia $2h\pi$. Deci h este constant și în particular are aceeași valoare pentru $\varepsilon_0(t)$ și $\varepsilon_1(t)$ (care corespund la $\lambda = 0$ și $\lambda = 1$).

Numărul h definit mai sus se numește *ordinul unghiular* al curbei C.

În cazul unei curbe închise regulate, $2h\pi$ este rotația suferită de tangentă. Căci luînd $\varepsilon(t) = \varepsilon$ constantă > 0, $2h\pi =$ variația arg $\dfrac{z(t) - z(t - \varepsilon)}{\varepsilon}$; aceasta este independentă de ε și deci $2h\pi =$ variația arg $z'(t)$ (făcînd $\varepsilon \to 0$).

Schimbînd orientarea curbei, se schimbă semnul lui h (cum se vede schimbînd t în $t + \varepsilon$).

Exemple:

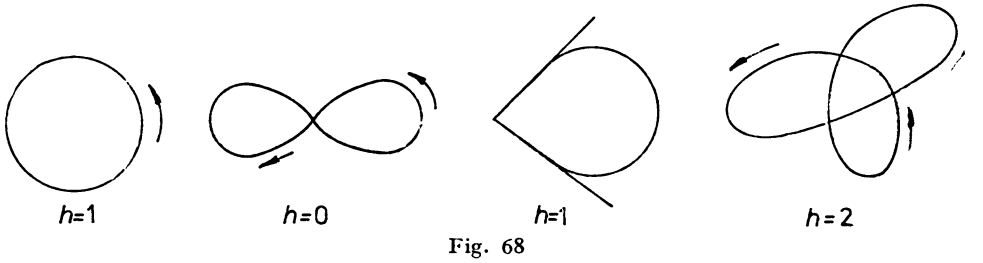

Fig. 68

Lemă. *Dacă o curbă simplă închisă C conține un segment rectiliniu $[\alpha, \beta]$, rotațiile lui C față de cele două domenii determinate de C, diferă prin $\pm 2\pi$.*

Se poate descrie, cu un punct interior segmentului ca centru, un cerc Γ, ce nu intersectează arcul simplu $C - (\alpha, \beta) = C_0$. Cercul Γ este împărțit de dreapta $\alpha\beta$ în două semicercuri deschise, Γ_1 și Γ_2, disjuncte de C, deci conținute respectiv în domenii D_1 și D_2 determinate de C.

Fie a_1 și a_2 puncte situate în semicercurile Γ_1, Γ_2, și simetrice față de $\alpha\beta$. Cum ele se află într-un domeniu disjunct de C_0, avem:

$$(C_0, a_1) = (C_0, a_2).$$

Pe de altă parte

$$(C, a_1) = (C_0, a_1) + (I, a_1)$$
$$(C, a_2) = (C_0, a_2) + (I, a_2) \qquad I = [\alpha, \beta].$$

Urmează

$$(C, a_1) - (C, a_2) = (I, a_1) - (I, a_2) = \pm 2\pi.$$

Teorema 19. *Rotația unei curbe simple închise și mărginite față de domeniul exterior curbei este egală cu 0, iar față de domeniul interior este $\pm 2\pi$.*

1° Prima afirmație este evidentă: C poate fi închisă într-un cerc Γ și dacă a este un punct exterior cercului (și deci curbei C), determinările lui $\arg(z-a)$ se pot separa în Γ.

2° Pentru a demonstra a doua afirmație vom observa că, în cazul cînd C cuprinde un segment rectiliniu, ea rezultă dintr-o lemă precedentă, după care diferența dintre rotațiile relative la domeniul interior și cel exterior este $\pm 2\pi$.

3° În cazul general, împărțim domeniul interior D, printr-o transversală $L = \widehat{ab}$, în două domenii Δ_1 și Δ_2 (vezi teorema Jordan § 65 și teorema 7, § 66). Subarcele C_1 și C_2 vor fi parcurse într-un sens ales pe C, de exemplu primul de la a la b, iar al doilea de la b la a. Atunci pe frontiera B_1 a lui Δ_1, este definit un sens în care L este parcursă de la b la a, iar pe frontiera B_2 a lui Δ_2 un sens în care L este parcursă de la a la b. Avem deci:

$$(C, z) = (C_1, z) + (C_2, z) = (B_1, z) + (B_2, z)$$

(pentru că rotațiile relative la L sînt opuse). Acum, dacă de exemplu $z \in \Delta_1$, avem după 2°, $(B_1, z) = \pm 2\pi$, $(B_2, z) = 0$. Așadar $(C, z) = \pm 2\pi$ pentru orice punct din D.

Definiție. *Se numește sens direct față de interiorul curbei C (sens pozitiv), acela pentru care rotația interiorului este $+2\pi$. Sensul opus se va numi direct față de exteriorul curbei C (sens negativ).*

§ 72. Integrale Stieltjes

Fie $f(t)$, $g(t)$ funcții reale mărginite în $[a, b]$. Considerăm lanțurile

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

și sumele corespunzătoare

$$S = \sum_1^n f(t_i^*)\, \Delta_i g \tag{15}$$

unde $t_{i-1} \leqslant t_i^* \leqslant t_i$ și $\Delta_i g = g(t_i) - g(t_{i-1})$. Dacă există un număr I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$, astfel că

$$|I - S| < \varepsilon$$

pentru toate δ-lanțurile (și oricum s-ar alege valorile intermediare t_i^*), se scrie

$$I = \int_a^b f(t)\, \mathrm{dg}\,(t) \tag{16}$$

și se citește: „integrală Stieltjes de la a la b".

Observația 1. Evident, numărul I (dacă există) este unic: Dacă aceeași proprietate ar mai avea-o și I', fie $\varepsilon = |I - I'|$ și δ, δ' corespunzînd la $\frac{\varepsilon}{2}$ relativ la I și I'; dacă $\delta < \delta'$, ar urma că există sume S corespunzătoare la δ-lanțuri, astfel ca $|I - S| < \frac{\varepsilon}{2}$ și $|I' - S| < \frac{\varepsilon}{2}$: imposibil.

Observația 2. Dacă integrala (16) există,

$$I = \lim S_m, \tag{17}$$

S_m fiind sume (15) corespunzătoare la un șir de δ_m-lanțuri cu $\delta_m \to 0$. Altfel zis, lungimile intervalelor Δt tind uniform la 0.

Aceasta poate servi ca definiție a integralei Stieltjes. Deoarece, dacă numărul I are proprietatea (17) pentru orice șir de δ_m-lanțuri cu $\delta_m \to 0$ și nu ar exista un $\delta > 0$ așa ca $|I - S| < \varepsilon$ pentru δ-lanțuri, ar exista un șir de δ_m-lanțuri cu $\delta_m \to 0$, pentru care $|I - S_m| \geqslant \varepsilon$: și pentru acest șir $\lim S_m$ nu poate fi I. (Demonstrația implică principiul alegerii.)

Observația 3.

$$\int_a^b dg(t) = g(t) - g(a)$$

căci $S = \sum \Delta_i g = g(b) - g(a)$.

Teorema 1. *Avem:*

$$\int_a^c f\, dg = \int_a^b f\, dg + \int_b^c f\, dg \qquad (a < b < c) \tag{18}$$

$$\int_a^b kf\, dg = \int_a^b f d(kg) = k \int_a^b f\, dg \qquad (k = const) \tag{19}$$

$$\int_a^b (f_1 + f_2)\, dg = \int_a^b f_1 dg + \int_a^b f_2\, dg \tag{20}$$

$$\int_a^b f\, d(g_1 + g_2) = \int_a^b f\, dg_1 + \int_a^b f\, dg_2, \quad \int_b^a f\, dg = -\int_a^b f\, dg, \tag{21}$$

unde existența integralei din membrul al doilea atrage pe aceea a integralei din membrul întîi în cazurile (19) — (21), și în (18) dacă g este continuă.

Demonstrația relației (18). Prin ipoteză, I, I_1, I_2 fiind integralele din membrii I, II și S, S_1, S_2 sumele (15) corespunzătoare, pentru un $\varepsilon > 0$ oarecare, există un $\delta > 0$, astfel că

$$|I - S| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_1 - S_1| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_2 - S_2| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pentru toate δ-lanțurile din $[a, c]$, $[a, b]$ respectiv $[b, c]$. Un δ-lanț în $[a, c]$, completat cu punctul b (dacă nu-l are) se descompune într-un δ-lanț în $[a, b]$ și unul în $[b, c]$. Luînd $f(t_i^*) = f(b)$ în intervalul care conține b, se vede că avem $S = S_1 + S_2$, căci

$$g(t_i) - g(t_{i-1}) = (g(t_i) - g(b)) + (g(b) - g(t_{i-1})),$$

dacă $(t_{i-1} < b < t_i)$. Urmează

$$|(I_1 + I_2) - I| \leqslant |I_1 - S_1| + |I_2 - S_2| + |I - S| < \varepsilon$$

pentru orice $\varepsilon > 0$; deci $I = I_1 + I_2$.

(19): I_1 fiind ultima integrală, o sumă relativă la integrala din membrul întîi este $S = k\,S_1$. Avem deci $|kI_1 - S| = |k|\,|I_1 - S_1| < \varepsilon$ pentru δ-lanţurile care fac $|I_1 - S_1| < \varepsilon\,|k|$.

(20): O sumă relativă la integrala din membrul I este de forma $S = S_1 + S_2$, S_1 şi S_2 fiind relative la integralele din membrul al doilea etc. ca la (18).

(21): La fel: $(\Delta_i(g_1 + g_2) = \Delta_i g_1 + \Delta_i g_2)$.

Se defineşte $\int_b^a f\,\mathrm{d}g = -\int_a^b f\,\mathrm{d}g \quad (a < b)$.

Se vede uşor că formulele (19)—(21) au loc fără restricţiile $a < b < c$. Integrala compusă $\int_a^b f_1 \mathrm{d}g_1 + \ldots + f_n\,\mathrm{d}g_n$ se defineşte ca mai sus. Dacă integralele simple $\int f_1\,\mathrm{d}g_1, \ldots, \int f_n\,\mathrm{d}g_n$ există, există şi integrala compusă, nu şi reciproc.

În acord cu (20), (21), avem:

$$\int_a^b f_1\,\mathrm{d}g_1 + f_2\,\mathrm{d}g_2 + \ldots = \int_a^b f_1\,\mathrm{d}g_1 + \int_a^b f_2\,\mathrm{d}g_2 + \ldots$$

cînd integralele din membrul al doilea există.

Observaţia 4. Cînd $g(t) = t$, integrala Stieltjes devine o integrală Riemann.

Teorema 2. $\int_a^b f\,\mathrm{d}g$ *există dacă în* $[a, b]$: 1° $f(t)$ *este continuă sau cu variaţie mărginită şi* 2° $g(t)$ *este continuă şi cu variaţie mărginită.*

După teorema lui Jordan (§ 1, teorema 7) putem presupune (aplicînd formulele (19)—(21)) $f(t)$ continuă sau crescătoare şi $g(t)$ continuă şi crescătoare (şi ambele mărginite). Să punem $\tau = g(t)$. Există funcţia inversă $t = \gamma(\tau)$ uniformă, continuă şi crescătoare în intervalul $[\alpha, \beta]$, unde $\alpha = g(a)$, $\beta = g(b)$. Funcţia $\varphi(\tau) = f(\gamma(\tau))$ va fi mărginită şi continuă, respectiv crescătoare ca şi $f(t)$. Avem

$$S = \Sigma f(t_i^*)\Delta_i g = \Sigma \varphi(\tau_i^*)\Delta_i \tau,$$

unde

$$\Delta_i g = \tau_i - \tau_{i-1} = \Delta_i \tau \text{ şi } \tau_i^* = g(t_i^*), \text{ deci } \tau_{i-1} \leqslant \tau_i^* \leqslant \tau_i.$$

Să considerăm integrala riemanniană $I = \int_\alpha^\beta \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$, care există după cele de mai sus. Avem pentru un $\varepsilon > 0$, un $\eta > 0$, astfel că $|\Delta_i \tau| < \eta$ atrage $|I - S| < \varepsilon$ (prin definiţia lui I). Apoi, $g(t)$ fiind uniform continuă, există un $\delta > 0$, astfel că $|\Delta_i t| < \delta$ atrage $|\Delta_i \tau| < \eta$. Astfel $|I - S| < \varepsilon$ pentru toate δ-lanţurile, ceea ce dovedeşte că integrala Stieltjes există şi

$$\int_a^b f\,\mathrm{d}g = \int_\alpha^\beta \varphi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{22}$$

Observație. Teorema se aplică și atunci cînd $[a, b]$ se descompune într-un număr finit de intervale unde condițiile ei sînt satisfăcute. Astfel, graficele funcțiilor f, g pot fi formate din bucăți monotone în număr finit, continue în cazul lui g. Punctele de racordare ale acestor bucăți pot fi puncte de discontinuitate.

Teorema 3. $\int_a^b f \, \mathrm{d}g$ *există dacă* f *este continuă și există* $g'(t)$ *continuă în* $[a, b]$. *Atunci*

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = \int_a^b f g' \, \mathrm{d}t. \tag{23}$$

Integrala din membrul al doilea există; s-o notăm cu I. Putem scrie (presupunînd $a < b$):

$$\Delta_i g = g'(\theta_i^*)\Delta_i t \qquad t_{i-1} < \theta_i^* < t_i.$$

Să considerăm sumele

$$S = \Sigma f(t_i^*)\Delta_i g, \quad S' = \Sigma f(\theta_i^*)g'(\theta_i^*)\Delta_i t.$$

Prin definiția lui I, pentru un $\varepsilon > 0$ există un $\delta > 0$ astfel ca $\Delta_i t < \delta$ să atragă $|I - S'| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Există un $M > |g'(t)|$ în $[a, b]$, deci $|\Delta_i g| < M\Delta_i t$. Cum $f(t)$ este uniform continuă în $[a, b]$, există un $\delta' > 0$, astfel ca $|\Delta_i t| < \delta'$ să atragă $|\Delta f| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$. În particular $\Delta_i t < \delta'$ va atrage

$$|f(\theta_i^*) - f(t_i^*)| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)}$$

(căci $|\theta_i^* - t_i^*| < \Delta_i t$). Avem deci pentru $\Delta_i t < \delta'$

$$|S' - S| < \frac{\varepsilon}{2M(b-a)} \cdot \Sigma M \Delta_i t = \frac{\varepsilon}{2}$$

de unde

$$|I - S| \leqslant |I - S'| + |S' - S| < \varepsilon$$

pentru $\Delta_i t < \min(\delta, \delta')$, ceea ce stabilește (23).

Observație. Este destul să presupunem despre g că admite derivată g' integrabilă în $[a, b]$:

Integralele Stieltjes improprii cu un număr finit de puncte singulare (unde f sau g nu sînt mărginite, sau a, $b = \pm \infty$) se definesc ca și integralele Riemann improprii, ca limite de integrale proprii. Se vede ușor că formulele (18)—(21) subsistă. De asemenea formulele (22), (23) dacă integralele din membrul al doilea sînt convergente.

Exemple 1. $I = \int_0^2 e^t \, d([t] + (Mt)^2)$, *unde* $[t]$ = *partea întreagă a lui* t, *iar* Mt = *partea sa zecimală.*

Avem, aplicînd teorema 2 (vezi și fig. 69)

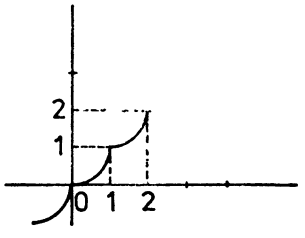

Fig. 69

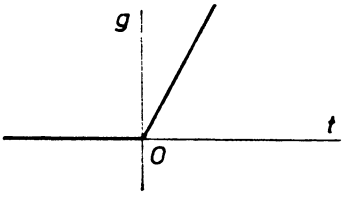

Fig. 70

$$t = \begin{cases} \sqrt{\tau} & \text{în } [0, 1], \\ 1 + \sqrt{\tau - 1} & \text{în } [1, 2], \end{cases}$$

$$I = \int_0^1 e^{\sqrt{\tau}} \, d\tau + \int_2^1 e^{1+\sqrt{\tau-1}} \, d\tau = 2\int_0^1 \alpha e^{\alpha} \, d\alpha + 2\int_0^1 \beta e^{1+\beta} \, d\beta =$$

$$= 2(1 + e) \int_0^1 \alpha e^{\alpha} \, d\alpha = 2(1 + e).$$

2. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, d(t + |t|)$.

Se aplică teorema 3 (vezi și fig. 70).

$$g = \begin{cases} 0 & t \leqslant 0, \\ 2t & t \geqslant 0, \end{cases}$$

$$I = \int_{-\infty}^{0} \frac{\sin t}{t} \, dt + \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, d(2t) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \, dt = \pi.$$

Observații. 1. Formula (18) este adevărată dacă două din cele 3 integrale există, în cazul cînd $g(t)$ este continuă (cazul se prezintă în paragraful următor). Dacă $a < b < c$ avem

$$S'' = S + S' + f(t^*)\,(g(t_i) - g(t_{i-1})) - f(t_{i-1}^*)(g(b) - g(t_{i-1})) -$$

$$- f(t_i^*)(g(t_i) - g(b)) = S + S' + [f(t^*) - f(t_{i-1}^*)]\,(g(b) - g(t_{i-1})) +$$

$$+ [f(t^*) - f(t_i^*)]\,(g(t_i) - g(b)),$$

unde ultimii termeni $\to 0$, dacă g sau f este continuă, funcțiile fiind mărginite (se va considera un șir de sume). Dacă există I și I'' această condiție nici nu este necesară.

2. Integrala compusă $\int f_1 \, dg_1 + f_2 \, dg_2$ poate exista fără ca $\int f_1 \, dg_1$ și $\int f_2 \, dg_2$ să existe.

§ 73. Integrale curbilinii în planul complex

Fie C o curbă Jordan mărginită cu extremităţile α, β orientată în sensul $\alpha \to \beta$ şi $f(z)$ o funcţie definită (univoc) şi mărginită pe C. Considerăm pe C toate lanţurile

$$\alpha = z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n = \beta \tag{24}$$

formate din puncte ordonate în sensul $\alpha \to \beta$. Fie z_k^* puncte intermediare oarecare între z_{k-1} şi z_k. Facem să corespundă unui lanţ (24) suma

$$S = \sum_1^n f(z_k^*)\Delta_k z, \quad \Delta_k z = z_k - z_{k-1}.$$

Dacă există un număr (complex) I cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$, se poate determina un $\delta > 0$ astfel că

$$|I - S| < \varepsilon$$

pentru toate δ-lanţurile pe C (oricum s-ar lua punctele intermediare z_k^*), atunci se scrie:

$$I = \int_C f(z)\, dz \tag{25}$$

simbolul citindu-se: „integrala funcţiei $f(z)$ de-a lungul curbei C".

Observaţia 1. Numărul I (dacă există) este unic. Demonstraţia ca la § 72, observaţia 1.

Observaţia 2. Definiţia este evident independentă de orice reprezentare parametrică a curbei C care păstrează sensul.

Observaţia 3. Trebuie subliniat că noţiunea implică o orientare a curbei C,

Observaţia 4. Definiţia se poate aplica şi unei curbe continue care nu e simplă, dar atunci ea este legată de alegerea unui parametru t, sensul $\alpha \to \beta$ fiind acela în care creşte t. Sensul se poate schimba atunci cînd schimbăm parametrul şi integrala de asemenea.

Exemplu:

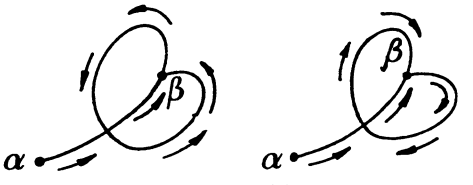

Fig. 71

Observaţia 5. $\int_C dz = \beta - \alpha$.

Observaţia 6. Dacă C este închisă ($\alpha = \beta$) şi $f(\alpha) = f(\beta)$ se vede că extremitatea $\alpha = \beta$ poate fi înlocuită cu orice alt punct $\alpha' = \beta'$ pe C sumele S rămînînd aceleaşi. Cînd însă $f(\alpha) \neq f(\beta)$, α şi β trebuie privite ca extremităţi *distincte* (deşi suprapuse), care nu pot fi schimbate.

Teorema 1. *Fie* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *şi* $z = x(t) + iy(t)$ *o reprezentare parametrică homeomorfă a curbei* C *pe intervalul* $(a, b]$ *(adică* C *curbă Jordan mărginită);* $\alpha = z(a)$, $\beta = z(b)$. *Să notăm*

$$u_c = u(x(t), y(t)), \quad v_c = v(x(t), y(t)), \quad f_c = u_c + iv_c.$$

Integrala curbilinie (25) *există dacă există integrala Stieltjes*

$$I' = \int_a^b f_c \, dz = \int_a^b u_c \, dx - v_c \, dy + i \int_a^b u_c \, dy + v_c \, dx \tag{26}$$

şi este egală cu aceasta.

În adevăr: un lanţ (24) pe C corespunde unui lanţ

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

în $[a, b]$ şi punctele intermediare z_k^* la valori intermediare

$$t_{k-1} \leqslant t_k^* \leqslant t_k \quad \text{(cf. § 71)}.$$

Avem

$$S = \Sigma f_c(t_k^*) \, \Delta_k z.$$

Dacă I' există, se poate determina, pentru un $\varepsilon > 0$, un $\delta' > 0$ astfel că

$$|I' - S| < \varepsilon, \qquad \text{pentru } \Delta_k t < \delta'.$$

Cum însă există un $\delta \geqslant 0$ astfel că $|\Delta_k z| < \delta$ pe C atrage $\Delta_k t < \delta'$ (fiindcă t este funcţia uniformă şi continuă de z pe C, aceasta fiind o mulţime mărginită şi închisă), avem

$$|I' - S| < \varepsilon \qquad \text{pentru } \Delta_k z$$

ceea ce dovedeşte că integrala (25) există şi este $= I'$. Şi reciproc.

Teorema 2. *Avem formulele:*

$$\int_{C_1 \cup C_2} f \, dz = \int_{C_1} f \, dz + \int_{C_2} f \, dz. \tag{27}$$

Prima extremitate a lui C_1 *= a doua extremitate a lui* C_2, *iar* $C_1 \cup C_2$ *simplă.*

$$\int_{-C} f \, dz = -\int_C f \, dz \tag{28}$$

— C fiind C cu orientarea opusă.

$$\int_C kf \, dz = k \int_C f \, dz \; (k = const.), \tag{29}$$

$$\int_C (f_1 + f_2) \, dz = \int_C f_1 \, dz + \int_C f_2 \, dz, \tag{30}$$

C este o curbă simplă, iar existenţa integralelor din membrul al doilea atrage pe aceea a integralelor din membrul întîi.

Demonstraţia ca la integrala Stieltjes.

Formula (27) presupune că $C_1 \cup C_2$ este tot o curbă Jordan mărginită. În acord cu această formulă vom extinde noțiunea de integrală la orice curbă mărginită care este o reuniune de curbe Jordan, $C = C_1 \cup C_2 \cup \ldots$ în număr finit și pe care $f(z)$ este definită în mod univoc și mărginită, punînd

$$\int_C f\,dz = \int_{C_1} f\,dz + \int_{C_2} f\,dz \ldots .$$

Este ușor de văzut că această definiție e independentă de împărțirea lui C în arce de curbă Jordan și că formulele (26)—(29) subsistă, dacă sensul de parcurs pe C a fost determinat. În particular, dacă curba C este închisă, $\int_C f\,dz$ este independentă de alegerea extremității $\alpha = \beta$. Definiția se poate menține și atunci cînd f nu e definită univoc pe C (ci numai pe $C_1, C_2, \ldots$); dar atunci $\int_C f\,dz$ poate depinde de împărțirea lui C în arce Jordan.

Teorema 3. *Integrala curbilinie* (25) *există și este egală cu* (26), *dacă*:
1°. *C este o curbă Jordan rectificabilă (sau o reuniune de asemenea curbe) și*
2°. *$f(z)$ este finită și continuă pe C.*
Într-adevăr: C este mărginită (§ 71, teorema 4), f mărginită, deci f_C mărginită și continuă; iar $x(t)$, $y(t)$ continue și cu variație mărginită (§ 71, teorema 7), deci integrala (26) există (§ 72, teorema 2) și se aplică teorema 1.

Teorema 4. $\int_C f(z)\,dz$ *există dacă:*
1°. *C este o curbă Jordan mărginită și posedînd o reprezentare homeomorfă $z = z(t)$, unde $z(t)$ admite derivata $z'(t)$ mărginită și continuă în $[a, b]$ (sau, mai general, C este o reuniune de asemenea curbe), și*
2° *$f(z)$ este finită și continuă pe C; avem atunci*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f_C(t) z'(t)\,dt =$$

$$= \int_a^b (u_C x' - v_C y')\,dt + i \int_a^b (u_C y' + v_C x')\,dt. \tag{30}$$

În adevăr: $z(t)$ și $f_C(t)$ sînt mărginite și continue, iar $z'(t)$ de asemenea, deci integrala Stieltjes (25) există și e egală cu integrala din membrul al doilea (§ 72, teorema 3). Nu rămîne decît să aplicăm teorema 1.

Observația 1. În cazul cînd $C = \cup C_h$, C_h satisfăcînd condiția 1° pentru un parametru t_h, avem conform formulei (26), formula mai generală

$$\int_C f(z)\,dz = \sum_h \int_{a_h}^{b_h} f_{C_h}(t_h) z'(t_h)\,dt_h.$$

Observația 2. Să presupunem că am stabilit existența integralei $\int_C f\,dz$, constatînd că C este o curbă Jordan recrificabilă și condiția 2° este satisfăcută, dar că reprezentarea parametrică $z = z(t)$ are un număr finit de puncte singulare, unde $z'(t)$ este infinit, condiția 1° fiind însă satisfăcută în orice interval dintre punctele singulare. Atunci formula (30) este valabilă,

membrul al doilea fiind o integrală impropie (care este convergentă în mod necesar). Într-adevăr, formula (30) se aplică la intervale intermediare și trecînd la limită se obțin integralele din (30) în virtutea teoremei 6, corolar.

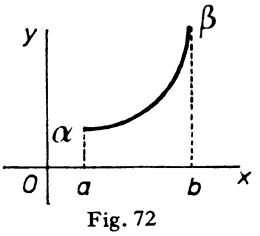

Fig. 72

Exemplul 1. *C are ecuația* $y = y(x)$, $y(x)$ *fiind crescătoare și continuă în* $[a, b]$ *iar* $y'(x)$ *continuă dar infinită (numai) în* b (vezi fig. 72). *Atunci C este rectificabilă și curbă Jordan* (§71, teorema 7), *deci sub condiția* 2° *putem scrie*

$$\int_C f\,dz = \int_a^b f_C(x)\,(iy'(x) + 1)\,dx.$$

Integrala din membrul al doilea este improprie și sigur convergentă în punctul singular $x = b$.

Teorema 5. *Fie*: *C o curbă Jordan rectificabilă, conținută în domeniul mărginit* D; $w = w(z)$ *o transformare biunivocă a domeniului* D *în domeniul* E, *efectuată de funcție* $w(z)$ *olomorfă și cu derivata* $w'(z) \neq 0$ *mărginită și continuă în* D; $z = z(w)$ *transformarea inversă*; $f(z)$ *o funcție mărginită și continuă pe* C. *Avem*

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{C'} f(z(w))\,z'(w)\,dw, \tag{31}$$

unde C' *este transformata curbei* C.

C' este o curbă Jordan (Corolarul 4 al teorema 1, § 68) rectificabilă (§ 71, teorema 17). $z'(w) = \dfrac{1}{w'(z)}$ este mărginită și continuă (§ 35, teorema 2). $f(z(w)) = f(z)$ pe C' este mărginită și continuă. Deci ambele integrale există (teorema 2). Să considerăm o sumă S relativă la prima integrală

$$S = \Sigma f(z_k)\,\Delta_k z$$

(am luat $z_k^* = z_k$). Avem, într-un domeniu închis $\bar{F}$, $C' \subset \bar{F} \subset E$ (de exemplu un domeniu poligonal care separă C' de fr E (vezi § 64, corolarul 2 al lemei 1))

$$\Delta_k z = \Delta_k w\,[z'(w_k) + \eta_k],$$

și pentru orice $\varepsilon > 0$, există un $\delta' > 0$ astfel că $|\eta_k| < \varepsilon$ pentru $|\Delta_k w| < \delta'$ (theorem 2, § 35). Astfel

$$S = S' + \Sigma f(z_k)\,\eta_k \Delta_k w$$

unde S' este o sumă relativă la integrala a doua. Dacă $M > |f(z)|$ pe C și $s' = s(C')$,

$$|S - S'| < \varepsilon M \Sigma |\Delta_k w| \leqslant \varepsilon M s' \text{ (pentru } |\Delta_k w| < \delta').$$

Considerînd un șir de δ_m'-lanțuri pentru care $\delta_m \to 0$, pe C, și corespunzătoarele lor pe C', care sînt δ'_m-lanțuri cu $\delta_m \to 0$ (din cauza continuității uniforme), vom avea pentru sumele relative la acestea

$$|S_m - S'_m| < \varepsilon M s'$$

și la limită

$$|I - I'| \leqslant \varepsilon M s',$$

I și I' fiind cele două integrale (31). Cum ε este arbitrar, urmează $I = I'$.

Observația 1. Formula (31) este analogă formulei de transformare a integralei reale.

Observația 2. În această teoremă, condiția ca C să fie rectificabilă se poate înlocui cu condiția 1° a teoremei 4. Demonstrația se poate face atunci direct, utilizînd formula (30).

Este destul să presupunem biunivocă numai corespondența între curbele C și C'.

În cazul cînd $f(z)$ nu este mărginită într-un număr finit de puncte „singulare" pe curba C, sau cînd C conține punctul ∞, dar $\int_{C_1} f\,dz$ există pe orice arc $C_1 \subset C$ mărginit și lipsit de puncte singulare, $\int_C f\,dz$ se definește ca o integrală improprie, drept limită a unei integrale proprii (cînd limita există). Punctul ∞ (în cazul C nemărginită) este considerat ca un punct singular. De exemplu, dacă extremitatea β a lui C este singurul punct singular, se definește

$$\int_C f\,dz = \lim_{z\to\beta} \int_{C_1} f\,dz, \quad C_1 = \alpha z.$$

Cînd sînt mai multe puncte singulare, se împarte C în bucăți conținînd un singur punct singular la o extremitate; se vede imediat că modul de împărțire nu are nici o influență.

Se vede ușor că formulele (26)—(29) subsistă.

Teorema 1 rămîne valabilă dacă integrala Stieltjes (26) există (ca integrală improprie).

De asemenea teorema 4 rămîne valabilă dacă condițiile ei sînt satisfăcute pe orice arc C_1 dintre punctele singulare și integrala Riemann (30) (improprie) există.

Teorema 6. *Dacă* $|f(z)| < M$ *pe curba* C *rectificabilă,*

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| < Ms(C) \tag{32}$$

(cînd, bineînțeles, integrala există).

Căci

$$|S| < M\sum|\Delta_k z| \leqslant Ms(C)$$

de unde (32) prin trecere la limită.

Corolar. *În aceleași condiții, dacă pe curba* C, z *tinde la* β, $\int_a^z f\,dz$ *tinde la* $\int_C f\,dz$. *fiindcă* $\left|\int_z^\beta f\,dz\right| < Ms(z, \beta) \to 0$.

Teorema 7. *În condițiile teoremei* 3 *(sau cînd ambele integrale există)*

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant \int_0^\sigma f_C(s)\,ds, \quad \sigma = s(C). \tag{33}$$

Rezultă din

$$|S| \leqslant \Sigma |f(z_k^*)| \, |\Delta_k z| \leqslant \Sigma |f_C(s_k^*)| \, \Delta_k s$$

prin trecere la limită.

Formula mediei pentru integrale reale se extinde la cîmpul complex după cum urmează:

Teorema 8. *Dacă curba C şi şi funcţiile $f(z)$, $\varphi(z)$ satisfac condiţiile teoremei 3, iar $\varphi(z)$ este reală şi > 0 pe C,*

$$\int_C f(z)\,\varphi(z)\,dz = \lambda |f(\zeta)| \int_0^s \varphi_C(s)\,ds, \quad s = s(C) \tag{34}$$

unde $\zeta \in C$ şi $|\lambda| < 1$. (Darboux).

După teorema 7

$$\left| \int_C f(z)\,\varphi(z)\,dz \right| \leqslant \int_0^s |f_C(s)|\,\varphi_C(s)\,ds.$$

După teorema mediei, a doua integrală se scrie $|f(\zeta)| \int_0^s \varphi_C(s)\,ds$, $|f(\zeta)|$ fiind valoarea medie a funcţiei $|f_C(s)|$, într-un uunct $s \in C$. Deci, notînd cu I integrala dată, avem $I = \lambda |f(\zeta)| \int_0^s \varphi_C\,(s)\,ds$ cu $|\lambda| < 1$.

Teorema 9. *În aceleaşi condiţii, $z = z(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ fiind o reprezentare omeomorfă a curbei C,*

$$\int_a^b f_c(t)\,\varphi_C(t)\,dt = \mu \int_a^b \varphi_C(t)\,dt. \tag{35}$$

unde μ este conţinut în înfăşurătoarea convexă a mulţimii valorilor $f_C(t)$ (Weierstrass).

Fie M mulţimea valorilor $f_C(t)$. Înfăşurătoarea convexă a lui M este intersecţia tuturor semiplanelor închise care conţin pe M. Să arătăm că punctul

$$\mu = \frac{\int_a^b f_C \varphi_C\,dt}{\int_a^b \varphi_C\,dt}$$

este în toate aceste semiplane. În cazul contrar, există o dreaptă Δ care separă μ de M. Printr-o transformare liniară întreagă, $w = \alpha z + \beta$ putem duce Δ în axa Oy şi vom avea de exemplu

$$\mathrm{Re}\,\mu' = \mathrm{Re}(\alpha\mu + \beta) < 0 \text{ şi } \mathrm{Re}(\alpha f_C + \beta) > 0.$$

Dar

$$\alpha\mu + \beta = \frac{\int_a^b (\alpha f_C + \beta)\,\varphi_C dt}{\int_a^b \varphi_C\,dt}$$

și cum

$$\operatorname{Re}(\alpha\mu+\beta)=\frac{\int_a^b \varphi_C \operatorname{Re}(\alpha f_C+\beta)\,dt}{\int_a^b \varphi_C\,dt}$$

inegalitățile precedente nu sînt compatibile.

Teorema 10. *Fie $f(z)$ finită și continuă în domeniul D; C o curbă Jordan sau o reuniune de asemenea curbe. Există pentru orice $\varepsilon>0$ linii frînte $P\subset D$ astfel că*

$$\left|\int_C f(z)\,dz-\int_P f(z)\,dz\right|<\varepsilon. \tag{36}$$

Această condiție e satisfăcută de toate liniile poligonale înscrise cu laturile $<\eta$ (corespunzînd lui ε).

$\int_C f\,dz$ există (teorema 3) și avem un $\delta>0$ astfel că

$$\left|\int_C f\,dz-\sum_k f(z_k)\,\Delta_k z\right|<\frac{\varepsilon}{2} \tag{37}$$

pentru orice linie frîntă $\alpha z_1 \dots z_{n-1}\beta$ înscrisă, cu $|\Delta_k z|<\delta$. Luînd un domeniu închis $C\subset \bar{D}_1\subset D$, (împărțind C în arce de lungime $<\rho_1$, număr mai mic decît distanța lui C la fr D, putem acoperi C cu un număr finit de discuri de rază ρ_1) $f(z)$ este uniform continuă în $\bar{D}_1$ și există un $\delta'>0$ astfel că $|z-z'|<\delta'$ în $\bar{D}_1$ atrage $|f(z)-f(z')|<\frac{\varepsilon}{2s}$ ($s=s(C)$). Fie $\rho=\rho(C, \operatorname{fr} D_1)>0$ (ceea ce se poate presupune). Vom lua o linie frîntă P înscrisă în C, cu $|\Delta_k z|<\delta$, δ', ρ. Vom avea atunci $P\subset \bar{D}_1$ și pe fiecare latură a lui P, $|f(z)-f(z_k)|<\frac{\varepsilon}{2s}$. Așa că

$$\left|\int_P f(z)\,dz-\sum_k f(z_k)\,\Delta_k z\right|=\left|\sum_k\int_{z_{k-1}}^{z_k}[f(z)-f(z_k)]\,dz\right|\leqslant \tag{38}$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2s}\cdot\sum_k|\Delta_k z|\leqslant\frac{\varepsilon}{2s}s=\frac{\varepsilon}{2}.$$

S-a aplicat formula

$$\int_{z_{k-1}}^{z_k} dz=z_k-z_{k-1}$$

care se verifică imdeiat cu ajutorul definiției (sau vezi exemplul 2), apoi s-a aplicat teorema 6 și s-a observat că $\Sigma|\Delta_k z|\leqslant s$ (prin definiția lui s). (36) rezultă acum din (37), (38).

Observație. Să presupunem că am constat că $\int_C f\,dz$ are pentru toate drumurile poligonale conținute în D, între un punct α și un punct β, o

aceeași valoare σ. Atunci, $\int_C f\,dz = \sigma$ pentru toate drumurile Jordan rectificabile de la α la β și se poate nota cu $\int_\beta^\alpha f(z)\,dz = \sigma$. Iată o aplicație:

Teorema 11. *Dacă $f(z)$ este olomorfă în domeniul D și $f'(z)$ este continuă și finită* [8], *avem*

$$\int_\alpha^\beta \frac{df}{dz}\,dz = f(\beta) - f(\alpha) = [f(z)]_\alpha^\beta \tag{39}$$

în D (adică pe orice curbă Jordan rectificabilă C conținută în D).

Să presupunem mai întîi că drumul de integrare C este segmentul $\overline{\alpha\beta}$. Atunci aplicînd teorema 4, rezultă:

$$\int_C f'\,dz = \int_a^b \left(\frac{df}{dz}\right)_C z'(t)\,dt = \int_a^b \frac{df_C}{dt}\,dt = f_C(b) - f_C(a) = \tag{40}$$

$$= f(\beta) - f(\alpha).$$

unde derivata poate fi luată pe dreapta $\alpha\beta$ iar t poate fi abscisă pe dreapta $\alpha\beta$. Am putut aplica teorema funcțiilor compuse ($f'(z)$ fiind continuă) și am putut scrie egalitatea penultimă fiindcă f'_C este continuă (căci $(f')_C$, $z'(t)$ sînt continue).

Și acum, pentru orice $\varepsilon > 0$, există o linie frîntă P așa fel încît să aibă loc formula (36) (teorema 10). Dar atunci, ținînd seama de (40), rezultă:

$$\int_P \frac{df}{dz}\,dt = \int_\alpha^{z_1} \frac{df}{dz}\,dz + \ldots + \int_{z_n}^\beta \frac{df}{dz}\,dz = [f(z_1) - f(\alpha)] +$$

$$+ [f(z_2) - f(z_1)] + \ldots + [f(\beta) - f(z_n)] = f(\beta) - f(\alpha).$$

Așa că, pentru orice $\varepsilon > 0$, formula (36) implică

$$\left| \int_C \frac{df}{dz}\,dz - [f(\beta) - f(\alpha)] \right| < \varepsilon,$$

de unde rezultă (39).

Observația 1. Condiția $f'(z)$ continuă, din enunțul teoremei, este inutilă după cum vom vedea (§ 76, teorema 3), ea fiind o consecință a olomorfiei lui $f(z)$.

Observația 2. În loc de $f'(z)$ continuă este destul să presupunem $f(z)$ diferențiabilă (adică $u(x, y)$, $v(x, y)$ diferențiabile).

Observația 3. Formula (39), scrisă $\int_C f'(z)dz = f(\beta) - f(\alpha)$ se aplică ori de cîte ori putem închide curba C într-un domeniu, unde $f(z)$ să fie olomorfă (și în special uniformă!). Avem atunci în particular $\int_C f'(z)dz = 0$ dacă C este închisă.

---

[8] Vom vedea că această condiție este inutilă, fiind o consecință a celei dintîi.

Corolar. *Formula integrării prin părți:* $\int_C fg'\,dz = [fg]_\alpha^\beta - \int_C f'g\,dz$, *e valabilă cînd* f *și* g *satisfac condițiile teoremei.*

Teorema 12. *O funcție olomorfă în domeniul* D, *a cărei derivată este nulă în* D, *este o constantă în* D.

Fie $f'(z) = 0$ în D. Dacă $f(z)$ este olomorfă în D, putem aplica teorema 11, (f' fiind evident finită și continuă);

$$\int_a^z f'(z)\,dz = f(z) - f(\alpha) = 0, \quad f(z) = f(\alpha).$$

(Rezultă și din condiția lui Cauchy).

Exemple. 2. $\int_{z_0}^{z} z^n\,dz = \left[\frac{z^{n+1}}{n+1}\right]_{z_0}^{z}$, n *întreg* $\neq -1$, *și* $z_0, z \neq 0$ *cînd* $n < -1$. Se aplică teorema 11 în tot planul finit, și $\neq 0$ cînd $n < -1$.

3. $\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z-\alpha} = [\log(z-\alpha)]_{z_0}^{z}$ *într-un domeniu* D *care nu conține* α *și nici nu înconjură (astfel că* arg $(z-\alpha)$ *nu poate varia cu* 2π); numai într-un asemenea domeniu se poate defini o determinare a lui $\log(z-\alpha)$ separată de celelalte (și formula se va aplica unei aceleiași determinări). O astfel de determinare este deci olomorfă.

Într-un domeniu care conține α sau îl înconjoară, integrala depinde de drum. Astfel avem în general (vezi § 71, formula (11)).

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = (C,\alpha)\,i + [\log|z-\alpha|]_{z_0}^{z_1} \tag{41}$$

dacă C este închisă,

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = (C,\alpha)\,i;$$

(este presupus că C nu trece prin α). Aceste formule se demonstrează cu ajutorul precedentei, descompunînd C în arce $C_K = \overset{\frown}{z_{k-1}z_k}$ pe care $(C_K, \alpha) < 2\pi$. Putem scrie atunci

$$\int_{Ck} \frac{dz}{z-\alpha} = [\log(z-\alpha)]_{z_{k-1}}^{z_k} = (C_K,\alpha)\,i + [\log|z-\alpha|]_{z_{k-1}}^{z_k}$$

și nu rămîne decît să adunăm aceste rezultate, observînd că $(C,\alpha) = \Sigma(C_K,\alpha)$. [§ 71, formula (13). Rezultatul este același ca și cînd s-ar aplica (39) luînd în extremitățile curbei C valorile unei determinări oarecare a lui $\log(z-\alpha)$, urmărită prin continuitate de-a lungul curbei.

În același mod avem $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = [\log f(z)]_\alpha^\beta$, $f(z)$ fiind olomorfă și diferită de zero pe C (adică într-un domeniu conținînd C) și luînd pentru $\log f(z)$ o determinare inițială oarecare, pe care o urmărim continuu pe C pînă în β. Ceva analog cu (41) nu putem afirma deocamdată (vezi § 90).

Observație. Procedeul este general: cînd o curbă C se poate descompune într-un număr finit de arce C_k, ce satisfac condițiile teoremei 11, $\int_C f'dz$ se va obține aplicînd (39) acestor arce și adunînd rezultatele. Aceasta se aplică atunci cînd $f(z)$ este o funcție multiformă, cu determinări olomorfe pe C_k (dar nu pe întreaga curbă C). În aceste cazuri, trebuie înainte de toate să alegem valorile lui $f(z)$ pe C astfel ca să avem o funcție uniformă (definită univoc) și continuă; această alegere este hotărîtă de determinarea aleasă pentru $f(z)$ în extremitatea α (de exemplu): căci prin aceasta fixăm

determinarea funcției în C_1, apoi în C_2 etc. Numai astfel $\int_C f\,dz$ are un sens precis.

Totuși, sînt cazuri, cum este cel din exemplul 3, și mai general $\int_C \log f(z)\,dz$ cu $f(z)$ olomorfă și diferită de zero pe C, în care alegerea determinării inițiale este indiferentă: aceasta ține de faptul că determinările diferă prin constante $(2k\pi)$.

Exemple. 4. $\int_C z^{\frac{1}{n}-1}\,dz$, *n întreg* > 0, *C cercul* $|z| = 1$. Avem $z = re^{i\varphi}$, $z^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$. Să alegem determinarea egală cu $e^{\frac{2k\pi}{n}i}$ în $z = 1$. Găsim $\int_C z^{\frac{1}{n}-1}\,dz = \int_0^{2\pi} ie^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}\,d\varphi = -n(1-e^{\frac{2\pi i}{n}})e^{\frac{2k\pi}{n}i}$, luînd $z=1$ ca punct inițial. Dacă însă luăm un alt punct inițial, $z = e^{\varphi_0 i}$, integrala a doua va trebui luată între φ_0 și $\varphi_0 + 2\pi$, și integrala dată va avea valoarea precedentă înmulțită cu $e^{\frac{\varphi_0 i}{n}}$. Astfel, acest exemplu confirmă nu numai observația precedentă, ci și observația 6: deoarece nu putem defini univoc $f(z)$ pe curba închisă C, trebuie s-o considerăm ca o curbă cu extremități distincte (dar suprapuse) și atunci este natural să ne așteptăm ca integrala să depindă de alegerea punctului inițial pe C.

5. $\int_C \frac{\log z}{dz}$ *pe cercul* $|z| = r$, *cu punctul inițial* $z_0 = re^{i\varphi}$. $\int_{C(z_0)} \frac{\log z}{z}\,dz = \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+2\pi} i(\log r + i\varphi)\,d\varphi = 2\pi i \log r - 2\pi\varphi_0 - 2\pi^2$.

§ 74. Teorema fundamentală a lui Cauchy

Am văzut în § 73 exemple în care $\int_C f dz$ depinde numai de extremitățile drumului de integrare C (și, natural, de funcția f), astfel că avem analogie completă cu integrarea funcțiilor de variabilă reală.

Să presupunem că acesta este cazul, oricum am lua, în domeniul mărginit D, curba C cu extremitățile fixe α, β (C fiind o curbă Jordan rectificabilă).

Dacă D este *simplu conex*, două asemenea drumuri, C_1 și C_2, care nu se întretaie, (adică nu au alte puncte comune decît α și β) formează o curbă Jordan închisă, a cărei regiune interioară R este $\subset D$ (vezi fig. 73). Conturul ei, parcurs într-un sens sau altul se va putea reprezenta cu $C_1 - C_2$ sau $C_2 - C_1$. Avem atunci

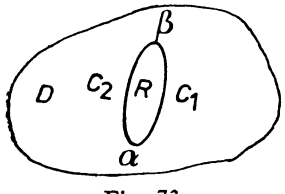

Fig. 73

$$\int_{C_1-C_2} f\,dz = \int_{C_1} f\,dz - \int_{C_2} f\,dz = 0.$$

Cum orice curbă Jordan închisă $\subset D$ se poate scrie $C_1 - C_2$ (luînd două puncte α, β pe ea), rezultă că o condiție necesară pentru ca $\int_C f\,dz$ să depindă numai de extremitățile drumului C în D (simplu conex) este ca $\int_C f\,dz = 0$, pentru orice curbă Jordan închisă și $\subset D$.

Condiția este suficientă. Fie C_1, C_2 două drumuri în D, de la α la β. Să le presupunem mai întîi poligonale. Ele pot avea un număr finit de întretăieri. Să descriem, de exemplu, $C_1 - C_2$. Fie γ_1 primul punct în care

revenim. Porţiunea de linie poligonală $\gamma_1 \to \gamma_1$, pe care am parcurs-o, este un poligon simplu (vezi fig. 74). Fie γ_2 al doilea punct în care revenim. Porţiunea $\gamma_2 \to \gamma_1 \to \gamma_2$ este alt poligon simplu etc. Astfel, $C_1 - C_2$ se descompune în poligoane simple, P_1, P_2, ... şi avem prin ipoteză

$$\int_{C_1 - C_2} f\,dz = \int_{P_1} f\,dz + \int_{P_2} f dz + \ldots = 0, \text{ de unde } \int_{C_1} = \int_{C_2}.$$

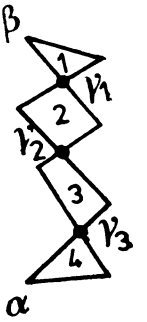

Fig. 74

Dacă C_1 şi C_2 sînt curbe Jordan (rectificabile) oarecare, aproximînd integrala cu ajutorul unor linii poligonale C_1', C_2', cu aceleaşi extremităţi, avem (§ 73, teorema 10)

$$\left|\int_{C_1} f\,dz - \int_{C_1'} f\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\left|\int_{C_2} f\,dz - \int_{C_2'} f\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\int_{C_1'} f\,dz = \int_{C_2'} f\,dz,$$

deci

$$\left|\int_{C_1} f\,dz - \int_{C_2} f\,dz\right| < \varepsilon \text{ pentru orice } \varepsilon > 0,$$

deci

$$\int_{C_1} f\,dz = \int_{C_2} f\,dz.$$

Aşadar:

Teorema 1. *Pentru ca în domeniul mărginit D, integrala $\int_C f dz$ să depindă numai de extremităţile drumului C (curbă Jordan rectificabilă) este necesar şi suficient ca ea să fie $= 0$ pentru toate curbele Jordan închise şi rectificabile conţinute în D; şi chiar numai pentru toate poligoanele simple $\subset D$.*

Aceasta se întîmplă cînd $f(z)$ este olomorfă în D (în condiţiile teoremei precedente). Vom demonstra acest fapt fundamental în condiţii mai largi:

Teorema 2. *(Cauchy). Fie $f(z)$ o funcţie olomorfă în domeniul D interior unei curbe Jordan închise şi rectificabile $C = \mathrm{fr}\, D$, continuă şi finită în $\bar{D}$ $(= D \cup C)$; atunci*

$$\int_C f(z)\,dz = 0. \tag{42}$$

Vom considera mai întîi cazul cînd C este un poligon simplu, conţinut împreună cu interiorul său într-un domeniu D, unde $f(z)$ este olomorfă. Acest poligon se poate descompune în triunghiuri interioare, $D = T_1 \cup T_2 \cup \ldots$ astfel ca C să fie format din laturi ale acestor triunghiuri, iar laturile care nu sînt în C aparţin la cîte două triunghiuri (teorema 5, § 63) (vezi figura 75), Avem

$$\int_C f\,dz = \int_{C_1} f\,dz + \int_{C_2} f\,dz + \ldots,$$

$C_1, C_2, \ldots$ fiind contururile triunghiurilor $T_1, T_2, \ldots$, parcurse în același sens ca C (de exemplu în sensul direct). În adevăr, descompunînd fiecare integrală din membrul al doilea după laturi, se vede că integralele relative la laturile interioare lui D se anulează, aceste laturi fiind parcurse de cîte două ori în sensuri contrare (căci pentru fiecare triunghi sensul pe contur este acela care lasă la stînga interiorul triunghiului). Rămîne să demonstrăm (42), pentru un triunghi T.

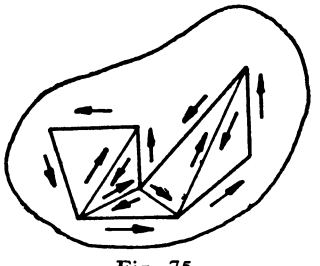

Fig. 75

Să punem

$$\left|\int_C f\,dz\right| = M.$$

Este de arătat că $M = 0$. Descompunem T în 4 triunghiuri T_1, T_1', T_1'', T_1''', ducînd paralele la fiecare latură prin mijlocul celorlalte. Dacă s este perimetrul lui T, aceste triunghiuri au perimetrul $\frac{s}{2}$. Avem

$$\int_C f\,dz = \int_{C_1} f\,dz + \int_{C_1'} f\,dz + \int_{C_1''} + \int_{C_1'''} f\,dz,$$

$$M \leqslant \left|\int_{C_1} f\,dz\right| + \left|\int_{C_1'} f\,dz\right| + \left|\int_{C_1''} f\,dz\right| + \left|\int_{C_1'''} f\,dz\right|.$$

Cel puțin un termen din membrul al doilea este $\geqslant \frac{1}{4} M$; fie

$$\left|\int_{C_1} f\,dz\right| \geqslant \frac{1}{4} M.$$

Repetînd raționamentul se obține un șir de triunghiuri $T \supset T_1 \supset \ldots$ $\ldots \supset T_n \supset \ldots$ astfel că $C_n = \text{fr } T_n$ are lungimea $\frac{s}{2^n}$ și $\left|\int_{C_n}\right| \geqslant \frac{1}{4^n} M$ (vezi fig. 76). Se știe (teorema lui Cantor) că există un punct ζ comun triunghiurilor $\overline{T}_n$. O vecinătate V_ζ de rază δ conține toate mulțimile $\overline{T}_n$, pentru $n > \nu$, căci distanța $|\zeta - z|$ la un $z \in \overline{T}_n$ este evident $<$ perimetrul $\frac{s}{2^n}$ al lui T_n; va fi deci suficient să luăm $\frac{s}{2^n} < \delta$.

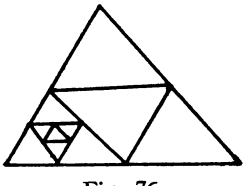

Fig. 76

Deoarece $f'(\zeta)$ există, avem pentru orice $\varepsilon > 0$, o vecinătate V_ζ astfel că

$$|f(z) - f(\zeta) - (z - \zeta)f'(\zeta)| \leqslant \varepsilon\,|z - \zeta| \text{ în } V_\zeta,$$

deci pentru $n > \nu$

$$\left|\int_{C_n} [f(z) - f(\zeta) - (z - \zeta)\,f'(\zeta)]\,dz\right| \leqslant \frac{s}{2^n} \cdot \varepsilon \cdot \frac{s}{2^n}$$

pentru că $|z - \zeta| < \frac{s}{2^n}$ pe C_n. Cum însă (§ 73, exemplul 2)

$$\int_{C_n} [\zeta f'(\zeta) - f(\zeta)]\,dz = 0, \quad \int_{C_n} z f'(\zeta)\,dz = 0,$$

avem

$$\left|\int_{C_n} f(z)\,dz\right| \leqslant \frac{1}{4^n}\, s^2\varepsilon$$

și deci $M \leqslant s^2\varepsilon$, de unde $M = 0$.

Cu aceasta (42) este demonstrată pentru orice poligon simplu $\subset D$ și, avînd în vedere teorema 1, pentru orice curbă Jordan rectificabilă închisă în D. (Demonstrația lui Goursat, în varianta lui Pringsheim). Demonstrațiile mai vechi presupuneau continuitatea derivatei.

Demonstrația teoremei lui Cauchy în condițiile enunțului (Pollard).

1°. Fie Ω un disc conținut în D, de centru ω și $\delta = \rho(C, \overline{\Omega}) > 0$.

2°. Fie $\varepsilon > 0$. Există un număr η, $0 < \eta < \delta$, astfel că

$$|f(z') - f(z)| < \varepsilon \text{ pentru } |z' - z| < \eta \text{ în } \bar{D}.$$

3°. Fie $s = s(C)$. Împărțim C în $n > \max\left(\frac{2}{\eta}, 4\right)$ arce de lungime cel mult $\frac{s}{n}$, $C_k = \overset{\frown}{\alpha_{k-1}\alpha_k}$ $(k = 1, \ldots, n;\ \alpha_0 = \alpha_n)$. Fie ρ_0 distanța minimă între două arce C_k, $C_{k'}$, neconsecutive.

4°. Vom subdivide fiecare C_k în arce $C_{k,j}$: $C_k = \cup_j C_{k,j}$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$. care se succed în sensul $\alpha_{k-1} \to \alpha_k$, într-un mod pe care-l vom preciza. Fie $s_{k,j}$ lungimile lor, $c_{k,j}$ mijloacele lor.

5°. Pentru fiecare $C_{k,j}$ construim un pătrat $Q_{k,j}$ deschis, cu centrul $c_{k,j}$ și laturile paralele cu axele Ox, Oy și de lungime $l_{k,j} = \frac{5}{4}\, s_{k,j}$. Atunci $C_{k,j} \subset Q_{k,j}$, deoarece pentru $z \in C_{k,j}$ avem

$$|c_{k,j} - z| \leqslant \frac{1}{2}\, s_{k,j} = \frac{2}{5}\, l_{k,j} < \frac{1}{2}\, l_{k,j}.$$

6°. Două pătrate consecutive, Q', Q'', se intersectează. Într-adevăr, distanța centrelor este

$$|c' - c''| \leqslant \frac{1}{2}\,(s' + s'') = \frac{2}{5}\,(l' + l'') < \frac{1}{2}\,(l' + l'').$$

7°. Fie Q_k reuniunea pătratelor $Q_{k,j}$, la care adăugăm segmentele deschise eventual comune, la contururile a două pătrate adiacente (neconsecutive!): $\bar{Q}_k = \cup_j \bar{Q}_{k,j}$.

Avînd în vedere 6° și că punctele adăugate sînt interioare, urmează că Q_k este un domeniu. Evident $C_k \subset Q_k$.

8°. Fie încă: $Q = \cup \bar{Q}_k$. Evident $C \subset Q$.

Două domenii, Q_k și Q_{k+1} consecutive se intersectează, deoarece $Q_{k,m}$ și $Q_{k+1,1}$ se intersectează (6°). Deci Q este un domeniu.

9°. Vom face subdiviziunea arcelor C astfel ca:

1) Două mulțimi $\bar{Q}_k$, $\bar{Q}_{k'}$, neconsecutive să fie disjuncte.

2) Două mulțimi Q_k, Q_{k+1} consecutive să se intersecteze numai în partea comună pătratelor $Q_{k,m}$, $Q_{k+1,1}$ de la capătul comun.

Să observăm că, dacă două pătrate Q', Q'' se intersectează, avem, ζ fiind punct comun:

$$|c' - c''| \leqslant |c' - \zeta| + |c'' - \zeta| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}(l' + l'') = \tag{43}$$

$$= \frac{5\sqrt{2}}{8}(s' + s'') < s' + s''.$$

Vom satisface condiția 1) luînd toate $s_{k,j} < \frac{1}{2}\rho_0$.

Pentru 2), fie ρ_1 distanța minimă între C_k și $C_{k+1} - C_{k+1,1}$ $(k = 1, ..., n)$, arcele $C_{k+1,1}$ fiind luate provizoriu. Luăm $s_{k,m} < \frac{1}{2}\rho_1$. Arcele $C_{k,m}$ fiind astfel fixate definitiv, fie ρ_1' distanța minimă între C_k și $C_{k-1} - C_{k-1,m}$ $(k = 1, ..., n)$. Luăm noi arce $C_{k,1}$ în interiorul celor vechi, așa ca $s_{k,1} < \frac{1}{2}\rho_1, \frac{1}{2}\rho_1'$. În sfîrșit, fie ρ_2 distanța minimă între două arce $C_k - C_{k,1} - C_{k,m}$ consecutive. Subdividem aceste arce astfel ca $s_{k,j} < \frac{1}{2}\rho_1, \frac{1}{2}\rho_1', \frac{1}{2}\rho_2$ (pe lîngă $s_{k,j} < \frac{1}{2}\rho_0$, condiție pusă mai sus). Se vede acum, cu ajutorul inegalității (43) că două pătrate $Q_{k,j}, Q_{k+1,j}$ sînt disjuncte dacă $j \neq m$ sau $j' \neq 1$, ceea ce dovedește 2).

10°. fr $Q_{k,m}$ și fr $Q_{k+1,1}$ au două puncte comune, β_k, β_k' (vezi fig. 77). Cum aceste pătrate se intersectează, atunci de exemplu $Q_{k,m} \not\subset Q_{k+1,1}$, căci dacă $Q_{k,m} \subset Q_{k+1,1}$, $Q_{k+1,1}$ ar intersecta $Q_{k,m-1}$ (6°), contrar 9°, 2).

11°. Fie B_k, B_k' porțiunile din fr $Q_{k,1}$, fr $Q_{k,m}$ care se află în $Q_{k-1,m}$ respectiv $Q_{k+1,1}$. Atunci $\bar{B}_k, \bar{B}_k' \subset$ fr Q_k. Într-adevăr, un $z \in \bar{B}_k'$ (de exemplu) nu poate fi $\subset Q_k$, deoarece $z \in \bar{Q}_{k+1,1}$, care nu intersectează Q_k decît în $Q_{k,m}$(9°). Apoi, evident, z nu poare fi nici exterior lui Q_k.

Din 9°, 2) urmează acum: $Q_{k-1} \cap \text{fr } Q_k = B_k$.

12°. $\bar{B}_k$ și $\bar{B}_k'$ sînt disjuncte pentru că sînt conținute în $\bar{Q}_{k-1,m}$, $\bar{Q}_{k+1,1}$, respectiv, care sînt disjuncte (9°, 1).

13°. fr Q_k constă dintr-un număr finit de poligoane simple, compuse din segmente ce aparțin contururilor pătratelor $Q_{k,j}$ și care au cel mult vîrfuri comune frontierei. Într-adevăr, fr $Q_k \subset \bigcup_j$ fr $Q_{k,j}$. Evident, un $z \in$ fr Q_k nu este în nici un $Q_{k,j}$ și nu este exterior pentru toate $Q_{k,j}$; deci $z \in$ frontierei unui $Q_{k,j}$. (Se aplică la orice reuniune finită de mulțimi.) Un $z \in$ fr Q_k, deci situat în conturul unui $Q_{k,j}$ (cel puțin), are evident o vecinătate formată dintr-un sector circular, de deschidere π, $\frac{\pi}{2}$ sau $3\frac{\pi}{2}$, și $\subset Q_k$. În primul caz, $z \in$ unui segment $\subset$ fr Q_k. În celelalte cazuri, z este extremitate comună la 2 sau 4 segmente, căci, din cauza convenției, de la 7°, nu pot exista în jurul lui z decît cel mult 2 sectoare disjuncte, de amplitudine $\frac{\pi}{2}$. În acest din urmă caz, z este vîrf comun la două pătrate (neconsecutive), dispuse ca în fig. 78, nr. 5; z este numai în acest caz un *nod* al fr Q_k.

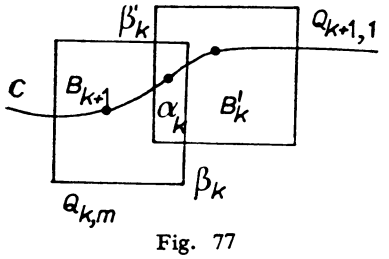

Fig. 77

Plecînd de la un segment, într-un sens determinat, vom trece la altul cu extremitatea comună; şi aceasta fără ambiguitate, dacă convenim ca în cazul cînd extremitatea comună este un nod, să trecem la segmentul perpendicular al celuilalt pătrat cu acelaşi vîrf (din figura 78 nr. 5) (aparţi-

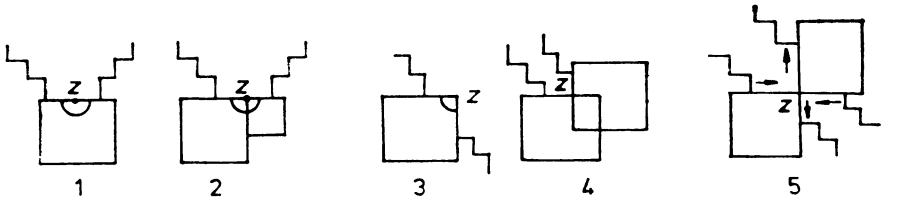

Fig. 78

nînd unui sector deosebit). Se vede atunci că (numărul segmentelor fiind finit) trebuie să revenim la segmentul iniţial (chiar traversînd noduri), după ce am parcurs un poligon. În sfîrşit, toate aceste poligoane (care nu au laturi comune) vor fi descompuse în poligoane simple ca, în demonstraţia teoremei 1, şi avînd puncte comune doar în noduri.

14°. Printre poligoanele simple care constituie fr Q_k, unul singur conţine Q_k în interior şi totodată celelalte poligoane, cu eventuala excepţie a unor noduri. Îl notăm P_k: Este ultimul întîlnit pe un drum ieşind din Q_k şi evitînd vîrfurile pătratelor componente. E unic pentru că 2 poligoane simple nu se pot conţine mutual (§ 65, teorema 4).

15°. Distanţa lui α_k la un $\zeta \in \bar{Q}_k$ este

$$|\alpha_k - \zeta| < \frac{2s}{n} < \eta. \tag{44}$$

Într-adevăr, fie $\zeta \in \bar{Q}_{k,j}$; avem

$$|\alpha_k - \zeta| \leqslant |\alpha_k - C_{kj}| + |C_{kj} - \zeta| \leqslant \frac{s}{n} + \frac{\sqrt{2}}{2} l_{kj} =$$

$$= \frac{s}{n} + \frac{5\sqrt{2}}{8} s_{kj} < \frac{2s}{n} < \eta.$$

16°. $\Omega \subset \text{ext } P_k$, de unde şi $\Omega \subset \text{ext } Q$.

După 15°, P_k este într-un disc de centru α_k şi rază $\frac{2s}{n}$, în timp ce Ω este la distanţă de α_k, $\geqslant \delta > \eta > \frac{2s}{n}$ (2°, 3°).

17°. $B_k, B'_k \subset P_k$.

Într-adevăr, fie $B_k \not\subset P_k$ (de exemplu); atunci $\bar{B}_k$ este disjunct de P_k, pentru că B_k nu conţine noduri ($\bar{B}_k \subset Q_{k-1,m}$ care este disjunct de $Q_k - Q_{k,1}$, 9°, 2). După 11°, urmează Q_{k-1} disjunct de P_k şi cum Q_{k-1} intersectează (8°) Q_k($\subset \text{int } P_k$), avem $Q_{k-1} \subset \text{int } P_k$. Cum Q_{k-2} este disjunct de $\bar{Q}_k$ (9°, 1) şi Q_{k-2} intersectează Q_{k-1}, $Q_{k-2} \subset \text{int } P_k$ etc. ... $Q_{k+2} \subset \text{int } P_k$.

În ipoteza noastră, P_k nu conţine nici B'_k (şi deci P_k disjunct de B'_k). Fie $P_k \supset B'_k$. Cum $Q_{k+2} \subset \text{int } P_k$, există în fr Q_k un poligon simplu P'_k, care separă Q_{k+2} de Q_k (întîlnit pe un drum de la Q_{k+2} la Q_k în int P_k). Cum B'_k este disjunct de P'_k (fiindcă B'_k nu are noduri şi este presupus în P_k), Q_{k+1} este disjunct de P'_k (11°). Apoi Q_{k+1} intersectează Q_{k+2}($\subset \text{int } P'_k$) deci $Q_{k+1} \subset$ $\subset \text{int } P'_k$. Dar Q_{k+1} intersectează $Q_k \subset \text{ext } P'_k$: contrazicere. Astfel, în ipoteza

noastră, $B_k, B'_k \subset \text{int } P_k$ (fiind $\subset \text{fr } Q_k$ și disjuncte de P_k). Deci Q_{k+1} este disjunct de P_k (11°).

Urmează $Q_{k+1} \subset \text{int } P_k$ și în definitiv $Q \subset \text{int } P_k$, de unde $C \subset \text{int } P_k$ (8°) și $D \subset \text{int } P_k$ (§ 65, teorema 2), $\Omega \subset \text{int } P_k$, ceea ce contrazice 16°. Cu aceasta 17° este demonstrată.

18°. După 12° putem scrie

$$P_k = \bar{A}_k \cup B'_k \cup \bar{A}'_k \cup B_k.$$

După 11°, A_k și A'_k sînt disjuncte de Q, iar după 9°, 1) toate mulțimile A_k și A'_k ($k = 1, \ldots, n$) sînt disjuncte între ele.

19°. Fie β_{k-1}, β_k (10°) extremitățile lui A_k; β_k, β_{k+1} ale lui $A_{k+1}, \ldots$. Atunci prima extremitate a lui A_{k-1} fiind β_{k-2}, a doua trebuie să fie β_{k-1} (și nu β'_{k-1}). Într-adevăr, în cazul contrar toți $\bar{A}_k$, $\bar{A}'_k$ ar forma un singur poligon simplu (18°) și disjunct de Q(18°):

$$\beta_{k-1}\ \beta_k\ \beta_{k+1} \ldots \beta'_{k-1}\ \beta'_k\ \beta'_{k+1} \ldots \beta_{k-1}.$$

Un domeniu determinat de el ar conține Q și deci transversalele B_k, B'_k, ale căror extremități, $\beta_{k-1}, \beta'_{k-1}$, și β_k, β'_k se separă (pe poligon); și ar urma că B_k, B'_k se intersectează (§ 67, teorema 1), în contradicție cu 12° (vezi fig. 79).

Așadar $\cup \bar{A}_k = \Pi$ și $\cup \bar{A}'_k = \Pi'$ sînt două poligoane simple și disjuncte.

20°. Unul din aceste poligoane este în D, de exemplu $\Pi \subset D$. În adevăr: După 16° $\omega \in \text{ext } Q$ și $\omega \in \text{ext } P_k$. Cum Q are puncte în D (în vecinătatea curbei $C \subset Q$), există un drum (poligonal) $L = \omega \ldots \zeta$ în D, cu $\zeta \in Q$. L traversează fr Q; fie ζ_0 primul punct de traversare și să presupunem că L trece în Q_k. Deoarece P_k este poligon exterior din fr Q_k, $\zeta_0 \in P_k$. Dar $\zeta_0 \notin \bar{A}_k, B_k, B'_k$ (care sînt $\subset Q$); deci $\zeta_0 \in A_k$ sau A'_k. Presupunînd primul caz, Π conține punctul ζ_0 din D și deci $\Pi \subset D$ (întrucît Π e disjunct de C).

21°. Definind funcția

$$\rho(z) = \begin{cases} f(z) & \text{pe } C \text{ și } \Pi(\subset \bar{D}), \\ \dfrac{f(\alpha_k) - f(\beta_k)}{\alpha_k - \beta_k}(z - \alpha_k) + f(\alpha_k) & \text{pe segmentul } \overline{\alpha_k\ \beta_k}, \end{cases}$$

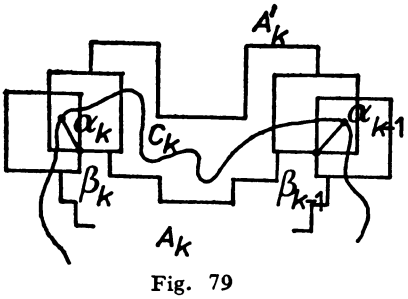

Fig. 79

$\varphi(z)$ este uniformă [cele două expresii dînd $\varphi(\alpha_k) = f(\alpha_k)$, $\varphi(\beta_k) = f(\beta_k)$], finită și continuă. Există deci $\int_{\gamma_k} \varphi(z)dz$ pe curbele închise și orientate (dar nu numai decît simple)

$$\gamma_k = C_k + \overline{\alpha_k\ \beta_k} - A_k + \overline{\beta_{k-1}\ \alpha_{k-1}},$$

deoarece γ_k este formată din bucăți Jordan rectificabile. Avem

$$\int_C f(z)\,dz = \sum \int_{\gamma_k} \varphi(z)\,dz,$$

deoarece integralele pe segmentele $\overline{\alpha_k\ \beta_k}$ se distrug (acestea fiind parcurse de două ori, în sensuri contrare), iar $\int_\Pi \varphi\,dz = \int_\Pi f dz = 0$, conform demon-

straţiei teoremei lui Cauchy pentru poligoane simple conţinute în domeniul de olomorfie.

22°. Pe γ_k avem

$$|\varphi(z) - f(\alpha_k)| < 2\varepsilon. \tag{45}$$

Într-adevăr, 7°, 18° şi faptul că $\overline{\alpha_k \beta_k} \subset Q_{km} \subset Q_k$ implică $\gamma_k \subset \bar{Q}_k$, iar după (44), avem pe $\gamma_k (\subset Q_k)$, $|\alpha_k - z| < \frac{2s}{n} < \eta (3°)$, deci (45) este verificată pe C_k şi A_k (unde $\varphi = f$), în conformitate cu 2°. Pe $\overline{\alpha_k \beta_k}$ avem

$$|\varphi(z) - f(\alpha_k)| = |f(\alpha_k) - f(\beta_k)| \left| \frac{z - \alpha_k}{\alpha_k - \beta_k} \right|$$

$$\leqslant |f(\alpha_k) - f(\beta_k)| < \varepsilon$$

pentru că $|\alpha_k - \beta_k| < \eta$.

Iar pe $\overline{\alpha'_{k-1} \beta'_{k-1}}$:

$$|\varphi(z) - f(\alpha_k)| \leqslant |\varphi(z) - f(\alpha_{k-1})| + |f(\alpha_k) - f(\alpha_{k-1})| < 2\varepsilon$$

pentru că la primul termen se aplică inegalitatea precedentă, iar celui de al doilea inegalitatea 2° (întrucît $|\alpha_k - \alpha_{k-1}| < \eta$).

23°. Urmează din (45) şi teorema 6, § 73, notînd $\lambda_k = s(\gamma_k)$,

$$\left| \int_{\gamma_k} \varphi \, dz \right| = \left| \int_{\gamma_k} f(\alpha_k) \, dz + \int_{\gamma_k} [\varphi(z) - f(\alpha_k)] \, dz \right| =$$

$$= \left| \int_{\gamma_k} [\varphi(z) - f(\alpha_k)] \, dz \right| < 2\lambda_k \varepsilon,$$

deoarece $\int_{\gamma_k} f(\alpha_k) \, dz = 0$, după cum se vede descompunînd-o pe cele 4 bucăţi ale lui γ_k şi aplicînd teorema 11, § 73.

24°. Pentru a evalua pe λ_k, avem:

$$s(C_k) \leqslant \frac{s}{n}, \ \overline{\alpha_{k-1} \beta_{k-1}} < \frac{2s}{n}, \ \overline{\alpha_k \beta_k} < \frac{2s}{n} \quad \text{(vezi 15°)}.$$

Cît priveşte A_k, constă din segmente pe contururile pătratelor $Q_{k,j}$, deci

$$s(A_k) < 4 \sum_j l_{k,j} = 5 \sum_j s_{k,j} = 5 \frac{s}{n}.$$

Aşadar,

$$\lambda_k < 10 \frac{s}{n}$$

şi

$$\left| \int_{\gamma_k} \varphi(z) \, dz \right| < 20 \frac{s}{n} \varepsilon.$$

Urmează

$$\left| \int_C f(z) \, dz \right| \leqslant \sum_k \left| \int_{\gamma_k} \varphi \, dz \right| < 20 s \varepsilon$$

de unde (42).

Teorema 3. *(Teorema lui Cauchy).* (42) *este valabilă în aceleaşi condiţii în orice domeniu Jordan, mărginit cu conexiune multiplă (finită), dacă toate contururile sînt parcurse în sensul pozitiv (sau negativ) faţă de domeniu (contururile fiind curbe Jordan rectificabile).*

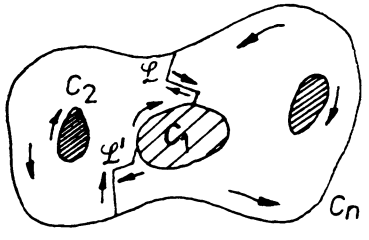

Fig. 80

Demonstraţia se face prin inducţie cu privire la ordinul de conexiune n. Pentru $n = 1$ teorema se confundă cu teorema 2. S-o admitem pentru conexiunile $< n$. Avem un contur C_n în interiorul căruia sînt celelalte, $C_1, \ldots C_{n-1}$ (vezi figura 80). O transversală L care uneşte C_n cu C_1, determină un domeniu $D - L$ de conexiune $n - 1$. Dacă în acesta mai ducem o transversală analogă, conexiunea se strică şi avem două domenii,

$$D - L - L' = D' \cup D''$$

de conexiuni $n', n'' < n$, căci $n' + n'' = n$ (§ 66, teoremele 5 şi 8). Notînd cu C_1', C_1'' şi C_n', C_n'' arcele determinate pe C_1 şi C_n de extremităţile transversalelor L, L', putem scrie (ibid., teorema 8).

$$C' = \operatorname{fr} D' = C_1' \cup L \cup C_n' \cup L', \quad \operatorname{fr} D'' = C_1'' - L' \cup C_n'' - L = C'',$$

unde C_1', C_1'' sînt parcurse în acelaşi sens ca C_1 (directă faţă de D', D'', deci faţă de D) şi la fel C_n', C_n''; în timp ce L, L' sînt parcurse în sensuri contrare. Cum C' şi C'' sînt curbe Jordan rectificabile (compuse din bucăţi de curbe Jordan rectificabile, disjuncte prin construcţie), avem prin ipoteza de inducţie

$$\int_{C'} f\mathrm{d}z = 0, \quad \int_{C''} f\mathrm{d}z = 0,$$

de unde

$$\int_{C} f\mathrm{d}z = 0$$

(integralele pe L şi L' se distrug).

Observaţia 1. Vom conveni de acum înainte să orientăm un contur Jordan în sens pozitiv faţă de interiorul lui. Atunci (42) se scrie

$$\int_{C_n} f\mathrm{d}z = \int_{C_1} f\mathrm{d}z + \ldots + \int_{C_{n-1}} f\mathrm{d}z. \tag{46}$$

Observaţia 2. Condiţiile teoremei lui Cauchy nu sînt de prisos. Cele relative la contur trebuie să asigure existenţa integralei. Iar în privinţa condiţiilor relative la domeniu (D mărginit, f olomorfă) vezi exemplele următoare.

Aceasta nu înseamnă că ele nu pot fi lărgite. Astfel, în loc de f olomorfă în D se poate presupune numai că $u(x, y)$, $v(x, y)$ sînt integrabile (în sens Riemann sau Lebesgue) în orice dreptunghi $\subset D$ (Montel) şi satisfac condiţiile lui Cauchy aproape peste tot în D (adică cu excepţia unei mulţimi de măsură nulă).

Exemplul 1. $\int_C \frac{dz}{z-\alpha}$, C *un cerc de centru* α.

Putem aplica teorema 4, § 73, luînd reprezentarea parametrică $z - \alpha = re^{i\varphi}$, r raza cercului:

$$\int_C \frac{dz}{z-\alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{re^{i\varphi}} \cdot ire^{i\varphi}\, d\varphi = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i.$$

Teorema lui Cauchy nu se aplică fiindcă $f(z)$ nu este olomorfă în $D(=\text{int } C)$ și nici măcar continuă în $\bar{D}$, deși toate celelalte condiții sînt satisfăcute.

Același exemplu arată că teorema lui Cauchy nu este valabilă în domenii nemărginite. În ext C toate celelalte condiții sînt satisfăcute $\left(\frac{1}{z-\alpha} \text{ este olomorfă în } z = \infty\right)$.

Faptul că integrala este independentă de r decurge din teorema 3, aplicată coroanei dintre două cercuri de centru α.

O mulțime se numește de măsură Lebesgue nulă, dacă poate fi acoperită cu o mulțime de cercuri a căror reuniune să fie de arie oricît de mică. O proprietate se zice că are loc *aproape peste tot* într-o mulțime E, dacă are loc peste tot în E cu excepția unei mulțimi de măsură nulă.

Observația 3. Vom extinde teorema 2 la cazul cînd celelalte condiții fiind verificate, $f(z)$ este olomorfă în D aproape peste tot (dar continuă în $\bar{D}$). Evident (ținînd seama de raționamentul de la teorema 2), este destul să facem demonstrația pentru un poligon simplu și deci pentru un triunghi (vezi § 63, lema 2).

Prin ipoteză putem acoperi mulțimea A în punctele căreia $f(z)$ nu este olomorfă cu o reuniune de discuri Σ de măsură $< \varepsilon$ (oricare ar fi ε). Cum f este olomorfă în $D - A$, din definiția olomorfiei rezultă că $D - A$ este deschisă și deci A este închisă, așa că din acoperirea lui A putem extrage (în virtutea teoremei lui Heine-Borel-Lebesgue) o acoperire finită a lui A cu discuri, iar extensiunea dorită apare ca o consecință a teoremei precedente.

§ 75. Integrale nedefinite

I) Să presupunem că în domeniul D, $\int_C f(z)\, dz$ există și depinde numai de extremitățile z_0 și z ale drumului C (curbă Jordan rectificabilă). Atunci o putem scrie

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz.$$

Aceasta este o funcție uniformă de z (z_0 fiind ținut fix), care poate fi numită ca în calculul integral real, *integrală nedefinită*. Analogia merge mai departe:

Teorema 1. *Într-un domeniu* D *unde* $f(z)$ *este continuă și*

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z')\, dz'$$

uniformă, $\varphi(z)$ *este olomorfă și are derivata* $\frac{d\varphi}{dz} = f(z)$.

Prin ipoteză

$$|f(z') - f(z)| < \varepsilon$$

într-o vecinătate V_z (circulară). Putem scrie

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta z} - f(z) = \int_z^{z+\Delta z} \frac{f(z') - f(z)}{\Delta z}\, dz'.$$

Luînd $z + \Delta z$ în V_z putem integra pe segmentul ce unește z cu $z + \Delta z$ și avem

$$\left| \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \cdot |\Delta z| = \varepsilon$$

în V_z. Deci

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} = f(z).$$

Corolar. *Într-un domeniu simplu conex, unde $f(z)$ este olomorfă, $\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$ este olomorfă și $\varphi'(z) = f(z)$; o funcție olomorfă are o primitivă olomorfă.*

În adevăr, după teoremele 1 și 2, § 74, $\varphi(z)$ e uniformă, așa că se aplică teorema precedentă.

Observație. Vom vedea (teorema 3, § 76) că condițiile teoremei atrag (z) olomorfă în D.

II). Într-un domeniu cu conexiune multiplă, unde $f(z)$ este olomorfă se poate întîmpla ca $\int f dz$ să depindă de drum, într-o măsură pe care o vom preciza. De exemplu $\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{z}$ într-o coroană circulară cu centrul în O: dacă drumul $z_0 - z$ înconjoară de k ori O, însemnînd cu φ_0 valoarea integralei pe un drum care nu înconjoară O, avem

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + 2k\pi i.$$

Teorema 2. *Fie $f(z)$ olomorfă în domeniul mărginit D de conexiune finită. Dacă curbele rectificabile închise $C, C' \subset D$ înconjoară de același număr (finit) de ori fiecare punct frontieră al lui D,*

$$\int_C f dz = \int_{C'} f dz.$$

Prin „curbă" înțelegem ca de obicei o curbă Jordan sau formată din bucăți de curbe Jordan (care adică nu-i nevoie să fie simplă). Este clar că putem presupune C, C' poligoane (pe baza teoremei 10, § 73). Putem acoperi $C \cup C'$ cu un domeniu poligonal conex D', care lasă în exterior fr D (corolarul 1 al lemei 1 § 64, aplicat continuului format din $C \cup C'$ și un drum $C \to C'$). Evident, $D' \subset D$.

Domeniul D' are frontiera formată din poligoane simple, disjuncte; D' fiind mărginit, are un contur exterior; fie Π_k $(k = 1, ..., m)$ cele interioare. Putem presupune că fiecare Π_k conține puncte din fr D; altfel int $\Pi_k \subset D$ și Π_k poate fi suprimat.

Poligonul C se poate descompune în poligoane simple C_n (aceste poligoane pot să nu fie distincte; un poligon poate fi descris de mai multe ori și atunci îl considerăm de tot atîtea ori), și $\int_C f dz = \Sigma_k \int_{C_n} f dz$. După teorema 3, § 74, $\int_{C_n} f dz$ este egală cu suma integralelor pe contururile Π_k situate în int C_n, pe care le înconjoară o dată în sensul lui C_n. Putem scrie:

$$\int_{C_n} f dz = \frac{1}{2\pi} \Sigma_k \omega_k (C_n, \Pi_k),$$

unde am pus $\int_{\Pi_k} f dz = \omega_k$ și $(C_n, \Pi_k) = (C_n, \zeta)$, ζ fiind un punct oarecare $\in$ int Π_k, căci poligoanele Π_k din ext C_n dau termeni nuli, iar cele din int C_n dau termenii ω_k, deoarece atunci $(C_n, \Pi_k) = 2\pi$.

Este evident că

$$(C, \Pi_k) = \Sigma_n (C_n, \Pi_k)$$

formula (13), § 71,). Urmează

$$\int_C f dz = \frac{1}{2\pi} \Sigma_k \omega_k (C, \Pi_k).$$

Pe de altă parte,

$$\int_{C'} f dz = \frac{1}{2\pi} \Sigma_k \omega_k (C', \Pi_k)$$

și cum $(C, \Pi_k) = (C', \Pi_k)$ prin ipoteză [în acest scop se vor lua poligoane aproximante cu laturi destul de mici pentru ca să dea același număr de rotații ca și curbele date. Fiecare Π_k va da o limitare pentru laturile acestor poligoane (vezi § 73, teorema 10)]. Teorema este demonstrată. Se zice că C și C_n sînt echivalente.

Să presupunem că D este un domeniu de conexiune $n + 1$, mărginit, avînd contururile interioare $\Gamma_k (k = 1, ..., n)$. Dacă C_k este o curbă Jordan rectificabilă închisă, care conține în interior numai Γ_k (orientată pozitiv ca și Γ_k), $\int_{C_k} f dz$ este independentă de alegerea acestei curbe sub aceste condiții, căci două asemenea curbe înconjoară de același număr de ori contururile (Γ_k o dată și celelalte nici o dată). S-o notăm cu ω_k și s-o numim *perioadă* sau mai bine, *modul de periodicitate* relativă la conturul Γ_k.

Fie C o curbă închisă rectificabilă și $\frac{1}{2\pi}(C, \Gamma_k) = m_k$; $(C, \Gamma_k) = (C, \zeta)$, unde ζ este un punct oarecare în Γ_k sau int Γ_k (după cum rezultă din continuitate, vezi § 65, nr. 8, d). Să unim curbele C_k de mai sus cu un punct $\zeta_0 \in D$, prin drumuri în D formînd astfel niște *laturi* în jurul contururilor

(vezi fig. 81). Fiecare laț este o curbă închisă, care înconjoară un Γ_k în sens pozitiv sau negativ. Dacă parcurgem lațul relativ la Γ_k de m_k ori în sens pozitiv sau negativ, după cum $m_k \gtrless 0$,și aceasta pentru fiecare k, obținem o curbă C', pentru care $\frac{1}{2\pi}(C', \Gamma_k) = m_k$ (echivalentă cu C). Și $\int_C = \int_{C'}$ · Pe un laț parcurs în sens pozitiv față de C_k, integrala are aceeași valoare ca pe C_k (căci drumul $C_k \to \zeta$ este parcurs în sensuri contrare), deci este egală cu ω_k. Urmează

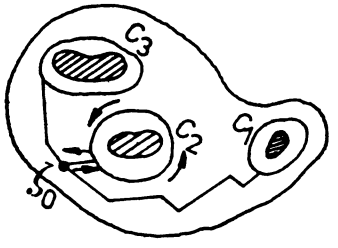

Fig. 81

$$(47) \qquad \int_C f\mathrm{d}z = \Sigma_k m_k \omega_k. \quad m_k = \frac{1}{2\pi}(C, \Gamma_k).$$

Așadar:

Teorema 3. *$f(z)$ fiind olomorfă într-un domeniu $n+1$ conex cu contururile interioare $\Gamma_k (k = 1, \ldots, n)$, $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ pe o curbă închisă rectificabilă care înconjoară Γ_k de m_k ori este dată de formula (47), unde ω_k sînt perioadele relative la aceste contururi.*

Observația 1. Cînd contururile Γ_k sînt curbe Jordan rectificabile și (z) este continuă în $\overline{D} = D \subset (\bigcup_k \Gamma_k)$, avem (teorema 3):

$$\omega_k = \int_{\Gamma_k} f\mathrm{d}z.$$

Observația 2. Este evident că în (47), m_k pot lua toate valorile întregi: curbele formate din lațuri ne arată aceasta.

Urmează acum ușor:

Teorema 4. *Într-un domeniu multiplu conex, unde $f(z)$ este olomorfă și are perioade ω_k nu toate $= 0$, $\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\,\mathrm{d}z$ este o funcție multiformă, avînd expresia generală*

$$\varphi(z) = \varphi_0(z) + \Sigma_k m_k \omega_k$$

unde $\varphi_0(z)$ este integrala luată pe un drum anumit și m_k întregi arbitrari.

Observația 3. Determinările funcției $\varphi(z)$ sînt numărabile, dacă funcția nu este uniformă. Se poate însă întîmpla ca ele să nu poată fi separate; dacă numărul perioadelor distincte (care nu sînt combinații liniare cu coeficienți întregi de celelalte) este > 3, aceasta are loc totdeauna. Chiar și în cazul a patru perioade $\omega_k = \omega_k' + \mathrm{i}\omega_k''$ se poate arăta că punctele $\Sigma m_k \omega_k$ formează o mulțime densă peste tot, astfel că pentru z dat, $\varphi(z)$ poate lua valori oricît de apropiate de o valoare oarecare. O asemenea funcție iese din cadrul obișnuit al teoriei funcțiilor.

§ 76. Integrala lui Cauchy

Teorema 1. *(Cauchy). Dacă $f(z)$ este olomorfă în domeniul D închis de o curbă Jordan rectificabilă C şi este continuă în $\bar{D}$,*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt \tag{48}$$

în D.

Fie Γ un cerc de centru z şi rază r conţinut în D. Avem (teorema 3, § 74), $\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt=\int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt$ şi cum integrala nu depinde de r, $\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt=$ $=\lim_{r\to 0}\int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt$. Scriem

$$\int_\Gamma \frac{f\,dt}{t-z}=\int_\Gamma \frac{f(t)-f(z)}{t-z}\,dt+\int_\Gamma \frac{f(z)}{t-z}\,dt\,.$$

Din caza continuităţii lui $f(t)$ în $t=z$,

$$|f(t)-f(z)|<\varepsilon \quad \text{pentru } r<\eta,$$

deci

$$\left|\int_\Gamma \frac{f(t)-f(z)}{t-z}\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{r}\cdot 2\pi r=2\pi\varepsilon.$$

Astfel această integrală $\to 0$. Pe de altă parte (exemplul 1 § 74),

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{t-z}\,dt=2\pi i f(z).$$

Aşadar

$$\lim_{r\to 0}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t-z}=2\pi i f(z),$$

de unde rezultă (48).

Observaţie. Este remarcabil că o funcţie olomorfă într-un domeniu simplu conex este determinată de valorile ei pe contur. Vom vedea de altfel că ajunge spre a o determina chiar o infinitate numărabilă de valori în domeniu.

Corolar. *În condiţiile teoremei, $f(z)$ nu poate fi constant pe C fără a fi constant şi în D.*

Luînd $f(t)=k$ (const.) pe C, (48) ne dă $f(z)=k$ în D.

Teorema 2. *Dacă $f(z)$ este o funcţie finită şi continuă pe curba rectificabilă C,*

$$\varphi(z)=\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt \tag{49}$$

este o funcţie olomorfă în tot planul minus C şi are derivate de orice ordin, date de

$$\varphi^{(n)}(z)=n!\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt\,. \tag{50}$$

$\varphi(z)$ este o funcție uniformă și finită de z, cîtă vreme z nu este pe C (§ 73, teorema 3). Tot așa integralele (30). Avem

$$\Delta\varphi = \int_C f(t)\left[\frac{1}{t-z-\Delta z} - \frac{1}{t-z}\right] dt = \int_C \frac{\Delta z \cdot f(t)}{(t-z)(t-z-\Delta z)}\, dt,$$

$$\left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta z} - \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^2}\, dt\right| = \left|\int_C \frac{\Delta z \cdot f(t)\ dt}{(t-z)^2(t-z-\Delta z)}\right| < \frac{|\Delta z| M}{\delta^3} s,$$

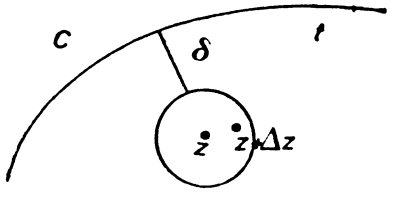

Fig. 82

unde $M > |f(z)|$ pe C, $s = s(C)$ și δ este distanța curbei C la un cerc fix de centru z, în care închidem pe $z + \Delta z$, și pe care îl luăm destul de mic pentru ca să nu intersecteze C (fig. 82).

Fiind dat $\varepsilon > 0$, putem face $\frac{|\Delta z| M}{\delta^3} < \varepsilon$ într-o vecinătate V_z și avem

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} = \varphi'(z) = \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^2}\, dt.$$

Formula (50) este demonstrată pentru $n = 1$. Aplicăm inducția cu privire la n. Admițînd (50) pentru $\varphi^{(n-1)}$, avem, punînd $T = t - z - \Delta z$:

$$\frac{\Delta\varphi^{(n-1)}}{\Delta z} - n! \int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt =$$

$$= (n-1)! \int_C f(t)\left[\left(\frac{1}{T^n} - \frac{1}{(T+\Delta z)^n}\right)\cdot\frac{1}{\Delta z} - \frac{n}{(T+\Delta z)^{n+1}}\right] dt =$$

$$= (n-1)! \int_C f(t) \frac{(T+\Delta z)^{n+1} - [T + (n+1)\Delta z]T^n}{\Delta z \cdot T^n (T+\Delta z)^{n+1}}\, dt =$$

$$= \int_C \frac{\Delta z \cdot f(t)}{T(T+\Delta z)^{n+1}} Q\left(\frac{\Delta z}{T}\right) dt,$$

unde $Q\left(\frac{\Delta z}{T}\right)$ este un polinom de $\frac{\Delta z}{T}$ cu coeficienții constanți și > 0. Dacă r este raza cercului fix considerat, avem $\left|\frac{\Delta z}{T}\right| < \frac{r}{\delta}$ și $\left|Q\left(\frac{\Delta z}{T}\right)\right| < Q\left(\frac{r}{\delta}\right) = N$. Astfel, modulul diferenței precedente este $< |\Delta z| \frac{MN}{\delta^{n+2}} s$. De unde urmează (50). Integralele din (49) se numesc integrale de tip Cauchy.

Observația 1. Dacă, ne dăm a priori, valori pe contur, satisfăcînd numai condiției de a forma o funcție finită și continuă f, ele determină după teorema 2 o funcție olomorfă $\varphi(z)$ care însă în general poate să nu fie identică cu f pe contur. De fapt, $\varphi(z)$ nu este definită pe contur; ceea ce afirmăm este că $\varphi(z)$ nu tinde către f (Vezi exemplele 1, 2).

Observația 2. Teorema ne dă un mijloc de a demonstra cînd o funcție continuă este olomorfă.

Teorema 3. *O funcție olomorfă într-un domeniu D are derivate olomorfe de orice ordin în D. În condițiile teoremei 1 avem*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\,dt \text{ în } D \tag{48'}$$

Rezultă din cele două teoreme precedente.

Observația 3. Teoremele 1 și 3 se aplică și la domenii mărginite cu conexiune multiplă, cu contururi Jordan rectificabile. Dacă C este conturul exterior și $C_1, C_2, \ldots$, cele interioare, avem ca generalizare a formulei (48)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_1} \frac{f(t)}{t-z}\,dt - \ldots$$

și analog pentru (48').

Aceeași demonstrație, bazată pe formula (46), § 74.

Teorema 4. *(Morera). Dacă, într-un domeniu D, $f(z)$ este finită și continuă și $\int_C f(z)\,dz = 0$ pe orice curbă rectificabilă închisă (și chiar numai pe orice poligon simplu) conținută în D, atunci $f(z)$ este olomorfă în D. (Reciproca teoremei fundamentale).*

Într-adevăr, după teorema 1, § 74, $\int_{z_0}^{z} f(z)\,dz = \varphi(z)$ este funcție uniformă în D. După teorema 1, § 75, $\varphi(z)$ este olomorfă în D și $f(z) = \varphi'(z)$. Iar după teorema precedentă $\varphi'(z)$ este olomorfă.

Exemple. 1. $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{dt}{t(t-z)}$, pe cercul $|t| = 1$; $|z| < 1$. Aici $f_C = e^{-i\theta}$, $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i z}\left(\int_C \frac{dt}{t-z} - \int_C \frac{dt}{t}\right) = 0$.

Astfel, φ nu tinde către f_C.

2) Fie $f(z)$ olomorfă în D și $D' \subset D$ avînd conturul (simplu, rectificabil) C.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(t)}{t-z}\,dt = \begin{cases} 0 \text{ în } D - D', \\ f(z) \text{ în } D' \end{cases}$$

(integrandul fiind olomorf în D' pentru $z \in D - D'$).

§ 77. Convergența uniformă și aplicațiile ei

1. Considerăm o funcție de două variabile complexe, $f(z, t)$, definită pentru orice z în mulțimea D și orice t în mulțimea C, — pe scurt; în mulțimea $D \times C$. O putem concepe ca funcție de z în D, depinzînd de *parametrul* t care descrie C, sau vice-versa.

Fie t_0 un punct limită al mulțimii C; dacă există pentru fiecare $z \in D$, $\lim_{t \to t_0} f(z, t) = \varphi(z)$ finită, se zice că $f(z, t)$ *converge* la $\varphi(z)$ în D, pentru $t \to t_0$.

Convergența se zice *uniformă* în D, dacă, fiind dat arbitrar $\varepsilon > 0$, se poate găsi o vecinătate V_{t_0}[9], dependentă de ε dar nu de z, astfel ca

$$t \in V_{t_0} \text{ să atragă } |f(z, t) - \varphi(z)| < \varepsilon \text{ în } D \times V_{t_0}.$$

În general, dacă $f(z, t)$ converge la $\varphi(z)$ pentru $t \to t_0$ finit, există pentru fiecare $z \in D$, un număr δ astfel că

$$|t - t_0| < \rho \text{ atrage } |f(z, t) - \varphi(z)| < \varepsilon \text{ în } D \times V_{t_0},$$

unde V_{t_0} este conținută în domeniul $|t - t_0| < \rho$.

Presupunînd că ρ este cel mai mare număr cu această proprietate, el va fi o funcție bine determinată de z și ε: $\rho = \rho(z, \varepsilon)$. Fie $\delta(\varepsilon) = \inf_{z \in D} \rho(z, \varepsilon)$. Convergența va fi uniformă dacă $\delta(\varepsilon) > 0$.

La fel în cazul $t_0 = \infty$.

Exemplu. $f(z, t) = \dfrac{2tz}{1 + t^2 z^2}$, t *real, nu converge uniform într-un disc* $|z| < 1$ *pentru* $t \to \infty$: Fiind dat $0 < \varepsilon < 1$, avem $\left| \dfrac{2tz}{1 + t^2 z^2} \right| \geqslant \dfrac{2t|z|}{1 + t^2 |z|^2} \geqslant \varepsilon$ pentru $t \geqslant 0$, dacă

$$\varepsilon t^2 |z|^2 - 2t|z| + \varepsilon \leqslant 0, \text{ sau } \frac{1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon t} \leqslant |z| \leqslant \frac{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon t};$$

de unde rezultă că, pentru un t oricît de mare, dacă $|z|$ verifică dubla inegalitate precedentă, vom avea $|f(z, t)| \geqslant \varepsilon$ și deci $f(z, t)$ nu converge uniform în $|z| < 1$ pentru $t \to \infty$. De altfel, este destul să luăm $\varepsilon < t \cdot |z| < \dfrac{1}{\varepsilon}$, ceea ce se poate satisface cu t oricît de mare.

2. Noțiunile precedente se aplică la șiruri de funcții, serii de funcții și produse infinite de funcții.

Un șir de funcții $f_n(z)$ într-o mulțime D este o funcție depinzînd de parametrul n. Singurul punct limită al mulțimii C este aici ∞. Șirul converge uniform la funcția $S(z)$ în D, dacă, dîndu-se $\varepsilon > 0$, există ν independent de z, așa ca

$$|f_n(z) - S(z)| < \varepsilon \text{ pentru } n > \nu \text{ în } D.$$

O serie $\sum_0^\infty f_n(z) = S(z)$ într-o mulțime D ($S(z)$ finită) este uniform convergentă în D, dacă șirul sumelor parțiale $S_n(z) = \sum_0^n f_\nu(z)$ converge uniform la $S(z)$; sau — ceea ce e tot una — dacă restul $r_n(z) = \sum_{n+1}^\infty f_n(z)$ converge uniform la 0.

[9] Toate vecinătățile din acest paragraf se înțeleg cu excluderea punctului considerat.

Un produs infinit $\prod_0^\infty f_n(z) = p(z)$ într-o mulțime D ($p(z)$ finit și $\neq 0$ și prin urmare tot așa $f_n(z)$)[10], este uniform convergent în D dacă șirul produselor parțiale $p_n(z) = \prod_0^n f_\nu(z)$ converge uniform la $p(z)$, sau dacă cîtul $q_n(z) = \prod_{n+1}^\infty f_\nu(z)$ converge uniform la 1. În acest caz cu condiția ca $p(z)$ să fie mărginit (vezi nr. 12).

Consecință imediată. Convergența uniformă a unei serii sau produs infinit nu este afectată dacă lăsăm la o parte un număr finit de termeni respectiv factori; pentru că resturile respectiv cîturile rămîn aceleași (cu începere de la un rang destul de ridicat).

3. **Teorema 1.** *(Criteriul Cauchy de convergență uniformă). Pentru ca $f(z, t)$, definită în $D \times C$ să conveargă uniform în D pentru $t \to t_0$, este necesar și suficient ca: pentru $\varepsilon > 0$ arbitrar să existe o vecinătate V_{t_0}, independentă de z, astfel ca*

$$|f(z, t') - f(z, t)| < \varepsilon \text{ în } D \times V_{t_0} \times V_{t_0}. \tag{51}$$

Să presupunem satisfăcută această condiție. Cum criteriul de convergență al lui Cauchy este împlinit în fiecare $z \in D$, în raport cu t, există $\lim_{t \to t_0} f(t, z) = \varphi(z)$ finită în D. Să facem acum $t' \to t_0$ în (1):

$$\lim_{t' \to t_0} |f(z, t') - f(z, t)| \leqslant \varepsilon \text{ în } D \times V_{t_0},$$

sau

$$|f(z, t) - \varphi(z)| \leqslant \varepsilon \text{ în } D \times V_{t_0},$$

ceea ce dovedește că $f(z, t) \to \varphi(z)$ uniform în D.

Reciproc, dacă $f(z, t) \to \varphi(z)$ uniform în D, avem, pentru $\varepsilon/2 > 0$, o vecinătate V_{t_0} așa ca

$$|f(z, t) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2}, \; |f(z, t') - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ în } D \times V_{t_0},$$

de unde

$$|f(z, t') - f(z, t)| < \varepsilon \text{ în } D \times V_{t_0}.$$

În cazul unui șir $S_n(z)$, (51) se scrie:

$$|S_{n+p}(z) - S_n(z)| < \varepsilon \text{ pentru } n > \nu(\varepsilon) \text{ și } p \text{ arbitrar în } D.$$

Sub această formă criteriul se aplică seriilor și produselor infinite.

4. Criteriile ce urmează sînt numai suficiente.

Teorema 2. *$f(z, t) \to \varphi(z)$ uniform în D pentru $t \to t_0$, dacă se poate găsi o vecinătate V_{t_0} și o funcție pozitivă $c(t)$ care tinde la zero pentru $t \to t_0$, astfel ca*

$$|f(z, t) - \varphi(z)| \leqslant c(t) \text{ în } D \times W_{t_0}.$$

[10] Se socotește convergent și un produs infinit cu un număr finit de factori care se anulează, dacă produsul celorlalți factori este convergent. Pentru punctele unde aceasta se întîmplă, valoarea produsului dat este 0.

Căci fiind dat $\varepsilon > 0$, există prin ipoteză o vecinătate $V_{t_0} \subset W_{t_0}$, în care $c(t) < \varepsilon$; vom avea deci

$$|f(z, t) - \varphi(z)| < \varepsilon \text{ în } D \times V_{t_0},$$

ceea ce dovedește convergența uniformă, V_{t_0} fiind independent de z.

Caz particular. $S_n(z) \to S(z)$ *uniform în* D, *dacă putem găsi un șir de constante* $c_n \to 0$, *astfel ca*

$$|S_n(z) - S(z)| < c_n \text{ în } D.$$

5. Teorema 3. *Dacă* $f(z, t)$ *este uniform convergentă, și* $|f(z, t)|$ *este uniform convergentă, în aceleași condiții.*

Rezultă imediat din

$$||f(z, t')| - |f(z, t)|| \leqslant |f(z, t') - f(z, t)|$$

aplicînd criteriul lui Cauchy (1).

Reciproca nu e adevărată.

Cazuri particulare: Dacă $S_n(z)$ *este uniform convergentă în* D, *și* $|S_n(z)|$ *este uniform convergentă în* D.

Dacă $\prod_0^\infty f_n(z)$ *este uniform convergentă în* D *și* $\prod_0^\infty |f_n(z)|$ *este uniform convergentă în* D. Într-adevăr produsele parțiale ale celui de al doilea produs infinit sînt $|p_n(z)|$.

Nu se poate afirma ceva analog pentru o serie $\Sigma f_n(z)$. Avem însă:

6. Teorema 4. *Dacă, în* D, $|f_n(z)| \leqslant |g_n(z)|$ *și* $\sum_{n=1}^\infty |g_n(z)|$ *este uniform convergent, atunci și* $\sum_{n=1}^\infty f_n(z)$ *este absolut și uniform convergent.*

Căci avem notînd cu S_n, S'_n sumele parțiale ale celor două serii:

$$|S_{n+p} - S_n| = |f_{n+1}(z) + \ldots + f_{n+p}(z)| \leqslant |f_{n+1}(z)| + \ldots + |f_{n+p}(z)| \leqslant S'_{n+p} - S'_n$$

și afirmația rezultă din criteriul lui Cauchy.

Cazuri particulare: Dacă seria modulelor $\sum_{n=1} |f_n(z)|$ *este uniform convergentă, seria* $\sum_{n=1} f_n(z)$ *e (absolut și) uniform convergentă (nu și invers).*

Dacă $|f_n(z)| < c_n$ *(constante* > 0*) și* Σc_n *e convergentă, atunci* $\sum_{n=0} f_n(z)$ *e absolut și uniform convergentă (Weierstrass).*

Se mai poate demonstra că:

Teorema 5. *Dacă seria modulilor* $\sum_{n=1} |f_n(z)|$ *e uniform convergentă, seria* $\sum_{n=0} f_n(z)$ *rămîne uniform convergentă și atunci cînd i se permută termenii (ceea ce, cum știm, nu-i schimbă nici suma).*

În adevăr, fiind dat $\varepsilon > 0$, avem pentru seria modulilor

$$\rho_\nu(z) = \sigma(z) - \sigma_\nu(z)$$

în D, cu ν destul de mare (această serie fiind **uniform convergentă**). Notăm cu S_n sumele parțiale ale seriei date și cu S_n^* pe **acelea ale seriei modificate** prin permutarea termenilor. Există o sumă S_μ^* **în care** intră toți termenii din S_ν, și aceasta rămîne adevărat și pentru sumele S_n^* cu $n > \mu$; evident, μ nu depinde de z.

Considerînd restul r_n^* al seriei modificate, avem deci, dacă $n \geqslant \mu$:

$$|r_n^*(z)| = \left|\sum_{n+1}^{\infty} f_p^*(z)\right| \leqslant \sum_{n+1}^{\infty} |f_p^*(z)| \leqslant \sum_{\nu+1}^{\infty} |f_p(z)| = \rho_\nu(z)$$

(deoarece ultima serie conține toți termenii seriei **penultime**). Astfel:

$$|r_n^*(z)| < \varepsilon$$

în D, pentru $n > \mu$ (independent de z), arată că $r_n^*(z) \to 0$ **uniform** și deci seria modificată este uniform convergentă.

7. Teoremele precedente se referă la serii **absolut** și **uniform** convergente. În cazuri cînd ele nu sînt aplicabile, putem încerca să ne servim de criteriile următoare:

Teorema 6. *Seria* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)g_n(z)$ *este* ***uniform convergentă în*** D, ***dacă***, *punînd* $S_n(z) = \sum_{n=0}^{n} f_\nu(z)$:

1°. *șirul* $S_n(z)g_{n+1}(z) = k_n(z)$;

2° *seria* $\sum_{n=0}^{\infty} S_n(z)[g_n(z) - g_{n+1}(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} h_n(z)$ ***converg uniform în*** D.

Ne sprijinim pe o identitate a lui Abel:

$$f_{n+1}g_{n+1} + \ldots + f_{n+p}g_{n+p} = (S_{n+1} - S_n)\,g_{n+1} + (S_{n+2} - S_{n+1})g_{n+2} +$$
$$+ \ldots + (S_{n+p} - S_{n+p-1})\,g_{n+p} =$$
$$= -S_n g_{n+1} + S_{n+1}(g_{n+1} - g_{n+2}) + \ldots + S_{n+p-1}(g_{n+p-1} - g_{n+p}) +$$
$$+ S_{n+p}g_{n+p}$$

sau

$$\sum_{n+1}^{n+p} f_\nu g_\nu = \sum_{n+1}^{n+p} S_\nu\,(g_\nu - g_{\nu-1}) - S_n g_{n+1} + S_{n+p}g_{n+p+1}. \tag{52}$$

Cu notațiile din enunț:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} f_\nu(z)g_\nu(z)\right| \leqslant \left|\sum_{n+1}^{n+p} h_\nu(z)\right| + |k_{n+p}(z) - k_n(z)|.$$

Prin ipoteză, conform criteriului lui Cauchy, **cele două sume din membrul** al doilea sînt $< \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n > \nu$ (independent de z), deci conform aceluiași criteriu, seria $\sum_1^{\infty} f_n(z)g_n(z)$ este uniform convergentă.

Din teorema precedentă decurg următoarele 4 cazuri particulare mai simple:

a. **(Abel).** $\sum_0^\infty f_n(z)g_n(z)$ *este uniform convergentă în* D, *dacă*:

1° $\sum_0^\infty f_n(z)$ *converge uniform în* D;

2° $|g_n(z)| < M$, *număr independent de* z *și* n;

3° *funcțiile* $g_n(z)$ *sînt reale și formează un șir monoton în* D (*necrescător sau nedescrescător cînd* n *crește*: $g_{n+1}(z) \leqslant g_n(z)$ *sau invers, pentru toate valorile* n).

Să notăm $r_n(z)$ restul seriei convergente $\sum_0^\infty f_n(z)$. În teorema precedentă putem înlocui $S_n(z)$ prin $r_n(z)$, căci punînd $f_{n+1} = r_n - r_{n+1}$, ..., identitatea (52) va fi înlocuită printr-o identitate analogă, cu semnul — înaintea membrului al doilea; iar restul demonstrației va rămîne neschimbat. Avem deci de arătat că seria $\sum r_n(z)[g_n(z) - g_{n+1}(z)] = \sum_0^\infty H_n(z)$ și șirul $r_n(z)g_{n+1}(z)$ converg uniform. În ce privește șirul, acesta reiese din faptul că $r_n(z) \to 0$ uniform și $|g_{n+1}(z)| < M$ (fix). Pentru serie avem, presupunînd șirul $g_n(z)$ necrescător:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} H_\nu\right| \leqslant \sum_{n+1}^{n+p} |r_\nu(z)|\,(g_\nu(z) - g_{\nu+1}(z)).$$

Prin ipoteză, $|r_n(z)| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$ pentru $n > \nu$ independent de z, deci

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} H_\nu\right| < \frac{\varepsilon}{2M}\sum_{n+1}^{n+p}(g_\nu(z) - g_{\nu+1}(z)) = \frac{\varepsilon}{2M}(g_n(z) - g_{n+p}(z)) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2M}(|g_n(z)| + |g_{n+p}(z)|) < \frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M = \varepsilon.$$

b. **(Du bois Reymond).** $\sum_0^\infty f_n(z)g_n(z)$ *converge uniform în* D *dacă*:

$$\left.\begin{array}{l} 1° \sum_0^\infty f_n(z) \\ 2° \sum_0^\infty |g_n(z) - g_{n+1}(z)| \end{array}\right\} \text{converg uniform în } D,$$

3° $|g_n(z)| < M$, *număr independent de* n *și* z.

Într-adevăr, aplicînd iar teorema generală cu $r_n(z)$ în loc de $S_n(z)$, vedem la fel că $r_n(z)g_{n+1}(z) \to 0$ uniform. Apoi luînd un $\varepsilon > 0$ fix, vom avea $|r_n(z)| < \varepsilon$ pentru $n > \nu$ fix, deci,

$$|H_n(z)| < \varepsilon\,|g_n(z) - g_{n+1}(z)|,$$

de unde se vede că $\sum_0^\infty H_n(z)$ este uniform convergent, în virtutea ipotezei 2°.

c. (**Dirichlet**). $\sum_0^\infty f_n(z)g_n(z)$ *convergent uniform în* D, *dacă*:

1° $|S_n(z)| < M$ *număr independent de* n *şi* z;
2° $g_n(z)$ *sînt reale şi formează un şir monoton în* D;
3° $g_n(z) \to 0$ *uniform în* D.

Într-adevăr, din 1° şi 3° urmează că $S_n(z)g_n(z) \to 0$ uniform în D. Apoi, presupunînd $g_n(z)$ necrescător, avem, dat $\varepsilon > 0$:

$$\left|\sum_{n+1}^{n+p} h_\nu(z)\right| < M(g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z)) < \varepsilon$$

în D pentru $n > \nu(\varepsilon)$, pentru că, după 2° şi 3°, avem $g_{n+1}(z) - g_{n+p}(z) < \frac{\varepsilon}{M}$ în D pentru $n > \nu(\varepsilon)$.

d. (**Dedekind**). $\sum_0^\infty f_n(z)g_n(z)$ *converg uniform în* D *dacă*:

1° $|S_n(z)| < M$, *număr independent de* n *şi* z;

2° $\sum_0^\infty |g_n(z) - g_{n+1}(z)|$ *converge uniform în* D;

3° $g_n(z) \to 0$ *uniform în* D.

Într-adevăr mai întîi $S_n(z)g_n(z) \to 0$ uniform din cauza ipotezelor 1° şi 3°, iar în al doilea rînd,

$$|h_n(z)| < M\,|g_n(z) - g_{n+1}(z)|$$

ne arată că $\sum_1^\infty h_n(z)$ converge uniform în virtutea ipotezei 2°.

8. Teorema 7. $f(z, t) \to \varphi(z)$ *uniform în* D *pentru* $t \to t_0$, *şi avem* $|\varphi(z)| > m > 0$ *(fix), atunci* $\log f(z, t) \to \log \varphi(z)$ *uniform în* D, *determinările logaritmilor fiind alese convenabil.*

Se ştie că $\log z$ este o funcţie uniform continuă dacă se ia în expresia sa $\theta_0 + 2k\pi + \eta < \arg z \leqslant \theta_0 + 2(k+1)\pi - \eta$ (θ_0, η şi k fixe). Prin urmare, dacă $\alpha \neq 0$, vom avea $|\log z - \log \alpha| < \varepsilon$ pentru $|z - \alpha| < \delta(\varepsilon)$, cu condiţia ca să luăm argumentele lui α şi z într-un acelaşi interval închis, de amplitudine $< 2\pi$. Numărul $\delta(\varepsilon)$ este evident independent de alegerea lui k. Să mai observăm că vom putea satisface condiţia precedentă dacă $|z - \alpha| < |\alpha|$ (vezi fig. 83).

Din cauza convergenţei uniforme, avem o vecinătate U_{t_0} astfel ca

$$|f(z, t) - \varphi(z)| < m$$

în $D \times U_{t_0}$ şi deci

$$|f(z, t) - \varphi(z)| < |\varphi(z)|,$$

în $D \times U_{t_0}$.

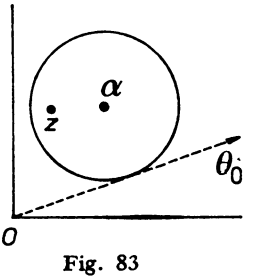

Fig. 83

Putem deci alege $\arg f(z, t)$ şi $\arg \varphi(z)$ în felul de mai sus, pentru fiecare $z \in D$. Funcţiile $\log f(z, t)$ şi $\log \varphi(z)$ fiind astfel definite, vom avea

$$|\log f(z, t) - \log \varphi(z)| < \varepsilon \text{ (dat)}$$

dacă

$$|f(z, t) - \varphi(z)| < \delta(\varepsilon),$$

dependent numai de ε. Dar, prin ipoteză, această inegalitate este satisfăcută pentru o vecinătate $V_{t_0} \subset U_{t_0}$, dependentă numai de $\delta(\varepsilon)$ (şi nu de z). Aşadar, $\log f(z, t) \to \log \varphi(z)$ uniform.

Teorema 8. *Dacă* $f(z, t) \to \psi(z)$ *uniform în* D, *pentru* $t \to t_0$, *atunci* $e^{f(z,t)} \to e^{\psi(z)}$ *uniform în* D.

Demonstraţie analogă cu cea de mai sus, bazată pe continuitatea funcţiei e^z.

Observaţie. Condiţia $|\varphi(z)| > m > 0$ poate fi înlocuită, prin condiţia echivalentă: $|f(z, t)| > \mu > 0$, μ număr independent de z, t, în $D \times U_{t_0}$. Într-adevăr, din cea dintîi urmează, luînd $\varepsilon < m$: $|f(z, t) - \varphi(z)| < \varepsilon$ în $D \times U_{t_0}$, deci

$$|f(z, t)| > |\varphi(z)| - \varepsilon > m - \varepsilon = \mu > 0 \text{ în } D \times U_{t_0}.$$

Invers, dacă această condiţie este satisfăcută, avem, luînd $\varepsilon < \mu$,

$$|\varphi(z)| > |f(z, t)| - \varepsilon > \mu - \varepsilon = m > 0 \text{ în } D \times U_{t_0}.$$

Cazuri particulare. Dacă $\prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) = p(z)$ *este uniform în* D *şi* $|p(z)| > m > 0$ *fix, avem* $\sum_{n=1}^{\infty} \log f_n(z) = \log p(z)$ *uniform în* D, *cu determinări convenabile ale logaritmilor.*

Dacă $\sum_{0}^{\infty} f_n(z) = q(z)$ *uniform în* D, *avem* $\prod_{n=0}^{\infty} e^{f_n(z)} = e^{q(z)}$, *uniform în* D.

Se poate adăuga că, dacă seria dată este, în plus, absolut convergentă şi produsul infinit va fi absolut convergent. Aceasta nu este decît definiţia convergenţei absolute pentru produse infinite: un produs infinit este absolut convergent dacă seria logaritmilor factorilor este absolut convergentă.

Convergenţa absolută astfel definită atrage convergenţa simplă şi comutativitatea produsului. Nu are sens să definim convergenţa absolută a unui produs prin condiţia ca produsul modulilor factorilor să fie convergent, căci această condiţie este consecinţă a convergenţei simple.

9. Teorema 9. $\prod_{0}^{\infty} (1 + f_n(z))$ *converge absolut şi uniform în* D *dacă* $\sum_{0}^{\infty} f_n(z)$ *converge uniform în* D.

Putem presupune $\sum_{0}^{n} |f_\nu(z)| < 1$ pentru orice n. Căci din cauza convergenţei uniforme seria considerată va avea un rest $r_p(z) < 1$ şi putem neglija termenii de rang $< p$ ai seriei, ca şi factorii corespunzători ai produsului fără a afecta convergenţa uniformă. Va fi destul să dovedim convergenţa uniformă a seriei

$$p_0 + (p_1 - p_0) + \ldots + (p_n - p_{n-1}) + \ldots$$

(sumele parțiale ale ei fiind tocmai produsele parțiale p_n). Or, avem

$$|p_n(z) - p_{n-1}(z)| = |p_{n-1}(z) f_n(z)|,$$

$$|p_n(z)| < (1 + |f_0(z)|) \dots (1 + |f_n(z)|) < e^{|f_0(z)|+\dots+|f_n(z)|} < e;$$

deci

$$|p_n(z) - p_{n-1}(z)| < e\,|f_n(z)|$$

ceea ce demonstrează afirmația privitoare la convergența uniformă. În ce privește convergența absolută a produsului, se poate arăta că ea este chiar echivalentă cu aceea a seriei $\sum_0^\infty f_n(z)$. Aceasta rezultă din faptul că $\log(1 + f_n) = f_n g_n$, unde $g_n \to 1$, (fiindcă $f_n \to 0$); astfel seriile $\sum|\log(1 + f_n)|$ și $\sum|f_n|$ sînt convergente în același timp. (Și convergența uniformă se poate dovedi pe această cale.)

10. Vom da cîteva proprietăți simple ale convergenței uniforme.

Teorema 10. *Dacă $f(z, t)$ converge uniform pentru $t \to t_0$, într-un număr finit de mulțimi $D_1, \dots, D_m$, converge uniform și în $D_1 \cup \dots \cup D_m$.*

Căci inegalitatea (51) va avea loc în

$$D \times V_{t_0}^{(1)}, \dots, D \times V_{t_0}^{(m)}, \text{ deci și în } D \times V_{t_0}, \text{ unde } V_{t_0} \subset V_{t_0}^{(1)} \cap \dots \cap V_{t_0}^{(m)}.$$

Observație. Rezultă că funcțiile limită relative la $D_1, \dots, D_m$ vor fi egale în părțile comune acestor mulțimi (și vor constitui o funcție în reuniunea acestor mulțimi). Teorema aceasta ne permite să simplificăm cercetarea convergenței uniforme prin împărțirea mulțimii date în mulțimi potrivite, care vor putea fi considerate separat.

11. Se zice că $f(z, t)$ este *uniform mărginită* în D și t_0 dacă există un număr M și o vecinătate V_{t_0} așa fel ca $|f(z, t)| < M$ în $D \times V_{t_0}$.

Dacă $f(z, t) \to \varphi(z)$ pentru $t \to t_0$, avem din inegalitatea precedentă $|\varphi(z)| \leqslant M$: funcția limită a unei funcții $f(z, t)$ uniform mărginite în D și punctul limită t_0, este mărginită în D.

Teorema 11. *Dacă $f(z, t)$ este uniform convergentă în D pentru $t \to t_0$ și mărginită pentru fiecare t dintr-o vecinătate U_{t_0}, ea este uniform mărginită în D și t_0, și deci funcția limită, este mărginită în D.*

Rezultă din criteriul lui Cauchy (51) luînd t' fix:

$$|f(z, t)| < |f(z, t')| + \varepsilon$$

în $D \times V_{t_0}$ ($V_{t_0} \subset U_{t_0}$).

Consecință. Dacă o serie $\sum_1^\infty f_n(z)$ este uniform convergentă în D și $f_n(z)$ sînt mărginite în D, atunci suma seriei este mărginită în D. La fel pentru produse infinite.

Teorema 12 (reciprocă). *Dacă $f(z,t) \to \varphi(z)$ pentru $t \to t_0$, uniform în D, iar $\varphi(z)$ este mărginit în D, atunci $f(z, t)$ este uniform mărginit în D și t_0.*

Avem $|f(z, t) - \varphi(z)| < \varepsilon$ într-o vecinătate V_{t_0} și D, deci $|f(z, t)| < |\varphi(z)| + \varepsilon < M$ fix în $D \times V_{t_0}$.

12. **Teorema 13.** *Dacă* $\left.\begin{matrix} f(z,\ t) \to \varphi(z) \\ g(z,\ t) \to \psi(z) \end{matrix}\right\}$ *uniform în* D *pentru* $t \to t_0$, *atunci,*

1° $f + g \to \varphi + \psi$,

2° $fg \to \varphi\psi$ *dacă* φ *şi* ψ *sînt mărginite în* D,

3° $\frac{1}{g} \to \frac{1}{\psi}$ dacă $|\psi| > m > 0$ *(fix) în* D, *uniform în* D.

1° Demonstraţia este imediată

2° $|fg - \varphi\psi| = |g(f - \varphi) + \varphi(g - \psi)| < M|f - \varphi| + N|g - \psi|$, unde M şi N sînt numere fixe, într-o vecinătate V_{t_0} şi D (existenţa lui M şi N rezultă din ultima teoremă).

3° $\left|\frac{1}{g} - \frac{1}{\psi}\right| < \frac{|g - \psi|}{m\mu}$,

unde m, μ sînt numere fixe, într-o vecinătate V_{t_0} şi D (pentru existenţa lui μ vezi observaţia de la nr. 8).

Caz particular. Dacă $f(z, t)$ *converge uniform în* D *pentru* $t \to t_0$ *şi* $g(z)$ *este mărginit în* D *(sau o constantă), atunci* $g(z)f(z, t)$ *converge uniform în* D.

Consecinţe. Dacă $\sum_0^\infty f_n(z)$ *este uniform convergent în* D, $f_n(z) \to 0$ *uniform în* D. *Căci* $f_n = S_n - S_{n-1} \to 0$ *uniform.*

Dacă $\prod_0^\infty f_n(z) = p(z)$ *uniform în* D, *şi* $|p(z)| > m > 0$ *în* D, *atunci cîtul* $q_n(z) \to 1$ *uniform în* D.

Căci $q_n(z) = \frac{p(z)}{p_n(z)}$, unde $|p_n(z)| > \mu > 0$, pentru $n > \nu$ (μ independent de n şi z), conform observaţiei de la nr. 8. Deci $|q_n(z) - 1| < \frac{|p(z) - p_n(z)|}{\mu}$, de unde rezultă afirmaţia.

În aceleaşi condiţii, $f_n(z) \to 1$ *uniform în* D.

Vom avea $1 - \varepsilon < |q_n(z)| < 1 + \varepsilon$ cu $\varepsilon < 1$, pentru $n > \nu_0$ fix şi prin urmare $f_n(z) = \frac{q_{n-1}(z)}{q_n(z)} \to 1$ uniform (după 2 şi 3).

Dacă $\prod_0^\infty f_n(z)$ *este convergentă şi* $p(z)$ *mărginit în* D, *iar cîtul* $q_n(z) \to 1$ *uniform în* D, *atunci produsul este uniform convergent.*

Se vede scriind $p_n(z) = \frac{q(z)}{q_n(z)}$ şi aplicînd 2, 3.

Teorema 14. *(Porter). Fie* $f(t, \tau)$ *o funcţie definită în* $A \times B$, t_0 *şi* τ_0 *puncte limită ale mulţimilor* A, *respectiv* B. *Dacă:*

1° $f(t, \tau) \to f(t)$ *pentru* $\tau \to \tau_0$, *uniform cu privire la* $t \in A$,

2° $f(t, \tau) \to \varphi(\tau)$ *pentru* $t \to t_0$;

atunci $f(t)$ *converge pentru* $t \to t_0$ *şi* $\lim_{t \to t_0} f(t) = \lim_{\tau \to \tau_0} \varphi(\tau)$.

Prin ipoteză, fiind dat $\varepsilon > 0$, avem

$$|f(t,\tau) - f(t)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pentru } \tau \in V\tau_0 \text{ independentă de } t \in A,$$

(53)

$$|f(t,\tau) - \varphi(\tau)| < \frac{\varepsilon}{4} \text{ pentru } t \in U_{t_0}(\tau) \text{ dependentă de } \tau.$$

Dovedim că $f(t)$ converge pentru $t \to t_0$:

$$|f(t) - f(t')| \leqslant |f(t) - f(t,\tau)| + |f(t,\tau) - \varphi(\tau)| +$$
$$+ |\varphi(\tau) - f(t',\tau)| + |f(t',\tau) - f(t')| < \varepsilon$$

pentru $t, t' \in U_{t_0}(\tau)$ și $\tau \in V_{\tau_0}$ (fixat). Aceasta arată, după criteriul lui Cauchy, că $f(t) \to l$ (finit) pentru $t \to t_0$. Făcînd acum $t \to t_0$ în (53), avem:

$$|\varphi(\tau) - l| < \varepsilon \text{ pentru } \tau \in V_{\tau_0},$$

ceea ce arată că $\varphi(\tau) \to l$ pentru $\tau \to \tau_0$. **Q.E.D.**

Teorema se mai scrie:

$$\lim_{t \to t_0} \lim_{\tau \to \tau_0} f(t,\tau) = \lim_{\tau \to \tau_0} \lim_{t \to t_0} f(t,\tau);$$

este o teoremă de intervertire a limitelor.

Teorema 15. *Fie $f(t,\tau,z)$ o funcție definită în $A \times B \times D$ și condițiile teoremei precedente satisfăcute uniform cu privire la $z \in D$. Atunci $f(t,z)$ și $\varphi(\tau,z)$ converg uniform la aceeași funcție limită $\psi(z)$.*

Demonstrația este aceeași ca mai sus, vecinătățile V_{τ_0} și $U_{t_0}(\tau)$ fiind independente de z.

Aplicații

Teorema 16. *Fie $f(t,\tau)$ definită în $A \times B$; t_0 și τ_0 puncte limită ale mulțimii A, respectiv B. Dacă $f(t,\tau) \to f(t)$ uniform, pentru $\tau \to \tau_0$, și $f(t,\tau)$ este funcție continuă de t în t_0, pentru orice $\tau \in B$; atunci $f(t)$ este funcție continuă în t_0.*

Aici condiția 2° este satisfăcută pentru că $f(t,\tau) \to f(t_0,\tau) = \varphi(\tau)$ pentru $t \to t_0$. Apoi avem prin ipoteză $\varphi(\tau) \to f(t_0)$ pentru $\tau \to \tau_0$. Deci $f(t) \to f(t_0)$ pentru $t \to t_0$, adică $f(t)$ este continuă în t_0.

Cazuri particulare. Dacă $S_n(t)$ sînt continue și $S_n(t) \to S(t)$ uniform, atunci $S(t)$ este continuă.

Dacă $\sum_0^\infty f_n(t)$ este uniform convergentă și $f_n(t)$ continue, suma seriei este o funcție continuă. Analog pentru produse infinite.

Teorema 17. *Fie $S(t,z) = \sum_0^\infty f_n(t,z)$ uniform convergentă cu privire la t și z în $A \times D$; și fie $f_n(t,z) \to \varphi_n(z)$ pentru $t \to t_0$, uniform cu privire la z în D. Atunci $\sum_0^\infty \varphi_n(z)$ converge uniform în D, $S(t,z)$ converge uniform în D pentru $t \to t_0$ și $\sum_0^\infty \varphi_n(z) = \lim_{t \to t_0} S(t,z)$.*

Caz particular. Fie $S_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{n\nu}(z)$ *uniform convergentă cu privire la* $z \in D$ *şi* ν; *fie* $f_{n\nu}(z) \to \varphi_n(z)$ *pentru* $\nu \to \infty$, *uniform cu privire la* z. *Atunci* $\sum_0^\infty \varphi_n(z)$ *converge uniform în* D, $S_\nu(z)$ *converge uniform în* D *şi* $\sum_0^\infty \varphi_n(z) = \lim_{\nu\to\infty} S_\nu(z)$.

13. Teorema 18. *Dacă* $f(z, t) \to \varphi(z)$ *pentru* $t \to t_0$, *uniform în* D, *şi* $f(z, t)$ *este continuă în raport cu* z *pentru orice* t *într-o vecinătate* U_{t_0}, *atunci* $\varphi(z)$ *este continuă în* D.

Fiind dat $\varepsilon > 0$, îi corespunde o vecinătate $V_{t_0} \subset U_{t_0}$ aşa fel că

$$|f(z, t) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |f(z', t) - \varphi(z')| < \frac{\varepsilon}{3}$$

în $D \times V_{t_0}$. Luînd pe t fix, avem încă

$$|f(z', t) - f(z, t)| < \frac{\varepsilon}{3} \text{ pentru } z' \in U_z,$$

$f(z, t)$ fiind continuă în z. Urmează

$$|\varphi(z') - \varphi(z)| < \varepsilon \text{ pentru } z' \in Uz_z.$$

Cazuri particulare. Dacă $S_n(z) \to S(z)$ *uniform în* D *şi* $S_n(z)$ *sînt continue în* D, *atunci* $S(z)$ *este continuă în* D.

Dacă $\sum_0^\infty f_n(z) = S(z)$ *uniform în* D *şi* $f_n(z)$ *sînt continui în* D, *atunci* $S(z)$ *este continuă în* D.

14. Teorema 19. *Dacă*

1° C *este o curbă rectificabilă în planul* (z);

2° $f(z, t)$ *este continuă în raport cu* z *pe curba* C, *pentru orice* t *într-o vecinătate* U_{t_0}; *şi*

3° $f(z, t) \to \varphi(z)$ *pentru* $t \to t_0$ *uniform pe* C, *atunci*

$$\int_C f(z, t)\, dz \to \int_C \varphi(z)\, dz.$$

Prima integrală există pentru $t \in U_{t_0}$ în virtutea ipotezei 2°, iar a doua integrală există în virtutea teoremei precedente.

Fie s lungimea curbei C şi $\varepsilon > 0$. După 3°, avem, pentru vecinătatea U_{t_0} convenabil aleasă

$$|f(z, t) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{s}$$

în $C \times U_{t_0}$, deci

$$\left|\int_C f(z, t)dz - \int_C \varphi(z)\, dz\right| = \left|\int_C [f(z, t) - \varphi(z)]\, dz\right| < s \cdot \frac{\varepsilon}{s} = \varepsilon$$

în V_{t_0}; ceea ce dovedeşte afirmaţia. Aceasta se mai scrie:

$$\lim_{t\to t_0} \int_C f\, dz = \int_C \lim_{t\to t_0} f\, dz$$

(simbolii $\int_C$ şi $\lim_{t\to t_0}$ sînt permutabili în condiţiile teoremei).

Consecință. *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = S(z)$ *uniform pe curba rectificabilă* C *și* $f_n(z)$ *sînt continue pe această curbă, avem*

$$\int_C S(z)\,dz = \sum_{n=0} \int_C f_n(z)\,dz.$$

(Seria poate fi integrată termen cu termen.)

Condiția teoremei fiind satisfăcută de sumele parțiale $S_n(z)$, avem

$$\int_C S(z)\,dz = \int_C \lim_{n\to\infty} S_n(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} \int_C S_n(z)dz =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{n=0}^{n} \int_C f(z)\,dz = \sum_{n=0}^{n} \int_C f_n(z)\,dz.$$

15. Teorema 20. *Dacă* $f(z, t)$ *este funcție olomorfă de* z *în domeniul* D, *pentru orice* t *într-o vecinătate* U_{t_0} *și* $f(z, t) \to \varphi(z)$ *pentru* $t \to t_0$, *uniform în* D, *atunci:*

1° $\varphi(z)$ *este olomorfă în* D,

2° $\frac{\partial}{\partial z} f(z, t)$ *converge uniform la* $\varphi'(z)$ *în orice domeniu închis* $\bar{D}_1 \subset D$ *(sau: în interiorul lui* D*).*

1°. După formula lui Cauchy $f(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta, t)}{\zeta - z}\,d\zeta$, Γ fiind un cerc în D, de centru z (fix). Deci, aplicîndu-se teorema precedentă, deoarece integrandul este continuu în ζ pe Γ (unde $\zeta \neq z$), obținem

$$\varphi(z) = \lim_{t\to t_0} \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta, t)}{\zeta - z}\,d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\lim_{t\to t_0} f(\zeta, t)}{\zeta - z}\,d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta.$$

După o teoremă cunoscută, această integrală este o funcție olomorfă de z în cercul Γ, deci și în centrul său z. Astfel $\varphi(z)$ este olomorfă în D.

2°. Fie $\rho_0 < \rho(\bar{D}_1, \text{fr } D)$ și Γ cercurile de centre $z \in \bar{D}_1$ și raze ρ_0; ele se află în D. Fiind dat $\varepsilon > 0$, există o vecinătate V_{t_0} astfel că $|f(z, t) - \varphi(z)| < \varepsilon\rho_0$ în $D \times V_{t_0}$, și avem (în virtutea formulei lui Cauchy)

$$\left| \frac{\partial}{\partial z} f(z, t) - \frac{d}{dz} \varphi(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(\zeta, t) - \varphi(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\,d\zeta \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi\rho_0 \cdot \frac{\rho_0\varepsilon}{\rho_0^2} = \varepsilon$$

în $V_{t_0} \times D$. Aceasta demonstrează afirmația 2°.

Cazuri particulare. (Weierstrass). *Dacă* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = S(z)$ *uniform în* D *și* $f_n(z)$ *sînt olomorfe în* D, *atunci:* 1° $S(z)$ *este olomorfă în* D; 2° $S'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$

în orice $\bar{D}_1 \subset D$ *(seria dată poate fi derivată termen cu termen)*; 3° *această serie este uniform convergentă în orice* $\bar{D}_1 \subset D$.

Se va observa deosebirea dintre această teoremă și o teoremă din analiza reală, în care se presupune că seria derivatelor este uniform convergentă. Această teoremă este de altfel adevărată și în complex.

Dacă $\prod_0^\infty f_n(z) = p(z)$ *uniform în* D *și* $f_n(z)$ *sînt olomorfe în* D, *atunci:* 1° $p(z)$ *este olomorfă în* D; 2° $p'(z) = \lim_{n\to\infty} p_n'(z)$ *uniform în* $\bar{D}_1$, 3° $\dfrac{p'(z)}{p(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{f_n'(z)}{f_n(z)}$ *uniform în orice* $\bar{D}_1 \subset D$, *care nu conține zerouri.*

Observație. Se poate deduce și din teorema lui Weierstrass considerînd seria $P_0 + (P_1 - P_0) + \dots$.

16. Lema 1. *Dacă* D *e un domeniu și* F *un continuu conținut în* D, *putem acoperi* F, *cu o reuniune de pătrate formînd un domeniu închis* $\bar{\Delta} \subset D$ ($F \subset \bar{\Delta} \subset D$).

Aplicăm pe D o rețea de pătrate de diagonală $< \rho_0 = \rho(F, \text{fr } D)$ și fie $\bar{\Delta}$ mulțimea formată de pătratele închise ale rețelei, care au puncte comune cu F. $\bar{\Delta}$ este conex, fiindcă în cazul contrar ar avea cel puțin două componente disjuncte, care ar conține componente disjuncte ale lui F și acesta n-ar fi un continuu. Evident, $\bar{\Delta} \subset D$.

Lema 2. *Dacă* D *este un domeniu și* $F \subset D$ *un continuu, mărginit, există un număr* K *astfel că două puncte oarecare din* F *pot fi unite printr-o linie poligonală conținută în* D *și de lungime* $< K$.

Considerăm domeniul Δ din lema 1 și fie N numărul pătratelor din care este format. Fie $\alpha, \beta \in F$. Δ fiind conex, există un șir conex de pătrate din Δ, $Q_0, Q_1, \dots, Q'$ care duce de la pătratul Q_0 în care se află α, la pătratul Q' în care se află β. Vom lăsa la o parte eventualele bucle ale șirului. (Dacă de exemplu $Q_{n+p} = Q_n$, lăsăm la o parte $Q_{n+1}, \dots, Q_{n+p}$ și continuăm cu Q_{n+p+1}). Șirul astfel obținut va fi conex și format din pătrate distincte și în el putem uni α și β printr-o linie frîntă care va avea numai cîte un segment al liniei în fiecare pătrat. Cum numărul acestor pătrate este $\leqslant N$, lungimea drumului de la α la β va fi $< N\rho_0 = K$, număr independent de α și β. Acest drum va fi în D.

17. Teorema 21. *Dacă*

1° $f(z, t)$ *este olomorfă în domeniul mărginit* D, *ca funcție de* z, *pentru* $t \in U_{t_0}$,

2° $f(z, t) \to \varphi(z)$ *pentru* $t \to t_0$ *uniform în* D, *și*

3° $\int_{z_0}^{z} f(\zeta, t)\,d\zeta$ *este uniformă în* D *pentru orice* $t \in U_{t_0}$, *atunci avem în* D

$$\int_{z_0}^{z} \varphi(\zeta)\,d\zeta = \lim_{t\to t_0} \int_{z_0}^{z} f(\zeta, t)\,d\zeta,$$

uniform în orice domeniu închis $\bar{D}_1 \subset D$ *(în interiorul lui* D*).*

[Prima parte a enunțului rezultă din teorema de la nr. 14.]

Fie K numărul din lema precedentă. Din cauza ipotezei 2°, $|f(z, t) - \varphi(z)| < \frac{\varepsilon}{K}$ în $D \times V_{t_0}$ $(V_{t_0} \subset U_{t_0})$. Acum, luînd integralele pe aceeași curbă de lungime $< K$,

$$\left|\int_{z_0}^{z} f(\zeta, t)\mathrm{d}\zeta - \int_{z_0}^{z} \varphi(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right| = \left|\int_{z_0}^{z} [f(\zeta, t) - \varphi(\zeta)]\,\mathrm{d}\zeta\right| <$$

$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon,$$

în $\bar{D}_1 \times V_{t_0}$, ceea ce dovedește a doua afirmație a teoremei.

Observație. $\varphi(z)$ este olomorfă după teorema lui Morera.

Caz particular. Dacă $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = S(z)$ *uniform în domeniul mărginit* D, $f_n(z)$ *sînt olomorfe în* D *și* $\int_{z_0}^{z} f_n(\zeta)\mathrm{d}\zeta$ *sînt uniforme în* D, *atunci avem în* D,

$$\int_{z_0}^{z} S(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{z_0}^{z} f_n(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta,$$

uniform în orice domeniu închis $\bar{D}_1 \subset D$.

Se poate adăuga că, dacă seria dată este, în plus, absolut convergentă, tot așa este și seria integralelor (în D). Într-adevăr, seria dată rămîne uniform convergentă oricum i-am permuta termenii și prin urmare și seria integralelor; ori de aici rezultă convergența absolută a acesteia, știindu-se că într-o serie care nu este absolut convergentă putem permuta termenii astfel ca seria să-și piardă convergența (teorema lui Riemann).

18. Teorema 22. *Dacă* $f(z, t)$ *este continuă ca funcție de* (z, t) *în* $D \times C$, C *fiind o curbă rectificabilă, atunci*

$$F(z) = \int_C f(z, t)\,\mathrm{d}t$$

este o funcție continuă în D, *unde* D *este un domeniu mărginit.*

[Ajunge să demonstrăm aceasta pentru un domeniu mărginit $\bar{D}_1 \subset D$.] Atunci, $f(z, t)$ fiind uniform continuă în $\bar{D}_1 \times C$ (mulțime închisă) (vezi fig. 84), $f(z, t) \to f(z_0, t)$ pentru $z \to z_0$ uniform pe C. După teorema de la nr. 14:

$$\lim_{z \to z_0} F(z) = \int_C \lim_{z \to z_0} f(z, t)\,\mathrm{d}t = \int_C f(z_0, t)\,\mathrm{d}t = F(z_0),$$

ceea ce arată că $F(z)$ este continuă în orice punct z_0 din $\bar{D}_1$ și deci din D.

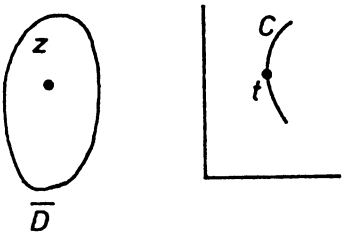

Fig. 84

19. Teorema 23 *(De la Vallée-Poussin). Dacă* $f(z, t)$ *este olomorfă ca funcție de* z *și continuă ca funcție de* (z, t) *în* $D \times C$, D *fiind un domeniu și* C *o curbă rectificabilă, atunci*

$$F(z) = \int_C f(z, t)\,\mathrm{d}t$$

este olomorfă în D şi are derivata

$$F'(z) = \int_C \frac{\partial f}{\partial z}\, dt.$$

Prima integrală există pentru că integrandul este funcţie continuă de t. Avem $(z + \Delta z$ fiind luat în $D)$:

$$\frac{\Delta F}{\Delta z} = \int_C \frac{f(z + \Delta z, t) - f(z, t)}{\Delta z}\, dt.$$

Cum $f(z, t)$ este olomorfă în punctul z, avem:

$$f(z, t) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta, t)}{\zeta - z}\, d\zeta \qquad (t \in C),$$

Γ fiind un cerc de centru z şi rază r, conţinut în D (vezi fig. 85). De asemenea

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta, t)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta \qquad (t \in C).$$

După teorema precedentă, această integrală este o funcţie continuă de t pe C (integrandul fiind funcţie continuă de (t, ζ) pe $C \times \Gamma$), deci şi $\int_C \frac{\partial f}{\partial z}\, dt$ există. Avem acum

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - \int_C \frac{\partial f}{\partial z}\, dt\right| = \left|\int_C \left[\frac{f(z + \Delta z, t) - f(z, t)}{\Delta z} - \frac{\partial f}{\partial z}\right] dt\right| =$$

$$= \left|\int_C \frac{dt}{2\pi i}\int_\Gamma \left[\frac{1}{(\zeta - z - \Delta z)\,\Delta z} - \frac{1}{(\zeta - z)\,\Delta z} - \frac{1}{(\zeta - z)^2}\right] f(\zeta, t)\, d\zeta\right| =$$

$$= \left|\int_C \frac{dt}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\Delta z f(\zeta, t)\, d\zeta}{(\zeta - z)^2 (\zeta - z - \Delta z)}\right|.$$

Prin ipoteză $f(z, t)$ este continuă ca funcţie de (z, t) în $\Gamma \times C$, deci este mărginită: $|f(z, t)| < M$ fix. Luînd punctul $z + \Delta z$ într-un disc de centru

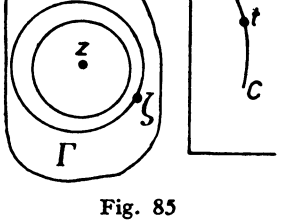

Fig. 85

z şi rază $r - \delta$ (interior lui Γ), vom avea pentru orice $\zeta \in \Gamma$:

$$|\zeta - z| = r, \quad |\zeta - z - \Delta z| > \delta,$$

deci

$$\left|\frac{\Delta F}{\Delta z} - \int_C \frac{\partial f}{\partial z}\, dt\right| < s \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^2 \delta}\, |\Delta z| = \frac{Ms}{r\delta}\, |\Delta z| \to 0$$

pentru $\Delta z \to 0$. Aşadar

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = \int_C \frac{\partial f}{\partial z}\, dt,$$

ceea ce stabileşte teorema.

20. Teorema 24. *Fie C şi Γ curbe rectificabile, conţinute în domeniile D din planul (z) şi E din planul (t); $f(z, t)$ o funcţie olomorfă în $D \times E$ ca funcţie de z şi ca funcţie de t şi $f(z, t)$ continuă în (z, t); atunci*

$$\int_C dz \int_\Gamma f(z, t)\, dt = \int_\Gamma dt \int_C f(z, t) dz.$$

După teorema lui De la Vallée-Poussin, $\int_\Gamma f(z, t)\, dt$ este o funcţie olomorfă de z în D, deci prima integrală considerată în enunţ există; şi tot aşa a doua.

Fie t_0 şi τ extremităţile curbei Γ. Vom presupune că această curbă are capătul variabil într-o vecinătate $V_\tau \subset E$ (fig. 86). Atunci, după teorema 1 § 75, $\int_\Gamma f dt$, fiind uniformă în V_τ, este o funcţie olomorfă $\varphi(z, t)$, avînd ca derivată în extremitatea τ a curbei Γ, $f(z, \tau)$. După teorema lui De la Vallée-Poussin aceeaşi integrală este totodată o funcţie olomorfă de z, şi tot după această teoremă, $\int_C dz \int_\Gamma f(z, t)\, dt = \int_C \varphi(z, \tau)\, dz$ este o funcţie olomorfă de τ, avînd derivata

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \int_C dz \int_\Gamma f(z, t)\, dt = \int_C f(z, \tau)\, dz.$$

Aplicînd teorema 11 din § 73, putem scrie:

$$\int_\Gamma d\tau \int_C f(z, \tau) dz = \left[\int_C dz \int_\Gamma f(z, t)\, dt \right]_{t_0}^{\tau}.$$

De aici rezultă formula de demonstrat observînd că integrala din membrul al doilea este nulă pentru $\tau = t_0$ şi apoi schimbînd în primul membru variabila de integrare τ în t.

21. *Integrale improprii.* În definiţia unei integrale $\int_C f(z)\, dz$ este implicat că drumul C este mărginit şi funcţia $f(z)$ mărginită pe C. În unele cazuri, în care aceste condiţii nu sînt îndeplinite, se poate defini o noţiune de *integrală improprie*, analogă cu aceea din analiza reală.

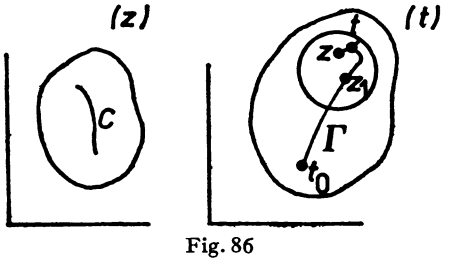

Fig. 86

Fie α şi β extremităţile drumului C, pe care îl vom presupune simplu Dacă $\int_{\widehat{\alpha\zeta}} f(z) dz$ există pentru orice subarc $\widehat{\alpha\zeta}$ al lui C, cu excepţia $\zeta = \beta$, vom defini:

$$\int_C f(z)\, dz = \lim_{\zeta \to \beta} \int_{\widehat{\alpha\beta}} f(z)\, dz,$$

cînd această limită există şi este finită.

Vom observa că, în cazul cînd $\int_C f(z)\,dz$ există ca integrală ordinară, C fiind rectificabilă și $f(z)$ continuă, relația precedentă este adevărată, căci

$$\left|\int_C f\,dz - \int_{\widehat{\alpha\zeta}} f\,dz\right| = \left|\int_{\widehat{\zeta\beta}} f\,dz\right| < Ms(\widehat{\zeta\beta}) \to 0$$

(unde $|f(z)| < M$ pe C și $s(\widehat{\zeta\beta})$ este lungimea arcului $\widehat{\zeta\beta}$).

Vom folosi integrala improprie în condițiile următoare: Arcul C este regulat (chiar și în β), $f(z)$ continuă și finită pe C cu excepția punctului β.

După criteriul lui Cauchy aplicat funcției de ζ $\int_{\widehat{\alpha\zeta}} f(z)\,dz$, putem spune:

Teorema 25. *Integrala improprie există (e convergentă) atunci și numai atunci cînd, pentru orice $\varepsilon > 0$ există o vecinătate U_β astfel ca*

$$\left|\int_{\widehat{\zeta\zeta'}} f(z)\,dz\right| < \varepsilon \quad \textit{pentru } \zeta,\ \zeta' \textit{ în } U_\beta \cap C.$$

Următoarele criterii suficiente sînt de multe ori utile:

A. β *finit. Integrala improprie e convergentă dacă se poate găsi un număr $\alpha < 1$ astfel că $(z-\beta)^\alpha f(z)$ e mărginit în jurul lui $z = \beta$ (în particular dacă are limită finită pentru $z \to \beta$).*

Arcul C fiind regulat, se știe că există un subarc $\widehat{\gamma\beta}$ pe care raza vectoare $\rho = |z-\beta|$ poate fi luată ca parametru normal. Pe arcul $\widehat{\gamma\beta}$, $\frac{ds}{d\rho}$ este deci mărginit; fie $\frac{ds}{d\rho} < \mu$. Prin ipoteză avem $|(z-\beta)^\alpha f(z)| < M$ sau $|f(z)| < \frac{M}{\rho^\alpha}$. Astfel, luînd ζ și ζ' într-o vecinătate U_β de rază r, avem

$$\left|\int_{\widehat{\zeta\zeta'}} f(z)\,dz\right| < \int_s^{s'} |f_C|\,ds < \int_0^r |f_C|\,\frac{ds}{d\rho}\,d\rho < M\mu\int_0^r \frac{d\rho}{\rho^\alpha} = \frac{M\mu}{1-\alpha}\,r^{1-\alpha} < \varepsilon$$

pentru r destul de mic. Integrala improprie este deci convergentă.

B. $\beta = \infty$. *Integrala improprie este convergentă dacă se poate găsi un număr $a > 1$ astfel ca $z^a f(z)$ să fie mărginit la infinit (și în particular să aibă limită finită pentru $z \to \infty$).*

Știm că există un subarc $\widehat{\gamma\infty}$ pe care putem lua drept parametru normal $\rho = |z|$ și avem $\frac{ds}{d\rho} < \mu$ (fix). Apoi $|z^a f(z)| < M$ (fix) sau $(f(z)| < \frac{M}{\rho^a}$. Urmează ca mai sus

$$\left|\int_{\widehat{\zeta\zeta'}} f(z)\,dz\right| < \int_r^\infty |f_C|\,\frac{ds}{d\rho}\,d\rho < M\mu\int_r^\infty \frac{d\rho}{\rho^a} = \frac{M\mu}{a-1}\,\rho^{1-a}$$

pentru r destul de mare.

22. Să considerăm o integrală improprie care depinde de un parametru z ce ia valori într-un domeniu D:

$$\int_C f(t, z)\,\mathrm{d}t = \lim_{\tau \to \beta} \int_{\widehat{\alpha\tau}} f(t, z)\,\mathrm{d}t \quad (\tau \in C),$$

și să presupunem că C nu depinde de z.

Vom zice că această integrală este *uniform convergentă* în D, dacă integrala din membrul al doilea, care este o funcție $\psi(z, \tau)$ tinde uniform în D către integrala din membrul întîi care este o funcție $\varphi(z)$. Aceasta înseamnă: **Fiind dat $\varepsilon > 0$, există o vecinătate U_β independentă de z, astfel că**

$$|\varphi(z) - \Psi(z, \tau)| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad \tau \in U_\beta \cap C.$$

Teorema 26. *Dacă integrala improprie* $\varphi(z) = \int_C f(t, z)\mathrm{d}t$ *este uniform convergentă în domeniul D și funcția $f(t, z)$ continuă ca funcție de (t, z) și olomorfă ca funcție de z în $(C - \beta) \times D$ (β fiind extremitatea lui C unde integrala e improprie), atunci $\varphi(z)$ este olomorfă în D, avînd derivata*

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = \int_C \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\,\mathrm{d}t \tag{54}$$

și această integrală improprie este uniform convergentă în orice domeniu închis conținut în D.

În adevăr: $\psi(z, \tau)$ este o funcție olomorfă de z (teorema 23) și limita sa $\varphi(z)$ deasemenea (teorema 20). În virtutea aceloraşi teoreme

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = \lim_{\tau \to \beta} \frac{\partial \psi(t, z)}{\partial z} = \lim_{\tau \to \beta} \int_{\widehat{\alpha\tau}} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\,\mathrm{d}t,$$

adică avem formula (54). În sfîrșit, în orice domeniu închis conținut în D, $\dfrac{\partial \Psi(t, z)}{\partial z}$ converge uniform la $\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}$ (teorema 20), și prin urmare $\displaystyle\int_{\widehat{\alpha\tau}} \frac{\partial f(t, z)}{\partial z}\mathrm{d}t$ converge uniform.

Se pot utiliza următoarele criterii pentru convergența uniformă a unei integrale improprii, în care se presupune că C este un arc simplu regulat și că $f(t, z)$ este funcție continuă de (t, z) în $(C - \beta) \times D$:

A'. β *finit. Integrala improprie* $\displaystyle\int_C f(t, z)\,\mathrm{d}t$ *este uniform convergentă dacă se poate găsi un număr $a < 1$ astfel ca $(t - \beta)^a f(t, z)$ să fie uniform mărginită în jurul punctului $t = \beta$ (în particular dacă această funcție converge uniform la o funcție mărginită $\lambda(z)$ pentru $t \to \beta$).*

B'. $\beta = \infty$. *Integrala improprie* $\displaystyle\int_C f(t, z)\mathrm{d}t$ *este uniform convergentă dacă se poate găsi un număr $a > 1$ astfel ca $t^a f(t, z)$ să fie uniform mărginită în jurul punctului $t = \beta$ (în particular dacă această funcție converge uniform la o funcție mărginită $\lambda(z)$ pentru $t \to \infty$).*

Demonstrațiile fiind aceleași ca pentru criteriile *A* și *B*.

Exemplu. $\int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$ *converge uniform în domeniul* $0 < a \leqslant x \leqslant b$ $(x = \operatorname{Re} z)$. Căci avem, pentru $t > 1$, $n > 1$:
$|t^n e^{-t}t^{z-1}| = e^{-t}t^{x+n-1} \leqslant e^{-t}t^{b+n-1} \to 0$ pentru $t \to \infty$, deci $t^n f(t, z)$ converge uniform. Apoi, pentru $t < 1$,

$$|t^n e^{-t}t^{z-1}| \leqslant e^{-t}t^{a+n-1} \to 0 \text{ pentru } t \to 0$$

dacă luăm $a < 1$ şi $(1 - a) < n < 1$; deci $t^n f(t, z)$ converge uniform. Urmează că $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\,dt$ este o funcţie olomorfă în semiplanul $x > 0$, cu derivata $\Gamma'(s) = \int_0^\infty e^{-t}t^{z-1}\log t\,dt$.

Teorema 27. *Fie* $f_n(t)$ *funcţii continue de* t *în* $[a, +\infty)$ *(reale sau complexe)* şi *seria* $\sum_0^\infty |f_n(t)|$ *uniform convergentă în orice interval* $[a, r]$. *Avem*

$$\int_a^\infty \sum_0^\infty f_n(t)\,dt = \sum_0^\infty \int_a^\infty f_n(t)\,dt \tag{55}$$

dacă una dintre expresiile

$$\int_a^\infty \sum_0^\infty |f_n(t)|\,dt \text{ sau } \sum_0^\infty \int_a^\infty |f_n(t)|\,dt \tag{56}$$

este convergentă.

Prin ipoteză (ţinînd seama şi de nr. 17),

$$\int_a^r \sum_0^\infty f_n(t)\,dt = \sum_0^\infty \int_a^r f_n(t)\,dt. \tag{57}$$

Vom demonstra întîi teorema pentru funcţii $f_n(t) \geqslant 0$, presupunînd că prima expresie (56) este convergentă. Să notăm cu I şi S cei doi membri ai egalităţii (55). Avem:

$$\int_a^r f_n(t)\,dt \leqslant \int_a^r \sum_0^\infty f_n(t)\,dt \leqslant I,$$

de unde rezultă că $\int_a^\infty f_n(t)\,dt$ este convergentă pentru orice n. Deasemenea

$$\sum_0^m \int_a^\infty f_n(t)\,dt = \int_a^\infty \sum_0^m f_n(t)\,dt \leqslant \int_a^\infty \sum_0^\infty f_n(t)\,dt = I,$$

ceea ce dovedeşte că a doua expresie (56) este convergentă şi că $S \leqslant I$. Pe de altă parte, avînd în vedere (57),

$$\int_a^r \sum_0^\infty f_n(t)\,dt \leqslant \sum_0^\infty \int_a^\infty f_n(t)\,dt = S$$

şi făcînd $r \to \infty$ urmează $I \leqslant S$. Aşadar $I = S$.

Demonstraţie analogă cînd se presupune că a doua expresie (56) este convergentă.

În cazul cînd $f_n(t)$ sînt funcţii complexe (sau reale cu semn oarecare) vom considera funcţiile $|f_n(t)| \pm u_n(t)$ şi $|f_n(t)| \pm v_n(t)$, unde $u_n(t)$ şi $v_n(t)$ reprezintă partea reală şi cea imaginară ale lui $f(t)$. Aceste 4 funcţii sînt continue şi $\geqslant 0$. Ele verifică de asemenea şi celelalte condiţii îndeplinite de funcţiile $|f_n(t)|$, cum rezultă din

$$||f_n(t)| \pm u_n(t)|\, 2 \leqslant |f_n(t)|$$

şi analoga.

Deci egalitatea (55) are loc pentru fiecare din cele 4 funcţii, de unde rezultă (prin scăderi) aceeaşi egalitate pentru funcţiile $u_n(t)$ şi $v_n(t)$, şi în definitiv pentru funcţiile $f_n(t)$.

O teoremă analogă se poate demonstra pentru integrale improprii cu interval de integrare finit.

Exerciţii

1. *Să se calculeze* $\int_C \frac{dz}{z}$ *pe un cerc de centru* O *şi rază* R, *aplicînd direct definiţia integralei.*

R. Integrala există pentru că C este rectificabil şi $\frac{1}{z}$ continuă pe C. Considerăm o subdiviziune a cercului prin punctele $z_k = R\,e^{\frac{2k\pi i}{m}}$. Avem $\Delta_k z = R(e^{\frac{2(k+1)\pi i}{m}} - e^{\frac{2k\pi i}{m}})$. Evident $\Delta_k z \to 0$ cînd $m \to \infty$. Luînd ca valori intermediare ale integrandului $\frac{1}{z_k}$, formăm

$$S_m = \sum_0^{m-1} \frac{1}{z_k} \Delta_k z = m(e^{\frac{2\pi i}{m}} - 1) = 2mi \sin\frac{\pi}{m} \cdot e^{\frac{\pi i}{m}} \to 2\pi i.$$

Aşadar $\int_C \frac{dz}{z} = 2\pi i$.

2. *Să se calculeze* $\int_C z^{\frac{m}{n}}\, dz$ (m, n *întregi*) *pe un cerc de centru* O.

R. O determinare a integrandului este, pe cercul de rază R:

$$z^{\frac{m}{n}} = e^{\frac{m}{n}\log z} = R^{\frac{m}{n}} e^{i\frac{m}{n}(\theta + 2k\pi)}.$$

Într-un interval $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0 + 2\pi$ ea este funcţie continuă de θ, deci putem scrie

$$\int_C z^{\frac{m}{n}}\, dz = i R^{\frac{m+n}{n}} \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} e^{i\left(\frac{m+n}{n}\theta + 2k\frac{m}{n}\right)} d\theta =$$

$$= \frac{n R^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} e^{2k\pi\frac{m}{n}i} \left[e^{\frac{m+n}{n}\theta i} \right]_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} = \frac{n R^{\frac{m+n}{n}}}{m+n} e^{2\pi k\frac{m}{n}i} e^{\frac{m+n}{n}\theta_0 t} \left(e^{2\pi\frac{m+n}{n}i} - 1 \right)$$

dacă $\frac{m}{n} \neq -1$. Cînd $\frac{m}{n} = -1$ avem

$$\int_C \frac{dz}{z} = i \int_{\theta_0}^{\theta_0 + 2\pi} d\theta = 2\pi i.$$

Integrala este nulă atunci şi numai atunci cînd $\frac{m}{n}$ este un întreg $\neq -1$ (căci numai ultimul factor se poate anula).

Cînd $\frac{m}{n}$ nu este întreg, integrala depinde de punctul inițial $z_0 = R\,e^{i\theta_0}$ (al doilea factor exponențial) și de determinarea inițială a integrandului (primul factor exponențial).

3. $\int_C z^{\frac{m}{n}}\,dz$ (m, n *întregi*) *pe o curbă care înconjoară în sens direct de* n *ori, punctul* $z=0$ *este nulă dacă* $m \neq -n$ *și* $z = 2\pi ni$ *dacă* $m = -n$.

R. Curba considerată este echivalentă cu un cerc de centru O descris de n ori în sens direct. Afirmația rezultă din calculul de la exercițiul 2, unde luăm $0 \leqslant \theta \leqslant 2n\pi$.

4. *Să se calculeze* $\int_C \frac{\log z}{z}\,dz$ *pe un cerc de centru* O.

R. Integrandul fiind continuu și finit pe cercul $z = Re^{i\theta}$, avem

$$\int_C \frac{\log z}{z}\,dz = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \frac{\log R + i(\theta + 2k\pi)}{e^{i\theta}} \cdot i\,e^{i\theta}\,d\theta = 2\pi(i \log R - 2k\pi) -$$

$$- \frac{1}{2}[(\theta_0 + 2\pi)^2 - \theta_0] = 2\pi i \log R - 2(2k + 1)\pi^2 - 2\pi\theta_0.$$

Integrala depinde de punctul inițial, de determinarea inițială a logaritmului și de raza cercului C. (Ultima particularitate nu trebuie să surprindă, fiindcă integrandul nu are determinări olomorfe într-o coroană de centru O și deci teorema lui Cauchy nu este aplicabilă coroanei).

5. *Să se calculeze* $I = \int_C \frac{dz}{1+z^2}$ *unde* C *este una din cele trei curbe din figura 87.*

R. Deoarece $\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right)$, o funcție primitivă a integrandului este $\frac{1}{2i}\log\frac{z-i}{z+i} = \frac{1}{2i}\log\left|\frac{z-i}{z+i}\right| + \frac{1}{2}((\arg(z-i) - \arg(z+i))$.

Cînd z descrie cercul C_1, ambele argumente (variind continuu) cresc cu 2π, deci $\int_{C_1} \frac{dz}{1+z^2} = 0$.

Și tot așa pe orice curbă simplă închisă, care înconjoară punctele $\pm i$.

Cînd z descrie curba C_2, cele două argumente cresc respectiv cu π și 0 (primul crește cu π pe semicercul de centru $+i$), iar variația primului termen este

$$\frac{1}{2i}\left[\log\left|\frac{z-i}{z+i}\right|\right] = -\frac{1}{2i}\log 3.$$

Deci

$$\int_{C_2} \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}(\pi + i \log 3).$$

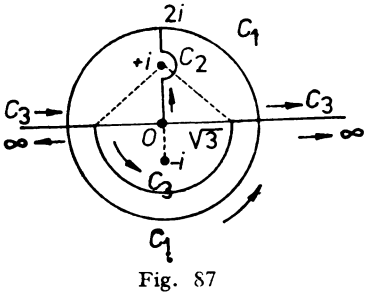

Fig. 87

Pe curba C_3 ambele argumente cresc cu π, iar variația primului termen este (pentru $x = -\infty$ și $x = +\infty$) egală cu 0. Deci $\int_{C_3} \frac{dz}{1+z^2} = 0$. (Integrală improprie).

6. *Există integrala* $\int_C \frac{dz}{1+z^2}$ *pe segmentul* $[0, 2i]$ *al axei imaginare?*

R. Nu, pentru că nu există integralele pe segmentele $[0, i]$ și $[i, 2i]$. În adevăr, $\log\left|\frac{iy-i}{iy+i}\right| = \log\left|\frac{y-1}{y+1}\right|$ are limita $-\infty$ cînd $y \to 1$. Dacă însă înconjurăm polul $+i$ al integrandului cu un semicerc, integrala pe curba astfel formată are o limită finită cînd raza semicercului $\to 0$, anume $\frac{1}{2}(\pi + i \log 3)$ (exercițiul 2).

În general se numește *valoare principală a unei integrale* luată pe o curbă care trece printr-un punct singular α (unde integrandul nu este finit și continuu), limita (dacă există) a integralei luată pe o curbă modificată prin intercalarea unui arc de cerc de centru α, a cărui rază $\to 0$, (vezi fig. 88). În mod analog, cînd o integrală este luată pe o curbă ce trece prin punctul ∞, numim valoare principală limita integralei luată pe arcul acelei curbe interior unui cerc de cen-

Fig. 88

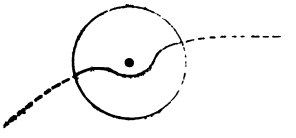

Fig. 89

tru fix, a cărui rază $\to \infty$ (fig. 89). Evident, cînd integrala există (ca integrală improprie), (ceea ce cere existența separată a două limite pentru fiecare punct singular sau punctul ∞), ea este egală cu valoarea sa principală. Invers, o integrală poate să nu existe, dar să aibă o valoarea principală; cum se vede din exercițiul precedent. Uneori se notează valoarea principală cu $P\int_C$. Astfel, în cazul nostru

$$P\int_C \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2}(\pi + i \log 3).$$

7. *Să se calculeze integralele reale*

$$J_1 = \int x^m e^{ax} \cos bx \, dx, \quad J_2 = \int x^m e^{ax} \sin bx \, dx$$

m întreg $\geqslant 0$, a, b reali.

R. Vom deduce aceste integrale deodată din

$$I_m = \int z^m e^{\alpha z} dz = \frac{1}{\alpha} z^m e^{\alpha z} - \frac{m}{\alpha}\int z^{m-1} e^{\alpha z} dz$$

sau

$$I_m = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha z} z^m - m I_{m-1}),$$

$$I_{m-1} = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha z} z^{m-1} - (m-1) I_{m-2}),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_1 = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha z} z - I_0),$$

$$I_0 = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha z}.$$

Înmulțind aceste egalități respectiv cu $1, -m, m(m-1), \ldots (-1)^m m!$ și adunîndu-le obținem

$$I_m = \frac{e^{\alpha z}}{\alpha}(z^m - m z^{m-1} + m(m-1) z^{m-2} - \ldots + (-1) m_m !).$$

Punînd aici $z = x$, $\alpha = a + ib$ avem

$$I_m = J_1 + iJ_2 =$$

$$= \frac{a - ib}{a^2 + b^2} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)(x^m - m x^{m-1} + \ldots + (-1)^m m!),$$

de unde

$$J_1 = e^{ax}\,\frac{a\cos bx + b\sin bx}{a^2+b^2}\,(x^m - mx^{m-1} + \ldots + (-1)^m m!),$$

$$J_2 = e^{ax}\,\frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^2+b^2}\,(x^m - mx^{m-1} + \ldots + (-1)^m m!).$$

8. *Integrarea unei funcții raționale de cos z și sin z.*

R. Fie F (cos z, sin z), rațională, de perioadă 2π. Punînd $t = e^{iz}$ și aplicînd formulele lui Euler obținem $F = R(t)$ rațională, pe care o descompunem în fracții simple. Adăugînd la partea întreagă și termenii de forma $\frac{C_{-n}}{t^n}$ (corespunzînd rădăcinii $t = 0$ a numitorului lui $R(t)$ — dacă este cazul), obținem partea

$$R_0(t) = \sum_{m=p}^{q} C_m t^m = \sum_{m=p}^{q} C_m(\cos mz + i\sin mz),$$

unde m poate avea și valori negative, și care se integrează imediat.

Fie $a \neq 0$ o rădăcină a numitorului lui $R(t)$, care dă partea

$$R_1(t) = \frac{A_1}{t-a} + \frac{A_2}{(t-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(t-a)^n}.$$

Putem scrie, α fiind o rădăcină a ecuației $e^{i\alpha} = a$ (care există, fiindcă $a \neq 0$):

$$\frac{1}{t-a} = \frac{1}{e^{iz} - e^{i\alpha}} = \frac{1}{e^{i\alpha}} \cdot \frac{1}{e^{i(z-\alpha)} - 1} = \frac{-1}{2\,e^{i\alpha}}\left(1 - \frac{e^{i(z-\alpha)} + 1}{e^{i(z-\alpha)} - 1}\right)$$

sau

$$\frac{1}{t-a} = -\frac{1}{2\,e^{i\alpha}}\left(1 + i\,\operatorname{ctg}\frac{z-\alpha}{2}\right).$$

Substituind, obținem $R_1(t) = P_n\left(\operatorname{ctg}\frac{z-\alpha}{2}\right)$, polinom de gradul n.

Observăm că o putere $\operatorname{ctg}^n \frac{z-\alpha}{2}$ se poate exprima liniar prin $\operatorname{ctg}\frac{z-\alpha}{2}$ și derivata acesteia pînă la ordinul $n-1$. Avem în adevăr

$$\frac{d}{dz}\operatorname{ctg} z = -1 - \operatorname{ctg}^2 z \text{ sau } \operatorname{ctg}^2 z = -1 - \frac{d}{dz}\operatorname{ctg} z.$$

În general, dacă

$$\operatorname{ctg}^{n-1} z = P_0^{(n-1)} + P_1^{(n-1)}\operatorname{ctg} z + P_2^{(n-1)}\frac{d}{dz}\operatorname{ctg} z + \ldots + P_{n-1}^{(n-1)}\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\operatorname{ctg} z,$$

urmează derivînd

$$-(n-1)\operatorname{ctg}^{n-2} z(1 + \operatorname{ctg}^2 z) = P_1^{(n-1)}\frac{d}{dz}\operatorname{ctg} z + \ldots + P_{n-1}^{(n-1)}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\operatorname{ctg} z,$$

de unde

$$-\operatorname{ctg}^n z = P_0^{(n-2)} + P_1^{(n-2)}\operatorname{ctg} z + \left(P_2^{(n-2)} + \frac{P_1^{(n-1)}}{n-1}\right)\frac{d}{dz}\operatorname{ctg} z + \ldots$$

$$\cdots + \left(P_{n-2}^{(n-2)} + \frac{P_{n-3}^{(n-1)}}{n-1}\right)\frac{d^{n-3}}{dz^{n-3}}\operatorname{ctg} z + \frac{P_{n-2}^{(n-1)}}{n-1}\frac{d^{n-2}}{dz^{n-2}}\operatorname{ctg} z + \frac{P_{n-1}^{(n-1)}}{n-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\operatorname{ctg} z,$$

adică avem

$$\operatorname{ctg}^n z = P_0^{(n)} + P_1^{(n)}\operatorname{ctg} z + P_2^{(n)}\frac{d}{dz}\operatorname{ctg} z + \ldots + P_n^{(n)}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\operatorname{ctg} z$$

cu formulele de recurență

$$\begin{cases} P_0^{(n)} = -P_0^{(n-2)}, \quad P_1^{(n)} = -P_1^{(n-2)}, \\ P_k^{(n)} = -\left(P_k^{(n-2)} + \dfrac{P_{k-1}^{(n-1)}}{n-1}\right) \quad (2 \leqslant k \leqslant n-2), \\ P_{n-1}^{(n)} = -\dfrac{P_{n-2}^{(n-1)}}{n-1}, \quad P_n^{(n)} = -\dfrac{P_{n-1}^{(n-1)}}{n-1}. \end{cases}$$

În definitiv se obține o descompunere de forma

$$F(\cos z, \sin z) = C + \Sigma C_k \cos kz + \Sigma C_k' \sin kz + A_1 \operatorname{ctg}\frac{z-\alpha}{2} + A_2 \frac{d}{dz}\operatorname{ctg}\frac{z-\alpha}{2} + \cdots +$$

$$+ A_n \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\operatorname{ctg}\frac{z-\alpha}{2} + B_1 \operatorname{ctg}\frac{z-\beta}{2} + B_2 \frac{d}{dz}\operatorname{ctg}\frac{z-\beta}{2} + \ldots + B_p \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}}\operatorname{ctg}\frac{z-\beta}{2} + \cdots$$

Pentru a o integra avem de aplicat numai formula

$$\int \operatorname{ctg}\frac{z-\alpha}{2}\,dz = 2\log\sin\frac{z-\alpha}{2},$$

ceilalți termeni integrîndu-se imediat.

Termenii descompunerii se pot obține în cazurile simple prin identificări.

Dacă F are perioada π, vom pune $t = e^{2zi}$ și vom introduce ctg $(z-\alpha)$ etc.

9. $\displaystyle\int \frac{dz}{\cos z - \cos\alpha}$ $(\alpha \neq k\pi)$.

Punînd $t = e^{iz}$ și $a = e^{i\alpha}$, găsim:

$$\frac{1}{\cos z - \cos\alpha} = \frac{2at}{a(t^2+1) - t(a^2+1)}.$$

Numitorul are rădăcinile simple a și $\dfrac{1}{a}$. Deci avem o descompunere de forma

$$\frac{1}{\cos z - \cos\alpha} = C + A \operatorname{ctg}\frac{z-\alpha}{2} + B \operatorname{ctg}\frac{z+\alpha}{2}$$

(ecuațiile $e^{iz} = a$, $e^{iz} = \dfrac{1}{a}$ având rădăcinile α și $-\alpha$). Coeficientul A se determină înmulțind cu $z-\alpha$ și făcînd $z \to \alpha$, ceea ce dă $A = -\dfrac{1}{2\sin\alpha}$ $\left(\text{scriem } \cos z - \cos\alpha = -2\sin\dfrac{z+\alpha}{2}\sin\dfrac{z-\alpha}{2}\right)$. La fel, $B = \dfrac{1}{2\sin\alpha}$. Introducînd aceste valori și punînd $z = 0$, avem $C = 0$. Astfel

$$\frac{1}{\cos z - \cos\alpha} = \frac{1}{2\sin\alpha}\left(\operatorname{ctg}\frac{z-\alpha}{2} - \operatorname{ctg}\frac{z+\alpha}{2}\right)$$

și

$$\int \frac{dz}{\cos z - \cos\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha}\log\frac{\sin\dfrac{z-\alpha}{2}}{\sin\dfrac{z+\alpha}{2}}.$$

10. $\int \frac{dz}{\cos^2 z - \cos^2 \alpha}$ $(\alpha \neq k\pi)$.

Perioada integrandului fiind π, punem $t = e^{2iz}$, $a = e^{2i\alpha}$ și găsim

$$\frac{1}{\cos^2 z - \cos^2 \alpha} = \frac{4}{(t-a)(at-1)}.$$

Numitorul avînd rădăcinile simple a, $\frac{1}{a}$, există o descompunere de forma

$$\frac{1}{\cos^2 z - \cos^2 \alpha} = C + A \operatorname{ctg}(z-\alpha) + B \operatorname{ctg}(z+\alpha).$$

Înmulțind cu $z-\alpha$ și făcînd $z \to \alpha$ obținem $A = -\frac{1}{\sin 2\alpha}$ și la fel $B = \frac{1}{\sin 2\alpha}$; apoi punînd $z = 0$, găsim $C = 0$. Deci

$$\frac{1}{\cos^2 z - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha}(\operatorname{ctg}(z+\alpha) - \operatorname{ctg}(z-\alpha)),$$

$$\int \frac{dz}{\cos^2 z - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{\sin 2\alpha} \log \frac{\sin(z+\alpha)}{\sin(z-\alpha)}.$$

Observație. Această integrală se poate deduce din precedenta, scriind

$$\frac{1}{\cos^2 z - \cos^2 \alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{1}{\cos z - \cos\alpha} - \frac{1}{\cos z + \cos\alpha}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\cos\alpha}\left(\frac{1}{\cos z - \cos\alpha} - \frac{1}{\cos z - \cos(\pi - \alpha)}\right).$$

Capitolul V

Dezvoltări în serie Taylor și Laurent

§ 78. Serii de funcții olomorfe

Teorema 1. *Dacă*

1° *funcțiile* $f_n(z)$ *sînt finite și continue pe curba* C,

2° C *este rectificabilă și*

3° *seria* $\varphi(z) = \sum_0^\infty f_n(z)$

converge uniform pe C, *avem*

$$\int_C \varphi(z)\,dz = \sum_0^\infty \int_C f_n(z)\,dz. \tag{1}$$

Într-adevăr, fie $S_n(z) = \sum_0^n f_n(z)$. Ipotezele noastre sînt și acelea ale teoremei 19 din § 77, pentru $S_n(z)$ ca funcție de z și parametru n. Putem deci scrie

$$\lim_{n\to\infty} \int_C S_n(z)\,dz = \int_C \lim_{n\to\infty} S_n(z)\,dz$$

sau

$$\lim_{n\to\infty} \sum_0^n \int_C f_n(z)\,dz = \int_C \varphi(z)\,dz$$

care este relația (1).

Observație. O teoremă analogă are loc pentru șiruri $S_n(z)$.

Teorema 2. *(Weierstrass). Dacă*

1° $f_n(z)$ *sînt olomorfe în domeniul* D *și*

2° *seria* $\varphi(z) = \sum_0 f_n(z)$

converge uniform în D, *atunci: suma* $\varphi(z)$ *este olomorfă în* D, *iar în orice* $\bar{D}_1 \subset D$, *avem*

$$\varphi'(z) = \sum_0^\infty f_n'(z) \tag{2}$$

și această serie este de asemenea uniform convergentă în $\bar{D}_1$.

Graţie ipotezelor 1°, 2°, $\varphi(z)$ este uniformă, finită (implicat în 2°) şi continuă (§ 77, teorema 18). De aici şi din teorema 1 s-ar putea conchide că $\varphi(z)$ este olomorfă, aplicînd teorema lui Morera, căci pe o curbă rectificabilă, închisă şi conţinută în D, avem, în adevăr:

$$\int_C \varphi(z)\,dz = \sum_0^\infty \int_C f_n(z)\,dz = 0.$$

Pentru a demonstra complet teorema, ne vom servi însă de teoremele 1, 2 şi 3 din § 76. Γ fiind un cerc de centru z şi de rază R conţinut în D, avem ($\varphi(t)$ fiind continuă pe Γ).

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \sum_{n=0}^\infty \frac{f_n(t)}{t-z}\,dt = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(t)}{t-z}\,dt = \sum_{n=0}^\infty f_n(z) = \varphi(z).$$

Deci $\varphi(z)$ este olomorfă (teorema 2, § 76,).

Am aplicat teorema 1, observînd că $\sum_{n=0}^\infty \frac{f_n(t)}{t-z}$ converge uniform pe Γ, deoarece restul are modulul $\frac{1}{R}|r_n(t)|$, r_n fiind restul seriei date. Apoi avem (teorema 3, § 76)

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}\,dt = \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(t)}{(t-z)^2}\,dt = \sum_0^\infty f_n'(z),$$

aplicînd la fel teorema 1, (2) este demonstrată.

Pentru a demonstra convergenţa uniformă a seriei (2) vom arăta convergenţa restului ei:

$$r_n'(z) = \sum_{n+1}^\infty f_\nu'(z),$$

care-i funcţie olomorfă (teorema 3, § 76), căci avem (aplicînd iar teorema 1 cu un R fix $< \rho$ ($\bar{D}_1$, fr D) astfel ca cercurile de centre $z \in \bar{D}_1$ şi rază R să fie conţinute în D):

$$r_n'(z) = \sum_{n+1}^\infty \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f_n(t)}{(t-z)^2}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{r_n(t)}{(t-t)^2}\,dt,$$

deoarece $\sum \frac{f_n(t)}{(t-z)^2}$ este uniform convergentă.

Conform ipotezei 2°, pentru un $\varepsilon > 0$ există un ν aşa fel că $|r_n(z)| < \varepsilon R$ în D, pentru $n > r$, deci

$$|r_n'(z)| < \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{\varepsilon R}{R^2}\cdot 2\pi R = \varepsilon \text{ în } \bar{D}_1, \text{ pentru } n > \nu. \quad \text{Q.E.D.}$$

Observaţie. Nu a fost necesar să presupunem convergenţa uniformă a seriei derivate, ca în teorema analogă din domeniul real (care, în schimb, se dispensează de convergenţa uniformă a seriei date). Teorema următoare este analogă cu aceasta.

Teorema 3. *Într-un domeniu mărginit simplu conex D, unde $f_n(z)$ sînt olomorfe și seria*

$$\varphi(z) = \sum_0^\infty f_n(z)$$

converge uniform, avem

$$\int_{z_0}^{z} \varphi(z)\,dz = \sum_0 \int_{z_0}^{z} f_n(z)\,dz \tag{3}$$

și această serie converge uniform într-un domeniu închis (și mărginit) $\bar{D}' \subset D$.

Toate integralele din membrul al doilea există și sînt independente de drumul $\widehat{z_0 z}$, pentru că $f_n(z)$ sînt olomorfe și D simplu conex (corolarul teoremei 1 din § 75). (3) rezultă din teorema 1 luînd toate integralele pe un același drum.

Fie acum $\delta = \text{dist}\,(\bar{D}', \text{fr}\,D)$. Putem acoperi $\bar{D}'$ pe un domeniu $\pi \subset D$, de pătrate de latură $\frac{\delta}{\sqrt{2}}$; fie N numărul lor. Dacă z_0, $z \in \bar{D}'$, le putem uni cu un drum compus din segmente conținute în cîte un pătrat fiecare, căci putem merge de la z_0 la z trecînd printr-un șir de pătrate adiacente cîte două. Dacă se întîmplă să revenim la același pătrat, vom lăsa la o parte bucla de pătrate parcursă de la un pătrat la același pătrat. Astfel, un pătrat va conține cel mult un segment al drumului și lungimea acestuia va fi $\leqslant \sqrt{2}\,\frac{\delta}{\sqrt{2}}\,N = \delta N$ Aceasta demonstrează că într-un domeniu închis conținut în D, putem uni 2 puncte printr-o linie de lungime $<$ un număr fix.

Prin ipoteză, r_n și R_n fiind resturile seriei date și seriei (3), există pentru un $\varepsilon > 0$, un ν astfel că $|r_n| < \frac{\varepsilon}{\delta N}$ pentru $n > \nu$; deci

$$|R_n| = \left|\int_{z_0}^{z} r_n(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon}{\delta N} \cdot \delta N = \varepsilon \quad \text{pentru } n > \nu.$$

Observația. 1. După cum am văzut, teorema 1 este un caz particular al teoremei 19, § 76, teorema 2 un caz particular al teoremei 20 din § 77, iar partea a doua a teoremei 3 rezultă ca un caz particular al teoremei 21, din § 77.

Observația 2. Teorema este aplicabilă și în cazul cînd D nu este simplu conex, dar $\int_{z_0}^{z} f_n dz$ sînt uniforme. (Este tocmai cazul particular al teoremei 21 din § 77).

Teorema 4. *Se consideră seria (lui Dirichlet)*

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n z}$$

unde a_n sînt numere complexe și $\{\lambda_n\}$ un șir de numere reale monoton crescător la $+\infty$. Dacă seria converge într-un punct z_0, ea converge într-un semiplan $\text{Re}\,z > a$ *(și eventual în puncte ale dreptei* $\text{Re}\,z = a$*) fiind divergentă pentru*

Re $z < a$. *Punctul z_0 fiind un punct de convergență, seria este uniform convergentă în sectorul*

$$|\arg(z - z_0)| \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

1°. Demonstrăm afirmația a doua a teoremei: Putem lua $z_0 = 0$ (căci făcînd transformarea $z' = z - z_0$ obținem o serie de aceeași formă și convergența uniformă se păstrează). Avem (identitatea lui Abel)

$$S_{m,n} = \sum_{m}^{n} a_\nu e^{-\lambda_\nu z} = \sum_{m}^{n-1} s_{m,\nu}(e^{-\lambda_\nu z} - e^{-\lambda_{\nu+1} z}) + s_{m,n} e^{-\lambda_n z},$$

unde

$$s_{m,\nu} = a_m + \ldots + a_\nu.$$

Pentru a aproxima pe $|S_{m,n}|$ ne vom folosi de inegalitățile

$$|e^{-\lambda_\nu z} - e^{-\lambda_{\nu+1} z}| = \left|\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} z e^{-tz} dt\right| \leqslant |z| \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-tx} dt \leqslant \frac{|z|}{x}(e^{-\lambda_\nu x} - e^{-\lambda_{\nu+1} x}),$$

unde $z = x + iy$. Fie acum $\varepsilon > 0$ (dat). Putem alege m_0 astfel ca

$$\lambda_m > 0 \text{ și } |s_{m,\nu}| < \varepsilon \cos\varphi \text{ pentru } m > m_0$$

$\left(\text{căci } \sum_{0}^{\infty} a_n \text{ este convergentă prin ipoteză}\right)$. În sectorul considerat avem $\frac{|z|}{x} = \frac{1}{\cos\theta} < \frac{1}{\cos\varphi}$. Deci, în acest sector,

$$|S_{m,n}| < \varepsilon\left\{\sum_{m}^{n-1}(e^{-\lambda_\nu x} - e^{-\lambda_{\nu+1} x}) + e^{-\lambda_n x}\right\} = \varepsilon e^{-\lambda_m x} < \varepsilon.$$

Ceea ce demonstrează convergența uniformă.

2° Din 1° rezultă că, dacă seria converge în $z_0 = x_0 + iy_0$, ea converge în $\operatorname{Re} z > x_0$. Deci, dacă a este marginea inferioară a absciselor x_0 cu această proprietate seria converge în $\operatorname{Re} z > a$ și diverge în $\operatorname{Re} z < a$.

Observația 1. Pentru a determina semiplanul de convergență, este destul să considerăm seria pe axa reală $\sum_{1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n x}$.

Observația 2. Dacă $\lambda_n = n$ seria dată devine o serie întreagă în $e^{-z} = z'$; la domeniul de convergență $x > a$ corespunde în planul (z') cercul de convergență $|z'| e^{-a} = R$. Invers, o serie întreagă poate fi scrisă ca serie Dirichlet.

Pentru $\lambda_n = \log n$ avem o serie Dirichlet ordinară, $\sum_{1}^{\infty} a_n n^{-z}$.

Teorema 5. *O serie Dirichlet fiind dată, există un număr a_0 astfel că seria este absolut convergentă pentru* $\operatorname{Re} z > a_0$ *și nu pentru* $\operatorname{Re} z < a_0$. *(Semiplan de convergență absolută.)*

Dacă seria converge absolut în $z_0 = x_0 + iy_0$, ea converge absolut în $\operatorname{Re} z = x > x_0$. Căci avem în acest semiplan

$$|a_n e^{-\lambda_n z}| \leqslant |a_n e^{-\lambda_n z_0}|;$$

a_0 este marginea inferioară a numerelor x cu proprietatea că seria este absolut convergentă în $z = x + iy$.

a fiind abscisa de convergență, avem evident $a_0 \geqslant a$, este posibil ca $a < a_0$.

Teorema 6. *Dacă* $f(z) = \sum_1^\infty a_n e^{-\lambda_n z}$ *este convergentă în* z_0, *atunci* $f(z) \to f(z_0)$ *într-un sector*

$$|\arg(z - z_0)| \leqslant \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Rezultă din teorema 4 și un caz particular al teoremei 16, § 77.

Observație. Se consideră cazul unei serii de puteri $\sum_1^\infty a_n z'^n = \sum_1^\infty a_n e^{-nz}$, convergentă în $z'_0 = e^{-z_0}$. Fie E domeniul de intersecție al sectorului precedent cu banda $|y - y_0| < \pi$, pe care transformarea $z' = z'_0 e^{-(z-z_0)}$ o reprezintă conform pe planul $(z') - 0$ (vezi fig. 90). Avem

$$z' = r' e^{i\theta'} = r'_0 e^{i\theta'_0} e^{-(x-x_0)-i(y-y_0)}$$

$$r' = r'_0 e^{-(x-x_0)}, \quad \theta' - \theta'_0 = y_0 - y.$$

Pe porțiunile de laturi ale sectorului cuprinse în banda precedentă

$$\frac{y - y_0}{x - x_0} = \pm \operatorname{tg} \varphi,$$

și ele sînt transformate în arce de spirale logaritmice

$$r' = r'_0 e^{\pm(\theta'-\theta'_0)\operatorname{ctg}\varphi} \quad (-\pi < \theta' - \theta'_0 < \pi),$$

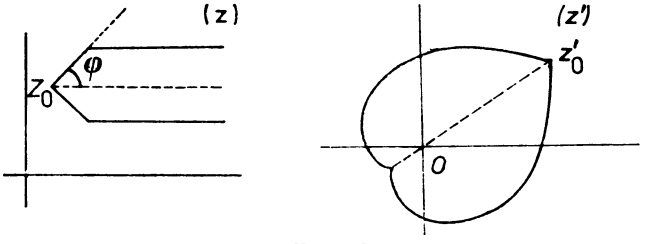

Fig. 90

care pleacă din z'_0 și se intersectează iar într-un punct pe dreapta Oz'_0 (corespunzînd la cele două extremități de pe laturile benzii). Aceste arce limitează domeniul corespunzător lui E. Seria de puteri este uniform convergentă în E' și $f(z') \to f(z'_0)$ în E' dacă este convergentă în z'_0. Aceasta prezintă interes cînd z'_0 este pe cercul de convergență. Observînd că cele două spirale taie dreapta Oz'_0 sub un unghi $\varphi < \frac{\pi}{2}$, putem pune rezultatul sub forma:

Dacă o serie întreagă converge într-un punct z_0' al cercului de convergență, ea converge uniform într-un sector cu vîrful în acel punct, conținut în cercul de convergență (vezi fig. 91). Mai putem zice: $f(z') \to f(z_0')$ pe orice drum netangent cercului de convergență și interior acestui cerc.

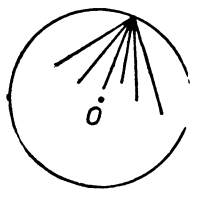

Fig. 91

Teorema 7. *Dacă o serie Dirichlet nu converge în* $z = 0$, *abscisa de convergență este*

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \log |a_1 + \ldots + a_n|.$$

1° Seria converge pentru $x > a$. Într-adevăr, fie $0 < \varepsilon < x - a$. Prin definiția precedentă a lui a

$$\log |a_1 + \ldots + a_\nu| < (x - \varepsilon)\lambda_\nu \quad (\nu > \nu_0) \tag{4}$$

($\lambda_\nu > 0$ pentru ν destul de mare). După identitatea lui Abel

$$\sum_1^n a_\nu e^{-\lambda_\nu x} = \sum_1^{n-1} (a_1 + \ldots + a_\nu)(e^{-\lambda_\nu x} - e^{-\lambda_{\nu+1} x}) + (a_1 + \ldots + a_n) e^{-\lambda_n x}. \tag{5}$$

După (4) ultimul termen are modulul $< e^{(x-\varepsilon)\lambda_n} e^{-\lambda_n x} = e^{-\varepsilon\lambda_n}$ și deci acest termen $\to 0$. Apoi

$$|(a_1 + \ldots + a_\nu)(e^{-\lambda_\nu x} - e^{-\lambda_{\nu+1} x})| < e^{(x-\varepsilon)\lambda_\nu}(e^{-\lambda_\nu x} - e^{-\lambda_{\nu+1} x}) =$$

$$= x\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{(x-\varepsilon)\lambda_\nu} e^{-xt}\, dt < x\int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-\varepsilon t}\, dt,$$

căci în intervalul $(\lambda_\nu, \lambda_{\nu+1})$, $(x - \varepsilon)\lambda_\nu < (x - \varepsilon)t$ sau $(x - \varepsilon)\lambda_\nu - xt < -\varepsilon t$. Urmează că în (5) suma din membrul al doilea este a unei serii absolut convergente — ca și seria

$$\sum_1^\infty \int_{\lambda_\nu}^{\lambda_{\nu+1}} e^{-\varepsilon t}\, dt = \frac{1}{\varepsilon} \sum_1^\infty (e^{-\varepsilon\lambda_\nu} - e^{-\varepsilon\lambda_{\nu+1}}).$$

Astfel, seria dată este convergentă pentru $x > a$.

2° Invers, fie seria convergentă în $z = x$ și $\varepsilon > 0$. Punînd $b_\nu = a_\nu e^{-\lambda_\nu x}$, avem

$$a_1 + \ldots + a_n = \sum_1^\infty b_\nu e^{\lambda_\nu x} = \sum_1^{n-1} (b_1 + \ldots + b_\nu)(e^{\lambda_\nu x} - e^{\lambda_{\nu+1} x}) + (b_1 + \ldots + b_n) e^{\lambda_n x}$$

(identitatea lui Abel). Seria $\sum_1^\infty b_\nu$ fiind convergentă prin ipoteză, avem $|b_1 + \ldots + b_\nu| < M$ (fix), deci

$$|a_1 + \ldots + a_n| < \sum_1^{n-1} M(e^{\lambda_{\nu+1} x} - e^{\lambda_\nu x}) + M e^{\lambda_n x} =$$

$$= M(2e^{\lambda_n x} - e^{\lambda_1 x}) < 2M e^{\lambda_n x},$$

de unde

$$\log |a_1 + \ldots a_n| < \lambda_n x + N < (x + \varepsilon)\lambda_n \quad (N \text{ fix})$$

pentru $n > n_0$. Cum ε este arbitrar de mic, aceasta arată că

$$a = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \log |a_1 + \ldots + a_n| \leqq x.$$

Din 1° și 2° rezultă că abscisa de convergență este a.

Teorema 8. *Dacă o serie Dirichlet nu este absolut convergentă în $z = 0$, abscisa de convergență absolută este*

$$a_0 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{\lambda_n} \log (|a_1| + \ldots + |a_n|).$$

Urmează din teorema precedentă observînd că $|a_n e^{-\lambda_n z}| = |a_n| e^{-\lambda_n x}$ ($x = \operatorname{Re} z$) și că abscisa de convergență absolută este abscisa de convergență a seriei $\sum_1^\infty |a_n| e^{-\lambda_n x}$.

§ 79. Serii de puteri

a) Sînt denumite astfel seriile de forma $\sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$, unde z_0 este un punct dat la distanță finită iar coeficienții a_n sînt numere complexe. Aceste serii joacă un rol capital în teoria funcțiilor de variabilă complexă și de aceea le vom studia în detaliu.

Alături de ele vom avea de considerat și serii de puteri cu exponenți negativi: $\sum_0^\infty a_n(z - z_0)^{-n}$, care se deduc din serii de puteri (cu exponenți pozitivi) prin transformarea $z - z_0 = \frac{1}{z'}$.

O serie de puteri $\sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$ converge în orice caz în punctul $z = z_0$, unde are suma a_0. Ea nu poate prezenta interes decît dacă converge și în alte puncte; atunci mulțimea punctelor de convergență (mulțimea de convergență) cuprinde un cerc deschis. Mai precis, avem următoarea teoremă fundamentală:

Teorema 1. *(Teorema întîia a lui Abel). Mulțimea de convergență a unei serii de puteri $\sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$ este formată dintr-un disc deschis de centru z_0, $|z - z_0| < R$, plus eventual puncte de pe circumferința $|z| = R$. Ea se poate reduce la punctul z_0 ($R = 0$) sau poate fi tot planul euclidian ($R = \infty$). Seria este (cînd $R > 0$) absolut convergentă în cercul $|z - z_0| < R$ și uniform convergentă în interiorul acestui cerc.*

1° Evident, putem presupune $z_0 = 0$, căci o translație $z - z_0 = z'$ duce punctele de convergență ale seriei date în puncte de convergență ale seriei transformate; și reciproc. Așadar considerăm seria $\sum_0^\infty a_n z^n$.

Dacă seria converge numai în $z = 0$ nu avem nimic de demonstrat. Fie $z_1 \neq 0$ un alt punct de convergență. Vom demonstra că seria dată converge absolut în tot cercul $|z| < |z_1|$. Într-adevăr, avem în virtutea ipotezei: $a_n z_1^n \to 0$ pentru $n \to \infty$; deci, dat $\varepsilon > 0$, există un N astfel că

$$|a_n z_1^n| < \varepsilon \text{ pentru } n > N.$$

Urmează de aici, pentru $|z| < |z_1|$:

$$|a_n z^n| < \varepsilon \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \text{ cu } n > N.$$

Cum $\left| \frac{z}{z_1} \right| < 1$, seria geometrică $\sum_0^\infty \left| \frac{z}{z_1} \right|^n$ este convergentă; de unde afirmația.

Să considerăm acum mulțimea (z_1) a tuturor punctelor de convergență, și fie $R = \sup(|z_1|)$. Aceasta înseamnă că seria nu converge în nici un punct z cu $|z| > R$; și totodată că, pentru un punct z cu $|z| < R$, există un punct de convergență z_1 astfel că $|z| < |z_1|$. Atunci seria converge absolut în z, conform rezultatului precedent. Așadar seria dată converge absolut în tot cercul $|z| < R$ și nu converge nicăieri în exteriorul acestuia, $|z| > R$. Ea însă poate converge (absolut sau nu) în puncte ale circumferinței $|z| = R$. (Vezi exemplele de mai jos).

2° Pentru a dovedi că seria dată converge uniform în interiorul cercului de convergență $|z| < R$, este destul să constatăm că este convergentă uniform în orice disc $|z| \leqslant r < R$ (cu un asemenea cerc putem acoperi orice mulțime închisă $\overline{\Delta}$, conținută în cercul de convergență). Într-adevăr, fie z_1 un punct din coroana cuprinsă între cele două cercuri $(r < |z_1| < R)$. Avem, pentru $|z| \leqslant r$:

$$|a_n z^n| < \varepsilon \left| \frac{z}{z_1} \right|^n \leqslant \varepsilon \left| \frac{r}{z_1} \right|^n \text{ cu } n > N.$$

Seria geometrică $\sum_0^\infty \left| \frac{r}{z_1} \right|^n$ nu depinde de z și este convergentă; deci seria dată este uniform convergentă în cercul $|z| \leqslant r$ (după criteriul lui Weierstrass).

b) Din teorema demonstrată rezultă, aplicînd teorema lui Weierstrass:

Teorema 2. *O serie de puteri cu raza de convergență $R > 0$ este o funcție $f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n$, olomorfă în cercul de convergență $|z - z_0| < R$. Ea poate fi derivată și integrată termen cu termen în interiorul cercului de convergență:*

$$f^{(p)}(z) = \sum_p^\infty n(n-1) \ldots (n-p+1)\, a_n (z - z_0)^{n-p} \quad (|z - z_0| < R),$$

de unde

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

și

$$\int_{z_0}^{z} f(z)\, dz = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1} (z - z_0)^{n+1} \quad (|z - z_0| < R),$$

seriile astfel obținute având același cerc de convergență.

Avem numai de justificat ultima afirmație: Seriile precedente converg sigur în cercul $|z - z_0| < R$. Dacă de exemplu seria lui $f'(z)$ ar avea o rază de convergență $> R$, ar urma ca seria integrată să aibă de asemenea o rază de convergență $> R$; or, această serie este tocmai cea dată.

c) Cu ajutorul transformării $z - z_0 = \frac{1}{z}$, teorema 1 se extinde la serii de puteri cu exponenți negativi de tipul $\sum_0^\infty a_n z^{-n}$.

Teorema 3. *Suma unei serii de puteri cu exponenți negativi*

$$f(z) = \sum_0^\infty b_n (z - z_0)^{-n}$$

este o funcție olomorfă în exteriorul cercului de convergență Γ. *Seria se poate deriva termen cu termen, avînd derivatele*

$$(6) \qquad f^{(m)}(z) = (-1)^m \sum_1^\infty n(n+1)\dots(n+m-1)\, b_n (z - z_0)^{-n-m}$$

cu același domeniu de convergență (ext Γ).

Dacă $b_1 = 0$ *avem și*

$$(7) \qquad \int_{z_1}^{z} f(z)\,dz = \sum_0^\infty \frac{b_n}{1-n}\left[(z - z_0)^{1-n} - (z_1 - z_0)^{1-n}\right], \quad z_1, z \in \text{ext } \Gamma,$$

altfel apare un termen logaritmic: $b_1 \log \frac{z - z_0}{z_1 - z_0}$.

Cercul Γ este cercul de centru z_0 avînd raza egală cu inversa razei de convergență a seriei $\sum_0^\infty b_n z'^n$. Cum aceasta converge uniform în orice cerc de centru O și rază $< R$, seria dată converge uniform în exteriorul oricărui cerc Γ' de centru z_0 și rază $> \frac{1}{R}$. De aici urmează (6), în virtutea teoremei 2 § 78 în Γ' și deci în ext Γ. Apoi aplicînd (3), § 78 [valabilă fiindcă $\int_{z_0}^{z} (z - z_0)^{-n}\,dz$ sînt uniforme pentru $n \neq 1$], avem (7), serie uniform convergentă în orice coroană de centru z_0 conținută în ext Γ (teorema 3, observația 2, § 78).

Cercul de convergență al seriei derivate ($m = 1$) nu poate avea raza $< \frac{1}{R}$, căci integrînd-o după formula (7) (aplicabilă fiindcă în seria derivată lipsește termenul în $\frac{1}{z - z_0}$), am obține tocmai seria dată.

Exemplul 1. *Fie* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$, *cu coeficienți reali, convergente într-un cerc de rază* > 1 *și centru* O. *Avem*

$$\sum_0^\infty a_n b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\, g(e^{-i\varphi})\,d\varphi \qquad \textit{(Parseval)}.$$

Seriile $f(z)$ și $g(\bar{z})$ fiind absolut și uniform convergente pe cercul $|z| = 1$, putem scrie

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi})\, g(e^{-i\varphi})d\varphi = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a_m b_n e^{i(m-n)\varphi}d\varphi.$$

Ultima integrală este nulă pentru $m \neq n$ și egală cu $2\pi a_m b_n$ pentru $m = n$.

d) **Teorema 4.** *(Cauchy). Raza de convergență a unei serii de puteri,* $\sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$ *este dată de formula:*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

În particular, seria este convergentă în tot planul dacă $\sqrt[n]{a_n} \to 0$ *și numai în punctul* z_0 *dacă* $\sqrt[n]{a_n}$ *este nemărginit.*

Să notăm $l = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{a_n}$ — cantitate existentă întotdeauna. Presupunînd $l \neq 0$, avem prin definiție pentru un $\varepsilon > 0$ dat, un N astfel că:

$$\sqrt[n]{a_n} \begin{cases} < l + \varepsilon = l' & \text{pentru } n > N, \\ > l - \varepsilon = l'' & \text{pentru o infinitate de indici } n. \end{cases}$$

Seria converge în orice punct z astfel că $|z - z_0| = r < \frac{1}{l}$, căci luînd pe $l' > l$ așa ca $r < \frac{1}{l'} < \frac{1}{l}$, vom avea:

$$|a_n(z - z_0)^n| < (l'r)^n \qquad n > N$$

și seria este convergentă pentru că $l'r < 1$.

Din contra, seria nu converge dacă $|z - z_0| = r > \frac{1}{l}$, căci luînd pe $l'' < l$ așa ca $r > \frac{1}{l''} < \frac{1}{l}$, vom avea

$$|a_n(z - z_0)^n| > (l''\ r)^n > 1$$

pentru o infinitate de indici n și seria nu poate converge (pentru că termenul general nu tinde la zero). Din acesta rezultă $R = \frac{1}{l}$.

În cazul $l = 0$, adică $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$, primul argument rămîne valabil și arată că seria converge pentru orice z finit.

În cazul $l = \infty$, adică $\sqrt[n]{a_n}$ nemărginit, rămîne valabil al doilea argument, care arată că seria nu converge pentru nici un $z \neq z_0$.

Exemple

2. $\sum_1^\infty \frac{z^n}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}$.

$$\sqrt[n]{a_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \to \frac{1}{e} \text{ și deci } R = e.$$

3. $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^n}$, $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{z^n}{n^n}$ *și mai general* $\sum_1^\infty c_n \frac{z^n}{n^n}$ *cu* c_n *mărginiți.*

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{K}{n} \to 0 \text{ și deci } R = \infty.$$

4. $\sum_1^\infty n^{\log n} z^n$.

$$\sqrt[n]{a_n} = n^{\frac{1}{n}\log n} \to 1 \text{ și deci } R = 1.$$

(Deoarece $\log\left(n^{\frac{1}{n}\log n}\right) = \frac{1}{n}(\log n)^2 \to 0$.)

e) De multe ori se poate folosi

Teorema 5. *Dacă există* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, *atunci raza de convergență este* $R = \frac{1}{l}$.

Într-adevăr, aplicînd teorema lui D'Alembert seriei modulilor, se vede că ea converge pentru $|z - z_0| < \frac{1}{l}$ și diverge pentru $|z - z_0| > \frac{1}{l}$. Cum seria dată este absolut convergentă în cercul $|z - z_0| < R$, și nu este convergentă (deci nici absolut convergentă) pentru $|z - z_0| > R$, urmează $R = \frac{1}{l}$.

Exemple

5. *Fie* $P(z)$ *și* $Q(z)$ *polinoame și* n_0 *un indice astfel că* $Q(n) \neq 0$ *pentru* $n \geq n_0$. *Seria*

$$\sum_{n_0}^\infty \frac{P(n)}{Q(n)} z^n \text{ are } R = 1.$$

Într-adevăr

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{P(n+1)}{P(n)} \cdot \frac{Q(n)}{Q(n+1)}\right| \to 1.$$

6. $\sum_0^\infty n!\, z^n$. *Avem* $\frac{a_{n+1}}{a_n} = n + 1 \to +\infty$, *deci* $R = 0$. De aici, comparînd cu teorema lui Cauchy, se deduce $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ (în adevăr, se constată ușor că această funcție este crescătoare, deci limita există).

7. $\sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}$ *este convergentă în tot planul* $(R = \infty)$.

8. *La fel* $\sum_0^\infty c_n \to \frac{z^n}{n^n}$ *cu* c_n *mărginiți.*

Într-adevăr $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{n}\sqrt[n]{|c_n|} \to 0$.

9. $\sum_0^\infty \binom{n+\alpha}{n} z^n$.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+\alpha+1}{n+1} \to 1 \text{ şi deci } R = 1.$$

10. $\sum_0^\infty \frac{a(a-nb)^{n-1}}{n!}$ $\qquad b \neq 0.$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{n+1}\frac{[a-(n+1)b]^n}{(a-nb)^{n-1}} = \frac{a-nb}{n+1}\left(1-\frac{b}{a-nb}\right)^n =$$

$$= \frac{a-nb}{n+1}\left(1+\frac{1}{n-\frac{a}{b}}\right)^{n-\frac{a}{b}}\left(1+\frac{1}{n-\frac{a}{b}}\right)^{\frac{a}{b}} \to -be.$$

Deci $R = \frac{1}{|b|e}$.

Observaţie. Dacă există $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$, *atunci şi* $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = l$.

Într-adevăr, fiind dat $\varepsilon > 0$, să luăm l' aşa fel ca $l < l' < l + \varepsilon$. Există N aşa fel ca $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < l'$ pentru $n \geqq N$, adică

$$|a_{N+1}| < l'|a_N|, \quad |a_{N+2}| < l'|a_{N+1}|, \ldots,$$

de unde

$$|a_{N+p}| < l'^p |a_N|,$$

$$|a_{N+p}|^{\frac{1}{N+p}} < l'^{\frac{p}{N+p}} |a_N|^{\frac{1}{N+p}}.$$

Cum ultima expresie tinde la l' cînd $p \to \infty$, avem

$$\sqrt[n]{|a_n|} < l + \varepsilon \text{ pentru } n > N_1 > N.$$

La fel se vede (cînd $l > 0$) că

$$\sqrt[n]{|a_n|} > l - \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > N_2.$$

Această observaţie poate fi utilizată la calculul unor limite.

Exemple

11. *Luînd* $a_n = n!$ *se deduce* $\sqrt[n]{n!} \to +\infty$ *(exemplul 6).* Luînd $a_n = \frac{n!}{n^n}$ se obţine $\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!} \to \frac{1}{e}$ *(exemplul 18).* Tot aşa $\sqrt[n]{a} \to 1 (a > 0)$, $\sqrt[n]{n^p} \to 1$ *etc.*

12. $\sum_0^\infty e^{\alpha n} z^n$, $\alpha = a + ib$.

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |e^{\alpha}| = e^a = \sqrt[n]{|a_n|} \text{ şi deci } R = e^{-a}.$$

13. $\sum_0^\infty \cos n\alpha z^n$ și $\sum_0^\infty \sin n\alpha z^n$, *cu* $\alpha = a + ib$ *au* $R = e^{-|b|}$.

Într-adevăr, suma și diferența primei serii cu a doua înmulțită cu i sînt seriile: $\sum_0^\infty e^{in\alpha} z^n$, și $\sum_0^\infty e^{-in\alpha} z^n$, care au razele de convergență e^b și e^{-b} (teorema lui Cauchy). Urmează că seriile date au ca rază de convergență pe cea mai mică dintre razele precedente, adică $e^{-|b|}$.

Alt mod de rezolvare:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cos(n+1)\alpha}{\cos n\alpha} = \cos\alpha - \sin\alpha \operatorname{tg} n\alpha.$$

Pentru $b \neq 0$: $\operatorname{tg} n\alpha \to \begin{cases} +i & \text{cînd } b > 0 \\ -i & \text{cînd } b < 0 \end{cases}$; deci $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \begin{cases} e^{-i\alpha} \\ e^{i\alpha} \end{cases}$ și $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to e^{|b|}$ în ambele cazuri.

Pentru $b = 0$: $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\cos na} = 1$. (Căci cos na ia de o infinitate de ori valoarea 1 dacă a este comensurabil cu π, sau valori oricît de apropiate de 1 dacă a este incomensurabil cu π.)

Deci $R = e^{-|b|}$ în toate cazurile.

Pentru seria a doua se găsește la fel $R = e^{-|b|}$.

Observație. Adunînd la prima serie pe a doua înmulțită cu i obținem $\sum_1^\infty e^{ian} z^n$, convergentă în cercul de rază $R = e^{-|b|}$. Cercul de convergență al acestei serii are însă raza $R = e^b$. (Exemplul 12.)

O aplicație imediată a teoremei lui Cauchy este:

Teorema 6. *(Hadamard). Dacă seriile* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *și* $\sum_0^\infty b_n z^n$ *au razele de convergență* R_1 *și* R_2 *pozitive, atunci raza de convergență a seriei* $\sum_0^\infty a_n b_n z^n$ *este* $\rho \geqq R_1 R_2$. *Iar în cazul cînd de exemplu* $\sqrt[n]{b_n} \to \frac{1}{R_2}$, *avem* $\rho = R_1 R_2$.

Prima afirmație rezultă din propoziția: *Dacă* $a_n > 0$, $b_n > 0$ *și* $\overline{\lim_{n\to\infty}} a = \lambda$, $\overline{\lim_{n\to\infty}} b_n = \mu$ *finite, atunci* $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n \leqq \lambda\mu$.

Într-adevăr, dacă de exemplu $\mu = 0$, $a_n b_n \to 0$ pentru că a_n este mărginit și $b_n \to 0$. Fie acum $\lambda > 0$, $\mu > 0$. Fiind dat $k = k_1 k_2 > 1$, cu $k_1 > 1$, $k_2 > 1$, avem $a_n < k_1\lambda$ și $b_n < k_2\mu$ pentru $n > N$, deci $a_n b_n < k\lambda\mu$ pentru $n > N$. De unde $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n \leqq \lambda\mu$.

A doua afirmație rezultă din propoziția: *În aceleași condiții de mai sus, dacă* $b_n \to \mu$, *avem* $\overline{\lim} a_n b_n = \lambda\mu$. Cum am observat, aceasta se verifică în cazul cînd $\lambda = 0$ sau $\mu = 0$. Cînd $\lambda > 0$ și $\mu > 0$ rămîne de demonstrat că $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n \geqq \lambda\mu$. Într-adevăr, dîndu-se $0 < k' = k_1' k_2' < 1$, cu $0 < k_1' < 1$ și $0 < k_2' < 1$, avem $a_n > k_1'$ pentru o infinitate de indici n și $b_n > k_2'\mu$ pentru $n > N'$; deci $a_n b_n > k'\lambda\mu$ pentru o infinitate de indici n. De unde $\overline{\lim_{n\to\infty}} a_n b_n \geqq \lambda\mu$.

Exemple.

14. *Dacă* $|a_n z_0^n| < kn^p$ *(*k = *constant),* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *este convergent pentru* $|z| < |z_0|$.

Într-adevăr $|a_n z^n| < kn^p \left|\frac{z}{z_0}\right|^n$ și acesta este termenul general al unei serii convergente pentru $\left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$ (exemplul 11).

15. *Dacă* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *are raza de convergență* $R > 0$, $\sum_0^\infty a_n n^p z^n$ *(*p *real) are aceeași rază de convergență.*

$\sqrt[n]{n^p} \to 1$. Se aplică teorema 6 (Hadamard).

16. *Dacă* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *are raza de convergență* > 0, $\sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$ *converge în tot planul.*

$\sqrt[n]{n!} \to \infty$, cum se vede din: $\sqrt[2n]{(2n)!} > \sqrt[2n]{n^n} = \sqrt{n}$ și $\sqrt[2n+1]{(2n+1)!} > \sqrt[2(n+1)]{n^{n+1}} = \sqrt{n}$. Se aplică teorema 6.

f) În ce privește convergența seriei de puteri pe circumferința de convergență $|z| = R$, nu se poate afirma, în general, nimic; se pot prezenta toate cazurile imaginabile.

Exemple.

17. $\sum_1^\infty n^p z^n (p \geqq 0)$ *cu* $R = 1$ *(exemplul 11), nu converge nicăieri pe circumferința de convergență.*

Căci pentru $z = 1$, termenul general nu tinde la 0.

18. *La fel* $\sum_1^\infty \frac{n!}{n^n} z^n$.

Avem $\frac{a_n}{a_{n-1}} = \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \frac{1}{1 - \frac{1}{n}} \to \frac{1}{e}$ deci $R = e$. Pe circumferința de convergență $|a_n z^n| = a_n e^n$ și va fi destul să arătăm că $a_n e^n$ este crescător, sau că $\frac{a_{n+1}}{a_n} \to \frac{1}{e}$ descrescînd. În adevăr:

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^n : \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-1} = \frac{n-1}{n}\left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n = \frac{n-1}{n}\frac{1}{1-\left(\frac{1}{n^2}\right)^n} < \frac{n-1}{n}\frac{1}{1-\frac{1}{n}} = 1.$$

(S-a aplicat inegalitatea cunoscută: $(1+n)^n \geqslant 1 + nh$ pentru $1 + h > 0$.)

19. $\sum_1^\infty \frac{z^n}{n^p}$ $(p > 1)$ *converge absolut pe toată circumferința de convergență* $|z| = 1$, pentru că seria modulilor este convergentă.

Observație. Seria modulilor fiind aceeași pe toată circumferința de convergență, este destul ca seria dată să conveargă absolut într-un punct al circumferinței pentru ca să conveargă absolut în toate punctele acesteia.

Aceasta se întîmplă de exemplu atunci cînd $a_n \geqslant 0$ și seria converge pentru $z = R$, căci într-un punct $z = Re^{i\theta}$ modulul termenului general al seriei este $a_n R^n$ și prin ipoteză $\sum_{n=1}^\infty a_n R^n$ este convergentă.

Urmează că în cazul cînd seria nu converge într-un punct al circumferinței de convergență, sau nu converge absolut, atunci ea nu poate converge absolut în nici un punct al circumferinței (dar poate converge neabsolut).

Altă aplicație a observației de mai sus este:

Teorema 7. *Fie* $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ *în cercul de convergență* $|z|<R$. *Dacă* $a_n \geqslant 0$ *și* $f(x)$ *este mărginit în intervalul* $(0, R)$, *atunci seria converge absolut pe toată circumferința* $|z| = R$.

Prin ipoteză $f(x) < M$ fix, pentru $0 < x < R$. Deci $\sum_0^p a_n x^n < M$ în acest interval. Făcînd $x \to R$, obținem $\sum_0^p a_n R^n \leqslant M$ pentru fiecare p; ceea ce arată că $\sum_0^\infty a_n R^n$ converge, adică seria dată converge absolut în $z = R$ și deci tot așa pe toată circumferința $|z| = R$.

Teorema 8. *Fie* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *în cercul de convergență* $|z| < R$. *Dacă* $a_n \geqslant 0$ *și există* $\lim_{x\to R} f(x)$, *atunci seria converge absolut pe tot cercul de convergență.*

Prin ipoteză $f(x) < M$ (fix) pentru $0 < x < R$; deci $\sum_{n=1}^m a_n x^n < M$. Făcînd $x \to R$, obținem $\sum_{n=1}^m a_n R^n \leqslant M$, ceea ce arată că $\sum_{n=1}^\infty a_n R^n$ este convergentă. Afirmația rezultă acum din observația precedentă.

g) Privitor la convergența neabsolută pe circumferința de convergență avem:

Teorema 9. *(Teorema a doua a lui Abel). Fie* $\sum_0^\infty a_n z^n$ *cu cercul de convergență* $|z| < 1$. *Seria converge pe circumferința* $|z| = 1$ *cu excepția eventuală a punctului* $z = 1$, *dacă* $a_n \to 0$ *și seria* $\sum_0^\infty |a_n - a_{n+1}|$ *este convergentă; în particular, dacă* a_n *sînt reali și* $\to 0$ *monoton.*

Ne vom servi de un procedeu de transformare datorit lui Abel, foarte util în teoria seriilor: Fiind dată o serie de forma $\sum_0^\infty a_n b_n$, vom exprima suma $\sum_{m+1}^{m+p} a_n b_n$ cu ajutorul coeficienților a_n și al sumelor $\sigma_p = \sum_{m+1}^{m+p} b_n$. Avem:

$$\sum_{m+1}^{m+p} a_n b_n = a_{m+1}\sigma_1 + a_{m+2}(\sigma_2 - \sigma_1) + \ldots + a_{m+p}(\sigma_p - \sigma_{p-1})$$

sau

$$(8) \qquad \sum_{m+1}^{m+p} a_n b_n = \sigma_1(a_{m+1} - a_{m+2}) + \ldots + \sigma_{p-1}(a_{m+p-1} - a_{m+p}) + \sigma_p a_{m+p}.$$

Într-un punct diferit de 1 al circumferinței $|z| = 1$ avem $a_n z^n = a_n(\cos n\theta + i \sin \theta)$ cu $0 < \theta < 2\pi$ și avem de demonstrat că seriile $\sum_0^\infty a_n \cos n\theta$ și $\sum_0^\infty a_n \sin \theta$ sînt convergente. Pentru prima serie vom aplica identitatea (8) cu $b_n = \cos n\theta$. Atunci

$$\sigma_p = \cos(m+1)\theta + \ldots + \cos(m+p)\theta = \frac{\sin\frac{p\theta}{2}\cos\left(m\theta + \frac{p+1}{2}\theta\right)}{\sin\frac{\theta}{2}},$$

de unde $|\sigma_p| < \dfrac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$ și prin urmare

$$\left|\sum_{m+1}^{m+p} a_n \cos n\theta\right| < \frac{1}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\sum_{m+1}^{m+p-1} |a_n - a_{n+1}| + |a_{m+p}|\right);$$

de unde se vede că seria considerată este convergentă (după criteriul lui Cauchy) dacă $a_n \to 0$ și $\sum_{n=0}^\infty |a_n - a_{n+1}|$ este convergentă. La fel seria $\sum_0^\infty a_n \sin n\theta$.

Putem lua $\sigma_p = e^{i(m+1)\theta} + \ldots + e^{i(m+p)\theta} = e^{im\theta}\dfrac{e^{i(p+1)\theta} - e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1}$, de unde $|\sigma_p| < \dfrac{2}{|1 - e^{i\theta}|}$ etc.

Rămîne să observăm că, dacă a_n sînt reali și $\to 0$ monoton, avem

$$|a_0 - a_1| + \ldots + |a_{n-1} - a_n| = |a_0 - a_n|$$

(deoarece $a_{n-1} - a_n$ au un semn constant), și aceasta arată că $\sum_{n=1}^\infty |a_{n-1} - a_n|$ este convergentă (avînd suma $|a_0|$).

Exemplul **20.** *Să se examineze pe circumferința de convergență seria de la exemplul* **5)**, *presupunînd* $P(x)$ *și* $Q(x)$ *polinoame cu coeficienți reali, de grade* p *și* q.

1° $p > q$. Seria nu converge nicăieri pe circumferința $|z| = 1$, fiindcă termenul general nu tinde la 0.

2° $p < q$; $a_n = \dfrac{P(n)}{Q(n)} \to 0$ monoton pentru n destul de mare (derivata sfîrșind prin a păstra un semn constant). Deci seria converge în punctele diferite de 1 ale circumferinței (teorema lui Abel).

În sfîrșit pentru $z = 1$ vom observa că $\sum_0^\infty \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ are aceeași natură ca $\sum_0^\infty \dfrac{1}{n^{q-p}}$ (raportul termenilor generali ai acestor serii avînd o limită $\neq 0, \infty$); deci seria dată converge cînd $q > p + 1$, diverge cînd $q \leqslant p + 1$.

Observație. Teorema precedentă se extinde imediat la o serie cu raza de convergență R (făcînd transformarea $z = \dfrac{z'}{R}$); este destul să observăm că în enunțul teoremei va trebui să înlocuim a_n prin $a_n R^n$.

Mai departe vom da alte două teoreme relative la convergența pe circumferința de convergență (teoremele lui Tauber și Fatou).

h) Am văzut că o serie de puteri este uniform convergentă în orice domeniu închis $\overline{\Delta}$ conținut în cercul de convergență. Se pune problema de a vedea dacă seria poate converge uniform într-un domeniu $\overline{\Delta}$ care are puncte comune cu circumferința de convergență (ceea ce împiedică convergența în aceste puncte).

Un asemenea caz se prezintă cînd seria converge absolut pe circumferința de convergență (cum am observat, pentru aceasta este destul să conveargă absolut într-un punct al ei, de exemplu $z = R$), Atunci seria converge uniform în tot cercul de convergență închis, $|z| \leqslant R$. Căci avem $|a_n z^n| \leqslant |a_n| R^n$ și acesta este prin ipoteză termenul general al unei serii convergente. Astfel este seria de la exemplul 19.

Problema pusă este mult mai grea cînd nu avem decît convergență neabsolută pe circumferința de convergență. Primul rezultat în această direcție se datorește tot lui Abel:

Teorema 10. *(Teorema a treia a lui Abel). Dacă seria* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, *cu raza de convergență* 1, *converge în punctul* $z = 1$, *atunci ea converge uniform în orice sector închis, cu vîrful în* 1 *și conținut în cercul de convergență, și* $f(z) \to f(1)$ *în acel sector.*

Ultima afirmație este o consecință a celei dintîi (căci conform teoremei 16, § 77 și a cazurilor sale particulare convergența uniformă asigură continuitatea funcției $f(z)$ în sectorul considerat).

Este destul să dovedim convergența uniformă într-un sector $\overline{\Delta}$ simetric față de raza [0, 1], cu un unghiu de deschidere $2\theta < \pi$. Vom aplica criteriul de convergență uniformă a lui Cauchy. Avem, după identitatea lui Abel (8):

$$\sum_{m+1}^{m+p} a_n z^n = \sigma_1(z^{m+1} - z^{m+2}) + \ldots + \sigma_{p-1}(z^{m+p-1} - z^{m+p}) + \sigma_p z^{m+p},$$

unde $\sigma_p = \sum_{m+1}^{m+p} a_n$. Prin ipoteză fiind dat $\varepsilon > 0$, există un N astfel că $|\sigma_p| < \varepsilon$ pentru $m \geqslant N$ și p arbitrar.

În aceste condiții pentru $|z| < 1$, avem

$$\left|\sum_{m+1}^{m+p} a_n z^n\right| < \varepsilon\left(\sum_{m+1}^{m+p-1} |z^n - z^{n+1}| + |z|^{m+p}\right) < \varepsilon\left(|1 - z| \sum_0^\infty |z|^n + 1\right) =$$

$$= \varepsilon\left(\frac{|1 - z|}{1 - |z|} + 1\right).$$

Să limităm sectorul (închis) $\overline{\Delta}$ la cercul de diametru [0,1] (vezi fig. 92). Fie z un punct $\neq 1$ în acest sector și z' a doua intersecție a semidreptei $1z$ cu cercul de centru 0 și rază $|z|$, φ unghiul acestei drepte cu raza $[0, 1]\left(\varphi \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}\right)$.

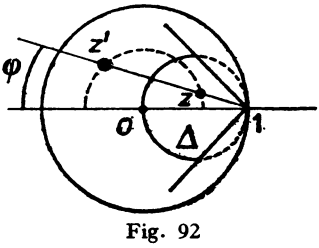

Fig. 92

Avem (exprimînd puterea punctului 1 față de acel cerc):

$$|1 - z| \cdot |1 - z'| = 1 - |z|^2$$

și pe de altă parte, considerînd proiecția lui O pe dreapta $1z'$:

$$|1 - z'| \geqslant \cos\varphi \geqslant \cos\theta.$$

Urmează

$$\frac{|1-z|}{1-|z|}=\frac{1+|z|}{|1-z'|}<\frac{2}{\cos\theta}. \tag{9}$$

Aşadar

$$\left|\sum_{m+1}^{m+p} a_n z^n\right|<\varepsilon\left(1+\frac{2}{\cos\theta}\right)$$

pentru $m \geqslant N$, p arbitrar în tot domeniul închis $\overline{\Delta}$ (inclusiv $z=1$, unde $|\sigma_p|<\varepsilon$). Aceasta demonstrează convergenţa uniformă a seriei date în $\overline{\Delta}$.

Observaţie. Teorema se aplică şi în cazul unei serii cu raza de convergenţă R, care converge într-un punct oarecare $\zeta = Re^{i\alpha}$ al circumferinţei de convergenţă. (Se va face transformarea $\zeta z' = z$.)

i) După teorema precedentă, dacă seria $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ converge într-un punct ζ al circumferinţei de convergenţă, funcţia $f(z)$ tinde către $f(\zeta)$ pe un drum cuprins între două coarde de extremitate ζ. Se naşte întrebarea dacă reciproca este adevărată — întrebare care ţine de problema studiată la f) şi g). În general răspunsul este negativ: $f(z)$ poate avea limită pentru $z \to \zeta$ fără ca seria că conveargă în ζ.

Exemplul 21. $\dfrac{1}{1+z}=\sum_0^\infty (-1)^n z^n$ *în punctul* $\xi = 1$.

O teoremă reciprocă se poate însă stabili dacă coeficienţii a_n verifică o condiţie relativă la ordinul lor de mărime. Cel mai simplu rezultat de acest fel este următorul:

Teorema 11. *(Tauber). Fie* $f(z)=\sum_0^\infty a_n z^n$ *convergentă în discul* $|z|<1$ *şi* $na_n \to 0$. *Dacă* $f(z) \to S$ *pentru* $z \to 1$ *pe un drum cuprins între două coarde de extremitate* 1, *atunci seria converge în* $z=1$ *şi are suma* S.

Ne vom servi de *lema* următoare (Cauchy) (vezi exerciţiul 5, § 13).

Dacă $b_n \to 0$ *cînd* $n \to \infty$, *atunci* $\dfrac{b_1+\ldots+b_n}{n} \to 0$ *sau mai general, dacă* $b_n \to b$, *atunci* $\dfrac{b_1+\ldots+b_n}{n} \to b$.

Putem presupune că drumul C, pe care $z \to 1$, este conţinut într-un sector de felul aceluia considerat în demonstraţia teoremei 10. Astfel pe acest drum va fi valabilă inegalitatea (9).

Să punem

$$\nu=\left[\frac{1}{1-|z|}\right].$$

Evident, $\nu \to \infty$ cînd $z \to 1$. Mai mult, ν ia orice valoare întreagă începînd cu o anumită valoare n_0 (destul de mare), pentru puncte ale drumului C. Căci aceasta înseamnă:

$$\nu \leqslant \frac{1}{1-|z|}<\nu+1,$$

adică z cuprins în coroana de centru 1, definită de

$$\frac{1}{\nu+1} < 1 - |z| \leqslant \frac{1}{\nu}, \tag{10}$$

și această coroană conține puncte ale drumului dacă ν este destul de mare.

Rezultă de aici că teorema va fi stabilită dacă vom dovedi că

$$\sigma = \sum_0^\infty a_n z^n - \sum_0^\nu a_n \to 0,$$

cînd $z \to 1$ pe C.

Vom scrie:

$$\sigma = \sum_{\nu+1}^\infty a_n z^n - \sum_0^\nu a_n (1 - z^n) = \sigma_1 - \sigma_2.$$

Prin ipoteză, fiind dat $\varepsilon > 0$, există un n_1 astfel că $|na_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n > n_1$. Totodată vom avea $\nu > n_1$ într-o vecinătate $|1 - z| < \rho_1$ a punctului 1, pe C. Deci

$$|\sigma_1| = \left| \sum_{\nu+1}^\infty n a_n \frac{z^n}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2(\nu+1)} \sum_{\nu+1}^\infty |z|^n = \frac{\varepsilon |z|^{\nu+1}}{2(\nu+1)(1-|z|)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

avînd în vedere (10). Pe de altă parte, aplicînd (9)

$$|1 - z^n| = |(1-z)(1 + \ldots + z^{n-1})| < n|1-z| < \frac{2n}{\cos\theta}(1 - |z|)$$

pe C.

Astfel, aplicînd (10),

$$|\sigma_2| = \left| \sum_1^\nu a_n (1 - z^n) \right| < \frac{2(1-|z|)}{\cos\theta} \sum_1^\nu n|a_n| \leqslant \frac{2}{\cos\nu} \frac{\sum_1^\nu n|a_n|}{\nu}.$$

După lema de mai sus, ultima expresie $\to 0$ cînd $\nu \to \infty$, deci cînd $z \to 1$ pe C. Așadar

$$|\sigma_2| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ pentru } |1 - z| < \rho_2, \text{ pe } C$$

și în definitiv: $|\sigma| < \varepsilon$ pentru $|1 - z| < \rho_1, \rho_2$, pe C.
Aceasta demonstrează teorema.

j) Teorema lui Tauber poate fi extinsă și la drumuri C care nu pot fi cuprinse între două coarde, însă regulate — deci la arce de curbă tangente în punctul 1 circumferinței de convergență. Din contra, o asemenea generalizare este imposibilă pentru teorema lui Abel, căci se pot da exemple în care, deși seria converge în $z = 1$, suma ei $f(z)$ nu are limită pe un cerc tangent interior cercului de convergență $|z| = 1$.

Presupunerea că drumul C este regulat înseamnă că el poate fi reprezentat printr-o ecuație $z = z(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, unde $z(t)$ admite derivată finită și continuă. Curba este deci rectificabilă. Deci integrala $\int_z^1 f(z)\,dz$, luată pe C, există ($f(z)$ fiind continuu și avînd limită finită pe C pentru $z \to 1$ sau $t \to 0$).

Vom mai presupune că $f(z) \to 0$ pentru $z \to 1$ pe C, ceea ce, evident, nu micşorează generalitatea. Atunci

$$\frac{1}{1-z}\int_z^1 f(z)\,dz \to 0 \quad \text{pentru } z \to 1 \quad (\text{pe } C).$$

Într-adevăr, fiind dat $\eta > 0$, avem $|f(z)| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $|1-z| < \rho$, deci

$$\left|\frac{1}{1-z}\int_z^1 f(z)\,dz\right| < \frac{\varepsilon s(z)}{2|1-z|} < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad |1-z| < \rho_0 < \rho,$$

deoarece, cum se ştie, raportul $\frac{s(z)}{|1-z|}$ dintre lungimea arcului şi coarda sa tinde la 1.

Avem (teorema 1, § 78), integrînd pe C între punctele z şi z' diferite de 1:

$$\int_z^{z'} f(z)\,dz = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1}(z'^{n+1} - z^{n+1}).$$

Seria din membrul al doilea este uniform convergentă cu privire la z', pentru $|z'| \leqslant 1$, căci, deoarece $na_n \to 0$, termenii ei, pentru $\varepsilon > 0$ dat, au modulii $< \frac{2\varepsilon}{n(n+1)}$ pentru $n > N$. Deci, făcînd $z' \to 1$ obţinem:

$$\int_z^1 f(z)\,dz = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n+1}(1 - z^{n+1}).$$

Scriem:

$$\int_z^1 f(z)\,dz = \sum_0^\nu \frac{a_n}{n+1}(1-z^{n+1}) + \sum_{\nu+1}^\infty \frac{a_n}{n+1}(1-z^{n+1}) = \Sigma_1 + \Sigma_2$$

unde

$$\nu = \left[\frac{1}{|1-z|}\right]$$

şi deci

$$\frac{1}{\nu+1} < |1-z| \leqslant \frac{1}{\nu}. \tag{11}$$

Avem mai întîi, ţinînd seama de (11):

$$|\Sigma_2| < 2\varepsilon \sum_{\nu+1}^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 2\varepsilon \sum_{\nu+1}^\infty \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2\varepsilon}{\nu+1} < 2\varepsilon|1-z|$$

pentru $|1-z| < \rho_1$, astfel ca $\nu > N$. Aceasta arată că

$$\frac{1}{1-z}\Sigma_2 \to 0$$

pentru $z \to 1$, pe C.

Avem apoi

$$1 - z^{n+1} = (1-z)(1 + z + \ldots + z^n) =$$
$$= (1-z)(n+1) - (1-z)^2[n + (n-1)z + \ldots + z^{n-1}]$$

şi prin urmare

$$\frac{1}{1-z}\sum_1 = \sum_0^{\nu} a_n - \sum_1',$$

unde

$$\sum_1' = (1-z)\sum_0^{\nu} \frac{a_n}{n+1}[n + (n-1)z + \ldots + z^{n-1}].$$

Cum, după (11) şi o aproximare evidentă,

$$|\sum_1'| < \frac{1}{\nu}\sum_1^{\nu} n|a_n|,$$

$\sum_1' \to 0$ pentru $z \to 1$, în virtutea lemei lui Cauchy (vezi exerciţiul 5, § 13). Aşadar

$$\frac{1}{1-z}\sum_1 \sim \sum a_n$$

pentru $z \to 1$, pe C [unde $\varphi(z) \sim \psi(z)$ pentru $z \to \alpha$ înseamnă că $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \to 1$ cînd $z \to \alpha$] şi astfel

$$\frac{1}{1-z}\int_z^1 f(z)\,dz \sim \sum_0^{\nu} a_n$$

pentru $z \to 1$, pe C.

Dar, cum am văzut, membrul $I \to 0$; deci $\sum_0^{\nu} a_n \to 0$, ceea ce demonstrează teorema.

Littlewood a arătat că teorema lui Tauber se poate generaliza în condiţia mai largă: $|a_n|$ mărginiţi. Vom stabili aceasta mai departe.

k) Atunci cînd o serie $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ diverge într-un punct ζ al circumferinţei de convergenţă, se pune problema comportării funcţiei $f(z)$ în vecinătatea acelui punct (în special determinarea ordinului de mărime al lui $|f(z)|$ cînd $z \to \zeta$). Mai precis, este vorba ca din comportarea asimptotică a coeficienţilor a_n sau a sumelor parţiale $S_n = \sum_0^{n} a_m$, să se deducă comportarea asimptotică (pentru $z \to \zeta$) a funcţiei $f(z)$.

O teoremă mai simplă, referitoare la această problemă este:

Teorema 12. *Fie* $f(x) = \sum_0^{\infty} a_n x^n$ *şi* $g(x) = \sum_0^{\infty} b_n x^n$, *cu* $a_n > 0$ *şi* $b_n > 0$, *şi cel puţin una dintre seriile* $\sum_0^{\infty} a_n$ *şi* $\sum_0^{\infty} b_n$ *divergente, de exemplu a doua. Dacă* $a_n \sim \lambda b_n$ *cînd* $n \to \infty$, *atunci* $f(x) \sim \lambda g(x)$ *cînd* $x \to 1$ (λ const. $\neq 0, \infty$).

Prin ipoteză, fiind dat $\varepsilon > 0$, există un N astfel că

$$\left|\frac{a_n}{b_n} - \lambda\right| < \varepsilon \text{ sau } |a_n - \lambda b_n| < \varepsilon b_n \text{ pentru } n > N.$$

Avem acum

$$|f(x)-\lambda g(x)| = \left|\sum_0^\infty (a_n - \lambda b_n)\, x^n\right| \leqslant \sum_0^N |a_n - \lambda b_n| + \varepsilon \sum_{N+1}^\infty b_n x^n.$$

Vom observa că, din faptul că $\sum_0^\infty b_n$ este divergent, urmează $g(x) \to +\infty$ pentru $x \to 1$.
Căci avem

$$g(x) > \sum_0^\nu b_n x^n > x^\nu \sum_0^\nu b_n, \qquad (0 < x < 1),$$

de unde

$$\lim_{x\to 1} g(x) \geqslant \sum_0^\nu b_n.$$

Şi cum $\sum_0^\nu b_n \to +\infty$ pentru $\nu \to \infty$, urmează afirmaţia.

Rezultă că putem alege un număr $\delta < 1$ astfel ca

$$\sum_0^N |a_n - \lambda b_n| < \varepsilon g(x) \text{ pentru } x > 1-\delta;$$

atunci vom avea

$$|f(x) - \lambda g(x)| < 2\varepsilon g(x), \text{ pentru } x > 1-\delta,$$

ceea ce demonstrează teorema.

Exemple

22. *Dacă în seria* $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$, $a_n \sim \frac{1}{n}$, *atunci* $f(x) \sim \log \frac{1}{1-x}$ *pentru* $x \to 1$.
Rezultă din compararea cu seria cunoscută:

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n} \quad (|x| < 1).$$

23. *Dacă* $a_n \sim \log n$, *avem* $f(x) \sim \frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x}$ *pentru* $x \to 1$.
Rezultă din compararea cu seria

$$\frac{1}{1-x} \log \frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n \cdot \sum_1^\infty \frac{x^n}{n} = \sum_1^\infty \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n,$$

ştiindu-se că $1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \log n$.

24. *Dacă* $p < 1$, *avem*

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n^p} \sim \frac{\Gamma(1-p)}{(1-x)^{1-p}},$$

pentru $x \to 1$, *unde* $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$ *este integrala lui Euler de speţa a doua,* $B(x,a) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{a-1}\, dt$ *fiind integrala lui Euler de speţa întîia. (Seria este divergentă pentru* $p \leqslant 1$; *cazul* $p = 1$ *la exemplul* 22.)

Vom stabili întîi:

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} \sim x^{-a} \tag{12}$$

pentru $x \to \infty$ (a = constantă reală). Fie $a > 1$. Avem

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma(a)}{\Gamma(x+a)} = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{a-1}\,dt = \int_0^\infty e^{-ux}(1-e^{-u})^{a-1}\,du =$$

$$= \int_0^\infty e^{-ux}u^{a-1}\,du - \int_0^\infty [u^{a-1} - (1-e^{-u})^{a-1}]\,e^{-ux}\,du.$$

Prima integrală are valoarea $\Gamma(a)x^{-a}$. Apoi din inegalitățile cunoscute

$$1 - e^{-u} < u \ (u > 0), \quad 1 - e^{-u} > u - \frac{u^2}{2} \qquad (0 < u < 1),$$

urmează că a doua integrală este pozitivă și mai mică decît

$$\int_0^1 \left[1 - \left(1 - \frac{u}{2}\right)^{a-1}\right] u^{a-1}e^{-ux}\,du + \int_1^\infty u^{a-1}e^{-ux}\,du <$$

$$< K\int_0^1 u^a e^{-ux}\,du + \int_0^\infty u^a e^{-ux}\,du < K\int_0^\infty u^a e^{-ux}\,du = K\Gamma(a)\,x^{-a-1},$$

unde K este o constantă > 1. Deci

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+a)} = x^{-a}\left(1 - \frac{\varepsilon}{x}\right) \text{ cu } 0 < \varepsilon < K.$$

Formula (12) fiind astfel demonstrată pentru $a > 1$, se extinde la $0 < a \leqslant 1$, cu ajutorul formulei $\Gamma(x+a+1) = (x+a)\,\Gamma(x+a)$, și așa mai departe.

Avem acum dezvoltarea binominală:

$$(1-x)^{p-1} = \frac{1}{\Gamma(1-p)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n-p+1)}{\Gamma(n+1)}x^n \qquad (|x|<1)$$

(cum se vede aplicăm formula: $\Gamma(x+n) = x(x+1)\ldots(x+n-1)\Gamma(x)$). Aici, după (12).

$$\frac{\Gamma(n-p+1)}{\Gamma(n+1)} \sim (n+1)^{-p} \sim n^{-p},$$

de unde relația propusă.

Teorema precedentă se poate încă aplica considerîndu-se sumele parțiale în locul termenilor seriilor $\sum_0^\infty a_n$ și $\sum_0^\infty b_n$. Sumele parțiale fiind s_n și t_n, vom presupune: $s_n > 0$, $t_n > 0$, seriile $\sum_0^\infty s_n$, $\sum_0^\infty t_n$ divergente, și $s_n \sim \lambda t_n$ (λ const. $\neq 0, \infty$). Atunci

$$f(x) \sim \lambda g(x).$$

Într-adevăr putem scrie (cum se verifică imediat):

$$f(x) = (1-x)\sum_0^\infty s_n x^n, \quad g(x) = (1-x)\sum_0^\infty t_n x^n$$

și aplicînd teorema, avem $\sum_0^\infty s_n x^n \sim \lambda \sum_0^\infty t_n x^n$, deci $f(x) \sim \lambda g(x)$.

Exemplul 25. *Dacă* $s_n = \sum_0^n a_\nu \sim \lambda_n$, *atunci* $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \sim \frac{\lambda}{1-x}$ *pentru* $x \to \infty$.

Seria de comparație este aici $\frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty x^n$, pentru care $t_n = n$.

1) Invers, din comportarea asimptotică a funcției $f(x)$ se poate deduce uneori comportarea asimptotică a sumelor S_n.
Astfel rezultatul din exemplul 25 admite următoarea reciprocă:

Teorema 13. *(Hardy și Littlewood). Fie* $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$. *Dacă* $a_n \geqslant 0$ *și* $f(x) \sim \frac{1}{1-x}$ *cînd* $x \to 1$, *atunci* $S_n \sim n$ *pentru* $n \to \infty$[11].

Demonstrația lui Karamata: ne vom spirijini pe teorema următoare a lui Weierstrass: *Dacă* $\varphi(x)$ *este finită și continuă în intervalul* $[0, 1]$, *fiind dat* $\varepsilon > 0$, *există un polinom* $Q(x)$ *care aproximează funcția* $\varphi(x)$ *cu eroare* $\leqslant \varepsilon$:

$$|\varphi(x) - Q(x)| \leqslant \varepsilon \quad \text{în } [0, 1].$$

1°. Pentru funcțiile $\varphi(x) \pm \frac{\varepsilon}{2}$ există niște polinoame, $P(x)$ și $p(x)$, care le aproximează cu mai puțin de $\frac{\varepsilon}{2}$:

$$\left|\varphi(x) - p(x) - \frac{\varepsilon}{2}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left|\varphi(x) - P(x) + \frac{\varepsilon}{2}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Aceste polinoame satisfac deci condițiile:

$$p(x) \leqslant \varphi(x) \leqslant P(x), \tag{13}$$

$$\int_0^1 [\varphi(x) - p(x)]\,dx \leqslant \varepsilon, \quad \int_0^1 [P(x) - \varphi(x)]\,dx \leqslant \varepsilon. \tag{14}$$

Vom demonstra că se pot găsi polinoame ce verifică aceste condiții chiar și atunci cînd $\varphi(x)$ are o discontinuitate de specia I, $x = c$, în interiorul intervalului $[0, 1]$ (fiind continuă în restul intervalului). Fie de exemplu $\varphi(c-0) < \varphi(c+0)$. Considerăm, într-un interval $[c-\delta, c]$, funcția liniară $l(x)$, care ia la extremități valorile $\varphi(c-\delta) + \frac{\varepsilon}{2}$ și $\varphi(c+0) + \frac{\varepsilon}{2}$. Definim apoi funcția:

$$\psi(x) = \begin{cases} \varphi(x) + \dfrac{\varepsilon}{2} & \text{pentru } x < c-\delta \text{ sau } x > c, \\ \max\left\{l(x),\ \varphi(x) + \dfrac{\varepsilon}{4}\right\} & \text{pentru } c-\delta \leqslant x \leqslant c. \end{cases}$$

---

[11]) Autorul dă și următoarea generalizare: „*Dacă* $a_n \geqslant 0$ *și* $f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^\alpha}$, *unde* $\alpha \geqslant 1$, *cînd* $x \to 1$, *atunci* $S_n \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$". Pentru demonstrație, a se vedea anexa de la sfîrșitul cărții.

Evident, $\psi(x) > \varphi(x)$. Funcția $\psi(x)$ este continuă. [Se va observa că la extremitățile intervalului $[c-\delta, c]$ avem $\psi(x) = l(x)$]. Există un polinom $P(x)$ astfel că $\left|\psi(x) - P(x) + \frac{\varepsilon}{8}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{8}$. Atunci $\psi(x) \leqq P(x)$, deci $\varphi(x) < P(x)$. În plus $P(x) - \psi(x) \leqq \frac{\varepsilon}{4}$. Să luăm pe δ atît de mic, încît în intervalul $(c-\delta, c)$ să avem $|\varphi(x) - \varphi(c-0)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Atunci, în acest interval $\varphi(x) + \frac{\varepsilon}{4} < \varphi(c-0) + \frac{\varepsilon}{2}$ și prin urmare $\psi(x) \leqq \varphi(c+0) + \frac{\varepsilon}{2}$, dacă δ este suficient de mic pentru ca să avem $\varphi(c-\delta) < \varphi(c+0)$. Avem acum:

$$\int_0^1 [P(x) - \varphi(x)]\,dx = \int_0^1 [P(x) - \psi(x)]\,dx + \int_0^1 [\psi(x) - \varphi(x)]\,dx <$$

$$< \frac{\varepsilon}{4} + (1-\delta)\frac{\varepsilon}{2} + \delta\left[\varphi(c+0) - \varphi(c-0) + \frac{3\varepsilon}{4}\right] <$$

$$< \frac{3\varepsilon}{4} + \delta[\varphi(c+0) - \varphi(c-0) + 1] < \varepsilon$$

dacă luăm pe δ destul de mic. La fel se va alege $p(x)$.

2°. Vom demonstra acum:

$$\lim_{x\to 1}(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n P(x^n) = \int_0^1 P(x)\,dx$$

pentru un polinom $P(x)$ oarecare. Evident este deajuns să stabilim această relație pentru $P(x) = x^p$. Într-adevăr:

$$(1-x)\sum_0^\infty a_n x^{n+pn} = \frac{1-x}{1-x^{p+1}}\left[(1-x^{p+1})\sum_0^\infty a_n (x^{p+1})^n\right] \to$$

$$\to \frac{1}{p+1} = \int_0^1 x^p\,dx,$$

deoarece $(1-x)\sum_0^\infty a_\nu x^\nu \to 1$ prin ipoteză.

3°. Din 2° vom deduce că, mai general:

$$\lim_{x\to 1}(x-1)\sum_0^\infty a_n x^n \varphi(x^n) = \int_0^1 \varphi(x)\,dx$$

pentru orice funcție $\varphi(x)$ avînd cel mult o discontinuitate de specia I în interiorul intervalului $[0, 1]$ și continuă în restul intervalului. Într-adevăr, fie $p(x)$ și $P(y)$ polinoame ce împlinesc condițiile (13) și (14). Avem (deoarece $a_n \geqslant 0$):

$$\overline{\lim_{x\to I}}(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n \varphi(x) \leqslant \overline{\lim_{x\to 1}}(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n P(x^n) =$$

$$= \int_0^1 P(x)\,dx < \int_0^1 \varphi(x)\,dx + \varepsilon,$$

după (13) și (14) și făcînd $\varepsilon \to 0$:

$$\overline{\lim_{x\to 1}}\,(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n \varphi(x^n) \leqslant \int_0^1 \varphi(x)\,dx.$$

La fel se va arăta, considerînd polinomul $p(x)$, că

$$\underline{\lim_{x\to 1}}\,(1-x)\sum_0^\infty a_n x^n \varphi(x^n) \geqslant \int_0^1 \varphi(x)\,dx,$$

inegalitate care, împreună cu precedenta, demonstrează afirmația 3°.

4°. Considerăm acum funcția:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pentru} \quad 0 \leqslant x < \dfrac{1}{e}, \\ \dfrac{1}{x} & \text{pentru} \quad \dfrac{1}{e} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

avînd o singură discontinuitate de specia I în $x = \dfrac{1}{e}$. Pentru această funcție

$$\int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_{1/e}^1 \frac{dx}{x} = 1.$$

Să presupunem $\nu = \left[-\dfrac{1}{\log x}\right]$. Cînd $x \to 1$, $\nu \to \infty$, trecînd prin toate valorile întregi destul de mari. Avem:

$$\sum_0^\infty a_n x^n \varphi(x^n) = \sum_0^\nu a_n = S_\nu$$

(căci după definiția lui $\varphi(x)$, termenii seriei pot fi nenuli numai pentru $x^n \geqslant \dfrac{1}{e}$, adică $n \leqslant -\dfrac{1}{\log x}$ sau $n \leqslant \nu$). Or, după 3°,

$$S_\nu \sim \frac{1}{1-x} \sim -\frac{1}{\log x} \sim \nu \qquad \text{pentru } x \to 1$$

$\left(-\dfrac{\log x}{1-x} \to 1\right)$. Teorema este demonstrată.

m) Cu ajutorul teoremei 13 vom stabili acum extensiunea teoremei lui Tauber enunțată mai sus. Avem nevoie de următorul rezultat preliminar:

Lema 1. *Dacă funcția reală $f(x)$ are, în intervalul $[0, 1)$, derivate finite de primele două ordine, și dacă*

$$\lim_{x\to 1} f(x) = 0, \quad (1-x)^2 |f''(x)| < M \,(\text{fix}),$$

atunci

$$\lim_{x\to 1} (1-x) f'(x) = 0.$$

Vom aplica formula lui Taylor cu $x' - x = \delta(1-x)$ $\left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$:

$$f(x') = f(x) + \delta(1-x)f'(x) + \frac{1}{2}\delta^2(1-x)^2 f''(\xi)$$

unde $x < \xi < x'$. De aici

$$(1-x)f'(x) = \frac{f(x') - f(x)}{\delta} + \frac{1}{2}\delta\eta,$$

unde

$$|\eta| = |(1-x)^2 f''(\xi)| < M.$$

Fiind dat $\varepsilon > 0$, vom avea $|\delta\eta| < \varepsilon$ cu $\delta < \frac{\varepsilon}{M}$; apoi, δ fiind fixat astfel vom avea

$$\left|\frac{f(x') - f(x)}{\delta}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

pentru $x' - x = \delta(1-x) < \delta_0$ (corespunzător lui ε), adică $1 - x < \frac{\delta_0}{\delta} = \delta_1$. Aşadar $|(1-x)f'(x)| < \varepsilon$ pentru $1 - x < \delta_1$, ceea ce demonstrează lema.

Teorema 17. *(Littlewood). Dacă* $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n \to S$ *cînd* $x \to 1$ *şi dacă* $n|a_n| < M$ *fix, atunci* $\sum_0^\infty a_n$ *converge la suma* S.

Demonstraţia lui Titchmarsh. Putem presupune, fără a micşora generalitatea, $S = 0$. Avem pentru $|x| < 1$:

$$|f''(x)| = \left|\sum_2^\infty n(n-1)a_n x^{n-2}\right| < M\sum_2^\infty (n-1)x^{n-2} = \frac{M}{(1-x)^2}$$

(dezvoltare binominală). Deci aplicînd lema:

$$(1-x)\sum_1^\infty n a_n x^{n-1} \to 0 \quad \text{pentru} \quad x \to 1.$$

Urmează

$$\sum_1^\infty \left(1 - \frac{n a_n}{M}\right) x^{n-1} \sim \frac{1}{1-x}.$$

Această serie avînd coeficienţii > 0, putem să-i aplicăm teorema 13 şi obţinem:

$$\sum_1^n \left(1 - \frac{\nu a_\nu}{M}\right) \sim n$$

sau

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \left(1 - \frac{\nu a_\nu}{M}\right) \to 1,$$

de unde

$$\frac{1}{n}\sum_1^n \nu a_\nu \to 0,$$

sau, notînd $\sigma_n = \sum_1^n \nu a_\nu$, $\sigma_0 = 0$,

$$\frac{\sigma_n}{n} \to 0. \tag{15}$$

Vom scrie acum:

$$f(x) - a_0 = \sum_1^\infty \frac{\sigma_n - \sigma_{n-1}}{n} x^n \equiv \sum_1^\infty \sigma_n \left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1} \right)$$

$$= \sum_1^\infty \sigma_n \left(\frac{x^n - x^{n+1}}{n+1} + \frac{x^n}{n(n+1)} \right)$$

$$= (1-x) \sum_1^\infty \frac{\sigma_n}{n+1} x^n + \sum_1^\infty \frac{\sigma_n}{n(n+1)} x^n. \tag{16}$$

După (15), fiind dat $\varepsilon > 0$, există N astfel că

$$\frac{|\sigma_n|}{n+1} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pentru} \quad n > N$$

şi deci

$$\left| (1-x) \sum_1^\infty \frac{\sigma_n}{n+1} x^n \right| < \left| (1-x) \sum_1^N \frac{\sigma_n}{n+1} x^n \right| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Cum prima parte din membrul al doilea tinde la 0 pentru $x \to 1$, ea va fi $< \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $1 - x < \delta$ (corespunzător lui ε); astfel membrul I tinde la 0 şi cum $f(x) \to 0$, urmează din (16):

$$\sum_1^\infty \frac{\sigma_n}{n(n+1)} x^n \to -a_0.$$

Deoarece $n \cdot \frac{\sigma_n}{n(n+1)} \to 0$ după (15), putem aplica acestei serii teorema lui Tauber, care ne dă:

$$\sum_1^\infty \frac{\sigma_n}{n(n+1)} = -a_0.$$

Să observăm acum că

$$\sum_1^\infty \frac{\sigma_n}{n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n \sigma_\nu \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+1} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left[\sum_1^n \frac{\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}}{\nu} - \frac{\sigma_n}{n+1} \right] = \lim_{n\to\infty} \sum_1^n a_\nu$$

(ţinînd seamă de (15) şi $\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1} = \nu a_\nu$). Prin urmare

$$\lim_{n\to\infty} \sum_1^n a_\nu = -a_0.$$

Ceea ce era de demonstrat.

Teorema lui Littlewood poate fi stabilită și în cazul cînd $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ tinde la limită finită pentru $z \to 1$ pe un drum cuprins între două coarde de extremitate 1.

Exerciții

1. *Să se stabilească identitățile*

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4)\ldots(1+z^{2^{n-1}}) = \frac{z^{2^n}-1}{z-1}$$

$$\prod_0^\infty (1+z^{2^n}) = \frac{1}{1-z} \qquad |z|<1.$$

R. Se verifică pentru $n = 1$. Inducție:

$$(1+z)(1+z^2)\ldots(1+z^{2^n}) = \frac{z^{2^n}-1}{z-1}(1+z^{2^n}) = \frac{z^{2^{n+1}}-1}{z-1}.$$

2. $\cos\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2^2}\ldots\cos\frac{z}{2^n} = \frac{\sin z}{2^n \sin\frac{z}{2^n}},$

$$\prod_1^\infty \cos\frac{z}{2^n} = \frac{\sin z}{z},$$

$$\sum_1^\infty \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{z}{2^n} = \frac{1}{z} - \operatorname{ctg} z.$$

R. $\cos\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2^2}\ldots\cos\frac{z}{2^n} = \frac{1}{2^n}e^{-\frac{iz}{2}-\frac{iz}{2^2}-\ldots-\frac{iz}{2^n}}(1+e^{iz})(1+e^{\frac{iz}{2}})\ldots(1+e^{\frac{iz}{2^{n-1}}}) =$

$$= \frac{1}{2^n}e^{iz\left(\frac{1}{2^n}-1\right)}(1+\zeta)(1+\zeta^2)\ldots(1+\zeta^{2^{n-1}})$$

unde $\zeta = e^{\frac{iz}{2^{n-1}}}$. Aplicînd identitatea

$$\cos\frac{z}{2}\cos\frac{z}{2^2}\ldots\cos\frac{z}{2^n} = \frac{1}{2^n}\frac{e^{\frac{iz}{2^n}}}{e^{iz}}\frac{e^{2iz}-1}{e^{2\frac{iz}{2^n}}-1} = \frac{\sin z}{2^n\sin\frac{z}{2^n}}$$

și derivînd logaritmic

$$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{z}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{z}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{z}{2^n} - \operatorname{ctg} z.$$

Rămîne să trecem la limită, aplicînd $\lim_{z\to 0}\frac{\sin z}{z} = 1$ și $\lim_{z\to 0}\left(\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}\right) = 0$.

3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n z^{2^n}}{z^{2^n}+1} = \frac{z}{1-z} \quad |z|<1.$

R. Derivînd logaritmic identitatea 1) avem

$$\frac{1}{1+z}+\frac{2z}{1+z^2}+\cdots+\frac{2^{n-1}z^{2^{n-1}}}{1+z^{2^{n-1}}}=\frac{2^n z^{2^n-1}}{z^{2^n}-1}-\frac{1}{z-1}.$$

Se înmulțește cu z și se face $n\to\infty$.

4. $\sum_{0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{2^n}+1} = \frac{1}{z-1} \quad |z|<1.$

R. Rezultă din 3 înlocuind z cu $\frac{1}{z}$.

5. $\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n - z^{-n-1}}{(z^n+z^{-n})(z^{n+1}+z^{-n-1})} = \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}$

pentru $|z|<1$ *și* $|z|>1$.

R. Scriem termenul general:

$$\frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z^n+z^{-n}}-\frac{1}{z^{n+1}+z^{-n-1}}\right).$$

Termenii se reduc cîte doi rămînînd

$$\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{z+\frac{1}{z}}=\frac{z}{(z-1)(z^2+1)}.$$

6. *Domeniul de convergență al seriei* $\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{(1-z)^n}$.

R. $\left|\frac{z}{1-z}\right|<1$ sau $x^2+y^2<(1-x)^2+y^2$ sau $\mathrm{Re}\, z<\frac{1}{2}$. Suma seriei: $\frac{1-z}{1-2z}$.

7. *Idem, al seriei* $\sum_{0}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^{n-1}}{(1-z)^n}$.

R. $\left|\frac{2z}{1-z}\right|<1$ sau $4(x^2+y^2)<(1-x)^2+y^2$ sau $3(x^2+y^2)+2x-1<0$, domeniul interior cercului $3(x^2+y^2)+2x-1=0$. Suma seriei: $\frac{1}{1-3z}$.

8. *Idem al seriei* $1+\sum_{1}^{\infty}(-1)^n \frac{z(z-1)\ldots(z-n+1)}{n!}$.

R. Aplicăm criteriul lui Weierstrass:

$$\frac{w_{n+1}}{w_n}=\frac{n-z}{n+1}=\frac{n+1-(z+1)}{n+1}=1-\frac{z+1}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}=1-\frac{z+1}{n}+\frac{z+1}{n^2}(1+\varepsilon_n), \qquad \varepsilon_n\to 0.$$

Seria este convergentă numai pentru $\mathrm{Re}\,(z+1)>1$, adică $\mathrm{Re}\, z>0$.

Ea este chiar absolut convergentă.

9. $\log(1+z^2)\operatorname{arc\,tg} z = 2\sum_1^\infty (-1)^{n+1} S_{2n} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$, $|z|<1$, *unde* $S_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ *şi sînt luate valorile principale pentru log şi arc tg.*

R. Se înmulţesc dezvoltările (absolut convergente)

$$\log(1+z^2) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{z^{2n}}{n},$$

$$\operatorname{arc\,tg} z = \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1};$$

obţinem o dezvoltare de tipul indicat, cu

$$a_{2n+1} = \left(\frac{1}{1\cdot(2n-1)}+\frac{1}{2(2n-3)}+\frac{1}{3(2n-5)}+\cdots+\frac{1}{n}\right)(-1)^{n-1} =$$

$$= (-1)^{n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\frac{1}{\nu(2n-2\nu+1)} = (-1)^{n-1}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{2}{2\nu}+\frac{2}{2n-2\nu+1}\right)\frac{1}{2n+1} =$$

$$= \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+1}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right) = \frac{2(-1)^{n+1}}{2n+1}S_{2n}.$$

10) *Seria* $f(z) = \sum_1^\infty \frac{e^{-inz}}{n^2}$ *reprezintă o funcţie continuă în semiplanul* $\operatorname{Im} z \leqslant 0$ *şi olomorfă în semiplanul* $\operatorname{Im} z < 0$.

R. $\left|\frac{e^{-inz}}{n^2}\right| = \frac{e^{ny}}{n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$ dacă $y \leqslant 0$; în aceste condiţii seria este uniform convergentă. Se aplică teoreme cunoscute Se poate însă pune $e^{-iz} = w$.

10a) *Seria* $\sum_1^\infty \frac{e^{-inz}}{n^\lambda}$ (λ *real*) *are ca domeniu de convergenţă* $\operatorname{Im} z < 0$ *pentru orice valoare a lui* λ *şi este olomorfă în acest domeniu. (Este o serie Dirichlet.)*

R. $|w_n| = \frac{e^{ny}}{n^\lambda} = u_n$; $\sqrt[n]{u_n} = \frac{e^y}{(\sqrt[n]{n})^\lambda} \to e^y < 1$ pentru $y<0$. Deci seria este absolut şi uniform convergentă pentru $\operatorname{Im} z < 0$. Pentru $y>0$ seria este divergentă pentru că termenul general tinde la ∞. Pentru $y=0$, seria este absolut convergentă cînd $\lambda > 1$ şi divergentă cînd $\lambda \leq 0$ (termenul general neavînd limita 0). De asemenea seria este convergentă cînd $\lambda > 0$ ($y=0$) şi se exceptează pentru x intervalele $(2k\pi-\delta,\ 2k\pi+\delta)$ şi $\left[(2k+1)\frac{\pi}{2}-\delta,\ (2k+1)\frac{\pi}{2}+\delta\right]$ (cu $\delta>0$), cum se vede aplicînd criteriul lui Dirichlet seriilor $\sum \frac{1}{n^\lambda}\sin nx$, $\sum \frac{1}{n^\lambda}\cos nx$. $\left(\frac{1}{n^\lambda}\to 0$ monoton şi $\sum \sin nx$, $\sum \cos nx$ au sumele parţiale mărginite$\right)$. (Se poate pune $e^{-iz} = w$, conducînd la o serie de puteri.)

11) Să se arate că $\varphi(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{1+z^{2n}}$ este convergentă în $|z|<1$ şi $|z|>1$.

R. $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |z|\left|\frac{1+z^{2n}}{1+z^{2n+2}}\right| \to |z|$ pentru $|z|<1$.

Înlocuind z cu $\frac{1}{z}$ seria nu se schimbă și deci este convergentă și pentru $|z| > 1$.

Pentru $|z| = 1$, $z = \cos\theta + i \sin\theta$, termenul general este

$$a_n = \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{1 + \cos 2n\theta + i \sin 2n\theta} = \frac{\cos n\theta + i \sin n\theta}{2\cos^2 n\theta + 2i \sin n\theta \cos n\theta} = \frac{1}{2\cos n\theta}.$$

Dacă θ este de forma $\frac{2k+1}{h}\frac{\pi}{2}$ (h prim cu $2k+1$), seria nu este definită. În cazul contrar a_n nu tinde la 0, deci seria nu este convergentă. În orice caz $\varphi(z)$ nu este definită pe cercul $|z| = 1$.

Seria este uniform convergentă în orice cerc $|z| < R < 1$ sau $|z| > R > 1$. În primul caz

$$|a_n| < \frac{R^n}{1 - R^{2n}}$$

termenul general al unei serii convergente.

12) *Să se examineze convergența seriei*

$$\varphi(z) = \sum_1^\infty \frac{z^{2^n-1}}{1 - z^{2^n}}, \quad |z| \neq 1.$$

R. $S_1 = \frac{z}{1 - z^2}$,

$$S_2 = \frac{z}{1 - z^2} + \frac{z^2}{1 - z^4} = z\frac{1 + z - z^3 - z^4}{(1 - z^2)(1 - z^4)} = \frac{z}{1 - z}\frac{1 - z^3}{1 - z^4},$$

$$S_n = \frac{z}{1 - z}\frac{1 - z^{2^n-1}}{1 - z^{2^n}}.$$

Deoarece

$$S_{n+1} = \frac{z}{1 - z}\frac{1 - z^{2^n-1}}{1 - z^{2^n}} + \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1 - z}\frac{(1 - z^{2^n-1})(1 + z^{2^n}) + (1 - z)z^{2^n-1}}{(1 - z^{2^{n+1}})} =$$

$$= \frac{z}{1 - z}\frac{1 - z^{2^{n+1}-1}}{1 - z^{2^{n+1}}}$$

este obținut din S_n prin înlocuirea lui n prin $n + 1$, rezultă prin inducție că formula ce dă pe S_n este adevărată pentru orice n natural. Urmează

$$\varphi(z) = \begin{cases} \frac{z}{1 - z} & |z| < 1, \\ \frac{1}{1 - z} & |z| > 1. \end{cases}$$

Cînd $|z| \to 1$, cele două funcții tind la limite diferite, deci $\varphi(z)$ nu are limită (excepție $z \to 1$, cînd limita este ∞ pentru ambele). Cercul $|z| = 1$ este format din puncte singulare.

13) *Să se găsească domeniul de convergență al seriei* $\sum_0^\infty \left(\frac{z}{z+1}\right)^n$. *Să se sumeze.*

R. Este o serie geometrică în $\zeta = \frac{z}{z+1}$, convergentă în $\left|\frac{z}{z+1}\right| < 1$ sau $x^2 + y^2 < (x+1)^2 + y^2$, așadar în semiplanul $\mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{2}$. Suma ei este $\frac{1}{1-\zeta}$, adică avem

$$\sum_0^\infty \left(\frac{z}{z+1}\right)^n = z + 1 \qquad \mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{2}.$$

14. Idem seria $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n\,2^{n/2}}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n$.

R. Punînd $\zeta = \frac{z+1}{\sqrt{2}(z-1)}$ seria devine $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\zeta^n}{n} = \log(1+\zeta)$ convergentă în $|\zeta| \leqslant 1$ cu excepția lui $\zeta = -1$. Deci seria dată converge pentru $(x^2+1)^2 + y^2 \leqslant 2[(x-1)^2 + y^2]$, sau $x^2 + y^2 - 6x + 1 \geqslant 0$, sau $|z| - 3 \geqslant \sqrt{8}$, adică în exteriorul cercului de centru $z = 3$ și rază $\sqrt{3}$, și pe acest cerc, cu excepția punctului $z = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = 3 - 2\sqrt{2}$ (care este cel mai apropiat de 0).

Avem

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n\,2^{n/2}}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = \log\left(1 + \frac{z+1}{\sqrt{2}(z-1)}\right)$$

cu determinarea care se anulează în $z = -1$.

15. *Să se stabilească formula*

$$\sum_1^\infty \frac{nz^{n-1}}{(z+1)^{n+1}} = 1 \qquad \mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{2}.$$

R. Rezultă prin derivare din exercițiul 13, observînd că seria construită acolo este uniform convergentă pentru $|\zeta| < R < 1$ și deci orice punct z al semiplanului $\mathrm{Re}\, z > -\frac{1}{2}$ poate fi înglobat într-un domeniu (cerc) unde seria este uniform convergentă și deci derivabilă termen cu termen.

16. *Domeniul de convergență și suma seriei* $\sum_0^\infty z(1-z^2)^n$. *Seria nu converge uniform în vecinătatea lui* $z = 0$.

R. Serie geometrică în $\zeta = 1 - z^2$, multiplicată cu z. Este convergentă pentru $|\zeta| < 1$, sau $(1 - r^2\cos 2\theta)^2 + r^4 \sin^2 2\theta < 1$, adică $r^2 < 2\cos 2\theta$: este interiorul lemniscatei $r^2 = 2\cos 2\theta$ (vezi fig. 93). Seria converge de asemenea în $z = 0$. Suma ei este:

$$f(z) = \sum_0^\infty z(1-z^2)^n = \begin{cases} 0 & z = 0, \\ \frac{1}{z} & \text{în interiorul lemniscatei.} \end{cases}$$

Într-un cerc $|z| < R$ seria nu poate converge uniform fiindcă $f(z)$ nu tinde către $f(0)$. De altfel restul seriei este

$$\rho_n = \begin{cases} 0 & (z=0), \\ \frac{(1-z^2)^n}{z} & (z \neq 0) \end{cases}$$

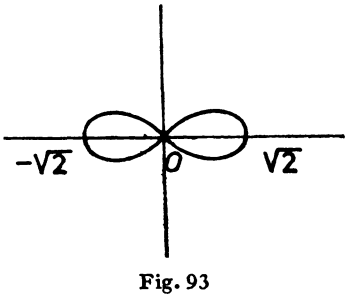

Fig. 93

și, pentru orice n destul de mare, există puncte în $|z| < R$ unde $|\rho_n| > \varepsilon$ (dat): $|\rho_n| = \frac{|1-z^2|^n}{|z|} > \frac{(1-R^2)^n}{|z|} > \varepsilon$ și $|z| < R$ se pot satisface cu $|z| < \frac{(1-R^2)^n}{\varepsilon}$, dacă luăm n destul de mare pentru ca $(1-R^2)^n < \varepsilon R$, anume $n > \frac{\log \varepsilon R}{\log(1-R^2)}$.

17. *Seria* $f(z) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n(1+z^n)}$ *este uniform și absolut convergentă în orice cerc* $|z| < R < 1$. *Să se afle domeniul de convergență.*

R. Termenul general are modulul, pentru $|z| < R$, $|w_n| < \frac{R^n}{n(1-R^n)} < \frac{R^n}{n(1-R)}$; acesta este termen general al unei serii convergente (criteriul lui D'Alembert).

Pentru $|z| = r > 1$ scriem $w_n = f_n g_n$ cu $f_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ și $g_n = \frac{z^n}{1+z^n} \cdot \sum^\infty f_n$ este convergentă, iar $\sum (g_{n+1} - g_n)$ absolut convergentă, căci avem

$$|g_n - g_{n+1}| = |z-1| \left| \frac{z_n}{(1+z^n)(1+z^{n+1})} \right| < |z-1| \frac{r^n}{(r^n-1)(r^{n+1}-1)} <$$

$$< \frac{r+1}{r-1} \left(\frac{1}{r^n - 1} - \frac{1}{r^{n+1}-1} \right),$$

deci $\sum_1^\infty |g_n - g_{n+1}|$ are termenul general mai mic decît acela al seriei convergente $\frac{r+1}{r-1} \sum_1^\infty \left(\frac{1}{r^n-1} - \frac{1}{r^{n+1}-1} \right)$. Așadar, seria dată este convergentă și în exteriorul cercului $|z| = 1$ (criteriul lui Du Bois Raymond, § 24, teorema 3).

Pe cercul $|z| = 1$ seria nu este definită în toate punctele $\sqrt[n]{-1}$, care formează o mulțime densă $\left(z = e^{\frac{2k+1}{n}\pi i} \right)$. Într-un punct $z = e^{i\theta}$ diferit de acestea $\left(\theta \neq \frac{2k+1}{n}\pi \right)$, avem

$$w_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{e^{\frac{in\theta}{2}}}{e^{\frac{in\theta}{2}} + e^{-\frac{in\theta}{2}}} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \frac{\cos\frac{n\theta}{2} + i \sin\frac{n\theta}{2}}{\cos\frac{n\theta}{2}} =$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{2n} + i \frac{(-1)^{n-1}}{2n} \operatorname{tg} \frac{n\theta}{2} = u_n + iv_n.$$

Partea reală $\sum u_n$ este convergentă. Cea imaginară, $\sum v_n$, este convergentă pentru θ comensurabil cu π, cînd seria este definită, adică $\theta = \frac{2k}{h}\pi$ ($2k$ prim cu h); $\operatorname{tg} \frac{n\theta}{2}$ luînd atunci un număr finit de valori finite, $\sum (-1)^n \operatorname{tg} \frac{n\theta}{2}$ oscilează între limite finite, iar $\frac{1}{n} \to 0$ monoton (criteriul lui Dirichlet, § 24, teorema 6) (sau pentru că seria se descompune într-un număr finit de serii alternate convergente). Chiar și în punctele $\theta = \frac{2k+1}{h}\pi$ ($2k+1$ prim cu h) unde seria nu este definită, seria obținută, dacă lăsăm la o parte termenii infiniți, este convergentă.

Rămîne de studiat componența seriei $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \operatorname{tg} \frac{n\theta}{2}$ pentru θ incomensurabil cu π.

Observația 1. *Seria dată nu este absolut convergentă în exteriorul cercului considerat.*
Într-adevăr, avem pentru $|z| = r > 1$:

$$|w_n| > \frac{r^n}{n(r^n+1)}$$

care este termenul general al unei serii divergente, cum se vede comparînd-o cu $\sum \frac{1}{n}$:

$$\frac{r^{n+1}}{(n+1)(r^{n+1}+1)} : \frac{r^n}{n(r^n+1)} = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{r^{n+1}+r}{r^{n+1}+1} > \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} : \frac{1}{n}.$$

Observația 2. Înlocuind pe z cu $\frac{1}{z}$ obținem seria

$$f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n(1+z^n)},$$

care este uniform și absolut convergentă în $|z| > R > 1$ și convergentă în $|z| < 1$. Avem imediat

$$f(z) + f\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = \log 2.$$

De aici rezultă că seria $f(z)$ este uniform convergentă în $|z| > R > 1$.

18. *Domeniul de convergență și suma seriei*

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n+1)} \qquad (z \neq \text{întregii} < 0).$$

R. Avem

$$w_n = \frac{1}{z+1}\left[\frac{(n-1)!}{(z+1)\ldots(z+n)} - \frac{n!}{(z+1)\ldots(z+n+1)}\right]$$

deci

$$S_n = \frac{1}{(z+1)^2} - \frac{1}{z+1} \cdot \frac{n!}{(z+1)\ldots(z+n+1)}.$$

Or $\frac{n!}{(z+1)\ldots(z+n)} \sim e^{-z\log n}$ (§ 31, Exemplu 7), deci avem

$$\frac{n!}{(z+1)\ldots(z+n+1)} \sim \frac{e^{-z\log n}}{z+n+1} \to 0 \text{ dacă } x = \mathrm{Re}\, z > -1$$

(deoarece $|e^{-z\log n}| = n^{-x}$); din contra, această cantitate $\to \infty$ dacă $\mathrm{Re}\, z < -1$. Așadar domeniul de convergență este $\mathrm{Re}\, z > -1$ și avem

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(z+1)(z+2)\ldots(z+n+1)} = \frac{1}{(z+1)^2}, \qquad \mathrm{Re}\, z > -1.$$

Observație. Pentru $z = x + iy$ avem $|w_n| \leqslant \frac{(n-1)!}{(x+1)\ldots(x+n+1)}$ și dacă $x \geqslant x_0 > -1$, urmează $|w_n| \leqslant \frac{(n-1)!}{(x_0+1)\ldots(x_0+n+1)}$, deci

$$|f(z)| < f(x_0) \text{ pentru } \mathrm{Re}\, z > x_0 > -1.$$

Totodată se vede că seria dată este uniform convergentă în orice semiplan conținut în semiplanul de convergență.

19. *Domeniul de convergență și suma seriei* $\sum_{0}^{\infty} \frac{2^n}{z^{2^n}+1}$.

R. Să observăm identitatea

$$z^{2^{n+1}} - 1 = (z-1)(z+1)(z^2+1)\ldots(z^{2^n}+1)$$

care se stabileşte uşor prin inducţie. Avem

$$S_0 = \frac{1}{z+1} = \frac{z-1}{z^2-1},$$

$$S_1 = S_0 + \frac{2}{z^2+1} = \frac{z-1}{z^4-1}(z^2+2z+3),$$

$$S_2 = S_1 + \frac{4}{z^4+1} = \frac{z-1}{z^8-1} = (z^6+2z^5+3z^4+4z^3+5z^2+6z+7).$$

Sîntem conduşi la formula generală

$$S_n = \frac{z-1}{z^{2^{n+1}}-1}\left[z^{2^{n+1}-2} + 2z^{2^{n+1}-3} + \ldots + (2^{n+1}-1)\right] =$$

$$= \frac{z-1}{z^{2^{n+1}}-1}\left(\frac{z^{2^{n+1}-1}-1}{z-1} + \frac{z^{2^{n+1}-2}-1}{z-1} + \cdots + \frac{z^2-1}{z-1} + \frac{z-1}{z-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{z^{2^{n+1}}-1}\left[\frac{z^{2^{n+1}}-z}{z-1} - (2^{n+1}-1)\right] = \frac{1}{z-1} - \frac{2^{n+1}}{z^{2^{n+1}}-1}.$$

Verificarea acestei formule prin inducţie:

$$S_{n+1} = S_n + \frac{2^{n+1}}{z^{2^{n+1}}+1} = \frac{1}{z-1} - 2^{n+1}\left(\frac{1}{z^{2^{n+1}}-1} - \frac{1}{z^{2^{n+1}}+1}\right) = \frac{1}{z-1} - \frac{2^{n+2}}{z^{2^{n+2}}-1}.$$

Avem acum

$$S_n \to \begin{cases} \infty & \text{pentru } |z| < 1, \\ \dfrac{1}{z-1} & \text{pentru } |z| > 1. \end{cases}$$

Pentru $z = e^{i\theta}$ cu $\theta \neq \dfrac{2k+1}{2^n}\pi$ (unde seria nu este definită)

$$w_n = \frac{2^n}{1+\cos 2^n\theta + i \sin 2^n\theta} = \frac{2^{n-1}}{\cos 2^{n-1}\theta\,(\cos 2^{n-1}\theta + i \sin 2^{n-1}\theta)} =$$

$$= 2^{n-1}(1 - i \operatorname{tg} 2^{n-1}\theta);$$

de unde se vede că seria nu converge pe $|z| = 1$. Deci domeniul de convergenţă este $|z|>1$ şi suma seriei $\dfrac{1}{z-1}$.

20. *Domeniul de convergenţă şi suma seriei*

$$\sum_1^\infty \frac{z^n - z^{-n-1}}{(z^n + z^{-n})(z^{n+1} + z^{-n-1})}.$$

R. Scriem

$$w_n = \frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z^n + z^{-n}} - \frac{1}{z^{n+1} + z^{-n-1}}\right) \quad (z \neq 1),$$

deci pentru $|z| \neq 1$

$$S_n = \frac{1}{z-1}\left(\frac{1}{z+z^{-1}} - \frac{1}{z^{n+1} + z^{-n-1}}\right) \to \frac{z}{(z-1)(z^2+1)}.$$

Pentru $z = e^{i\theta}$, $\dfrac{1}{z^{n+1} + z^{-n-1}} = \dfrac{1}{2\cos(n+1)\theta}$ nu are limită sau este infinit. Aşadar domeniul de convergenţă se compune din domeniile $|z| < 1$ şi $|z| > 1$, iar suma seriei este dată de aceeaşi expresie analitică: $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z^2+1)}$.

21. *Dacă n este întreg > 0 şi $|z| < 1$, avem*

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu(n+\nu)} = \frac{1}{nz^n}\left[(1-z^n)\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \ldots + \frac{z^n}{n}\right].$$

Să se deducă

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu(n+\nu)} = \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

R. Se scrie

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu(n+\nu)} = \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{n+\nu}\right)z^\nu = -\frac{1}{n}\log(1-z) - \frac{1}{nz^n}\sum_{\nu'=n+1}^{\infty}\frac{z^{\nu'}}{\nu'} =$$

$$= -\frac{1}{n}\log(1-z) + \frac{1}{nz^n}\left[\log(1-z) + z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^n}{n}\right].$$

A doua formulă se obţine pentru $z \to 1$ pe axa reală avînd în vedere că seria dată este convergentă pentru $z = 1$ şi că $(1-z^n)\log(1-z) \to 0$ (se aplică teorema lui Abel).

22. *Se consideră seria $\varphi_p(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{e^{nz^2}}{n^p}$ (p real). Să se găsească domeniul de convergenţă. Să se studieze convergenţa pe frontiera domeniului şi să se demonstreze că $\varphi_p'(z) = 2z\,\varphi_{p-1}(z)$.*

R. Punînd $w = e^{z^2}$ avem $\sum \dfrac{e^{nz^2}}{n^p} = \sum \dfrac{w^n}{n^p}$. Cum $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n^p}} \to 1$, această serie are cercul de convergenţă $|w| < 1$. Deci seria dată converge în unghiurile $x^2 - y^2 < 0$. După criteriul lui Dirichlet, pentru $p > 0$, seria în w converge pe cercul $|w| = 1$ în punctele unde $\theta = \arg w \neq 2k\pi$, căci $\dfrac{1}{n^p} \to 0$ monoton şi sumele parţiale ale seriei $\sum e^{in\theta}$ sînt mărginite. Pentru $\varphi = 2k\pi$, $w = 1$ seria devine $\sum \dfrac{1}{n^p}$ şi este convergentă numai cînd $p > 1$. Pentru $p \leqslant 0$ seria în w nu este convergentă pentru că termenul general nu tinde la zero. Urmează că seria dată converge pe toată frontiera domeniului de convergenţă cînd $p > 1$; numai în punctele diferite de cele de forma $z = \sqrt{k\pi}\,(1+i)$ cînd $0 < p \leqslant 1$ şi nicăieri cînd $p \leqslant 0$. Seria dată este uniform convergentă în orice domeniu închis din unghiurile unde converge. Deci poate fi derivată şi obţinem relaţia indicată.

23. *Dacă $\sum |w_n|^2$ converge şi $w_n \neq -1$, produsele $p_n = \prod_{\nu=0}^{n} (1+w_\nu) \sim e^{S_n}$, unde $S_n = \sum_{\nu=0}^{n} w_\nu$.*

R. Într-adevăr, $\log(1+w_\nu) = w_\nu - \gamma_\nu w_\nu^2$, unde $\gamma_\nu \to \dfrac{1}{2}$ (vezi (77), cap. I), $\log p_n = S_n - \sigma_n$, unde $\sigma_n = \sum_{0}^{n} \gamma_\nu w_\nu^2$, iar $\sigma = \lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu w_\nu^2$, converge, aşa că

$$\frac{p_n}{e^{S_n}} = e^{-\sigma_n} \to e^{\sigma} \neq 0, \quad \infty.$$

În particular, dacă $w_\nu = \frac{z}{\nu}$ atunci

$$p_n(z) = \prod_{\nu=1}^{n-1}\left(1+\frac{z}{\nu}\right) \qquad p_n(1) = n,$$

$$p_n(z) \sim e^{z\left(1+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)} \sim e^{z\log(n-1)}$$

$$p_n(1) = n \sim e^{1+\ldots+\frac{1}{n-1}},$$

de unde

$$1+\ldots+\frac{1}{n-1} \sim \log n.$$

§ 80. Calculul cu serii de puteri

Anumite operaţii cu funcţii dezvoltabile în serii de puteri convergente în acelaşi cerc se pot face asupra acestor serii.
Astfel:

a) *Adunarea.* Dacă $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n$ şi $g(z) = \sum_0^\infty b_n(z-z_0)^n$, pentru $|z-z_0| < R$, atunci

$$f(z) + g(z) = \sum_0^\infty (a_n + b_n)(z-z_0)^n, \quad |z-z_0| < R.$$

b) *Înmulţirea.* Cu aceleaşi notaţii avem

$$f(z)\,g(z) = \sum c_n(z-z_0)^n \qquad |z-z_0| < R$$

cu

$$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0 = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu b_{n-\nu}.$$

S-a putut utiliza produsul lui Cauchy al celor două serii, deoarece ele sînt absolut convergente. (Demonstraţia din analiză relativă la produsul lui Cauchy se aplică imediat şi în complex.)

Înainte de a considera împărţirea seriilor vom stabili următoarea lemă:

c) *Lema lui Weierstrass. Dacă seriile*

$$f_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} a_{np}(z-z_0)^p \qquad (n = 0, 1, \ldots)$$

sînt convergente în cercul $|z-z_0| < R$, *iar seria*

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f_n(z)$$

converge uniform în interiorul aceluiaşi cerc, atunci avem

$$F(z) = \sum_{p=0}^{\infty} b_p (z - z_0)^p \qquad |z - z_0| < R, \tag{18}$$

unde

$$b_p = \sum_{n=0}^{\infty} a_{np} \lambda_n$$

sînt serii convergente.

După teorema lui Weierstrass (§ 78, teorema 2) $F(z)$ este olomorfă în cercul $|z - z_0| < R$ şi deci are o dezvoltare tayloriană (18) valabilă în acest cerc (cel puţin). Lema precedentă afirmă că această dezvoltare se obţine substituind seriile $f_n(z)$ în seria lui $F(z)$ şi ordonînd rezultatele după puterile lui $(z - z_0)$. Într-adevăr, avem

$$b_p = \frac{1}{p!} \left(\frac{\mathrm{d}^p F}{\mathrm{d}z^p} \right)_{z = z_0}$$

şi pe de altă parte (tot după teorema lui Weierstrass)

$$\frac{\mathrm{d}^p F}{\mathrm{d}z^p} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n f_n^{(p)} \qquad (|z - z_0| < R),$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^p F}{\mathrm{d}z^p} \right)_{z = z_0} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p!\, a_{np};$$

deci

$$b_p = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n a_{np}.$$

Observaţie. Condiţia de convergenţă uniformă a seriei lui $F(z)$ va fi satisfăcută dacă, în cercul $|z - z_0| < R$, avem $|f_n| \leqslant p_n$ (constante) şi seria $\sum_0^{\infty} |\lambda_n| p_n$ este convergentă. (Criteriul lui Weierstrass.) Un caz important este următorul:

d) *Substituţia seriilor de puteri în serii de puteri.* Fie

$$F(w) = \sum_0^{\infty} \lambda_n (w - w_0)^n \text{ în cercul } |w - w_0| < \rho$$

şi

$$w - w_0 = \sum_1^{\infty} a_p (z - z_0)^p \qquad \text{în cercul } |z - z_0| < R,$$

unde

$$|w - w_0| \leqslant \rho_1 < \rho.$$

Atunci $F(w(z))$ se obţine substituind seria a doua în cea dintîi şi ordonînd rezultatul după puterile lui $(z - z_0)$: seria astfel obţinută este convergentă şi reprezintă funcţia în cercul $|z - z_0| < R$.

Într-adevăr putem scrie $F(w(z)) = \sum \lambda_n f_n(z)$, unde

$$\left.\begin{aligned} f_0(z) &= 1 \\ f_1(z) &= w - w_0 = \sum_1^\infty a_p (z - z_0)^p \\ f_2(z) &= (w - w_0)^2 = \sum_2^\infty a_{2p}(z - z_0)^p \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_n(z) &= (w - w_0)^n = \sum_n^\infty a_{np}(z - z_0)^p \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}\right\} |z - z_0| < R$$

(făcînd produse Cauchy). Lema precedentă este aplicabilă pentru că $|f_n(z)| = |w - w_0|^n \leqslant \rho_1^n$ și seria $\sum |\lambda_n| \rho_1^n$ este convergentă seria lui $F(w)$ fiind absolut convergentă în cercul de rază $\rho > \rho_1$.

Astfel vom avea

$$F(w(z)) = \sum_0^\infty b_p (z - z_0)^p,$$

unde

$$b_p = \sum_{n=p}^\infty \lambda_n a_{np} \quad (p > 0), \qquad b_0 = \lambda_0, a_{1p} = a_p.$$

Observație. Condiția $|w - w_0| \leqslant \rho_1 < \rho$ poate fi satisfăcută în orice caz luînd pe R destul de mic, căci $w - w_0 \to 0$ cînd $z - z_0 \to 0$. Prin urmare operația făcută este totdeauna legitimă într-o vecinătate destul de mică a punctului z_0. Determinarea exactă a acestei vecinătăți nu este ușoară.

e) *Împărțirea seriilor de puteri* se poate reduce la cazul $\frac{1}{f(z)}$, unde $f(z) = 1 - \sum_1^\infty a_n (z - z_0)^n$ în cercul $|z - z_0| < R$ și în acest cerc $|1 - f(z)| \leqslant \rho < 1$. Punînd $w = 1 - f(z) = \sum_1^\infty a_n (z - z_0)^n$, avem de substituit această serie în

$$\frac{1}{1 - w} = \sum_0^\infty w^n \qquad |w| < 1.$$

De altfel dezvoltarea astfel obținută fiind dezvoltarea tayloriană a funcției $\frac{1}{f(z)}$, va fi valabilă în cercul de centru z_0 care trece prin punctul singular cel mai apropiat al acestei funcții.

În cazul $f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n$ cu $a_0 \neq 0$, se va scrie

$$f(z) = a_0 \left[1 - \sum_1^\infty \left(- \frac{a_n}{a_0} \right) (z - z_0)^n \right].$$

f) Practic, cînd este vorba de a găsi primii coeficienţi ai dezvoltării, se poate întrebuinţa *metoda coeficienţilor nedeterminaţi*. Astfel, fie $\varphi(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$, unde

$$f(z) = 1 + \sum_1^\infty a_n z^n, \quad g(z) = \sum_1^\infty b_n z^n.$$

Funcţia $\varphi(z)$ fiind olomorfă în $z = 0$, are o dezvoltare de forma $\varphi(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ ai cărei coeficienţi sînt de calculat. Scriem $\varphi(z) f(z) = g(z)$ sau

$$\sum_0^\infty b_n z^n \equiv \left(1 + \sum_1^\infty a_n z^n\right)\left(\sum_0^\infty c_n z^n\right) \equiv$$

$$\equiv c_0 + (c_1 + a_1 c_0)z + (c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0)z^2 + \ldots$$

Egalînd coeficienţii în cei doi membri, căpătăm un şir de ecuaţii liniare în $c_0, c_1, c_2, \ldots$, care vor determina pe rînd aceşti coeficienţi:

$$c_0 = b_0, \; c_1 + a_1 c_0 = b_1, \; c_2 + a_1 c_1 + a_2 c_0 = b_2, \ldots,$$

de unde

$$c_0 = b_0, \; c_1 = b_1 - a_1 b_0, \; c_2 = b_2 - a_1 b_1 - a_2 b_0 + a_1^2 b_0, \ldots .$$

Ecuaţia generală a sistemului precedent,

$$c_n + a_1 c_{n-1} + \ldots + a_n c_0 = b_n$$

este o formulă de *recurenţă* (pentru coeficienţii c_n).

Aceeaşi metodă se poate aplica în toate cazurile asemănătoare, cînd ştim dinainte că dezvoltarea căutată există.

§ 81. Dezvoltarea în serie tayloriană a unei funcţii olomorfe

Teorema 1. *Dacă $f(z)$ este olomorfă în $z_0 \neq \infty$, avem într-un disc $\bar{\Gamma}$ de centru z_0, dezvoltarea tayloriană.*

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)\,(z - z_0)^n. \tag{19}$$

Ipoteza înseamnă că $f(z)$ este olomorfă într-un disc Γ de centru z_0. Avem deci în Γ

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)}{t - z}\,dt.$$

Scriem

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{(t - z_0)\left(1 - \dfrac{z - z_0}{t - z_0}\right)} = \frac{1}{t - z_0}\sum_0^\infty \left(\frac{z - z_0}{t - z_0}\right)^n.$$

Seria este uniform convergentă pe Γ, modulul termenului general fiind $\frac{1}{R}\cdot\left|\frac{z-z_0}{R^*}\right|^n$. Înmulțind-o cu $f(t)$ obținem de asemenea o serie uniform convergentă pe Γ și putem scrie (§ 78, teorema 1)

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_0^\infty\int_\Gamma\frac{(z-z_0)^n}{(t-z_0)^{n+1}}f(t)\,dt$$

și (19) rezultă din teorema 3, § 76.

Teorema 2. *Dacă $f(z)$ este olomorfă în ∞, avem în exteriorul unui cerc Γ,*

$$f(z)=\sum_0^\infty b_n z^{-n} \tag{20}$$

Căci ipoteza înseamnă că $f\left(\frac{1}{z'}\right)=\varphi(z')$ este olomorfă în $z'=0$, deci

$$\varphi(z')=\sum_0^\infty b_n z'^n \text{ într-un disc } \Gamma'.$$

Observația 1. Este remarcabil că o funcție olomorfă într-un punct z_0 este analitică în acel punct (dezvoltabilă în serie de puteri cu exponenți pozitivi, dacă $z_0\neq\infty$; negativi, dacă $z_0=\infty$, în jurul punctului); și după cum am văzut (§ 79, teorema 2), invers, o funcție analitică într-un punct este olomorfă acolo. Astfel orice funcție olomorfă în z este funcție analitică în z_0 și reciproc

Simpla existență a unei derivate finite atrage această consecință. Ceea ce nu are loc în domeniul real: o funcție poate avea chiar derivate finite de orice ordin, fără a fi analitică.

Exemplul 1.

$$f(x)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases},\quad f'(x)=\begin{cases}+\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}\quad\text{etc.},$$

nu este analitică în 0 pentru că toate derivatele ei sînt nule în O (seria lui Taylor are raza de convergență ∞, dar nu reprezintă funcția nicăieri, fiind $=0$) (vezi observația 2).

Observația 2. De altfel orice dezvoltare în serie de puteri (cu exponenți pozitivi) este o dezvoltare tayloriană. Dacă

$$f(z)=\sum_0^\infty a_n(z-z_0)^n,$$

am văzut (§ 79, teorema 2) că

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(z_0).$$

De unde urmează că dezvoltarea în serie de puteri este unică (într-un punct dat).

Observația 3. Fiind dat un domeniu D de olomorfie a funcției $f(z)$, cel mai mare cerc Γ_0 în care este valabilă dezvoltarea (19) are raza egală cu

$$R_0=\text{distanța }(z_0,\ \text{fr } D).$$

Demonstrația teoremei este valabilă în orice cerc Γ de rază $R < R_0$, deci în Γ_0. Cercul Γ_0 atinge fr D în cel puțin un punct.

Nu se poate însă afirma că R_0 este raza de convergență a seriei (19); ea poate fi mai mare.

Trebuie însă amintit că raza de convergență este determinată numai de coeficienții seriei, adică de valorile derivatelor $f^{(n)}(z_0)$ în z_0.

Teorema 3. (Principiul de identitate pentru funcțiile olomorfe dintr-un domeniu). *O funcție $f(z)$ olomorfă într-un domeniu D, este unic determinată în acest domeniu de valorile ei într-o mulțime numărabilă (șir) de puncte care converg către un punct din D.*

Este de arătat că două funcții $f(z)$ și $g(z)$, olomorfe în D, coincid dacă avem

$$f(z_k) = g(z_k) \quad (k = 1, 2, \dots), \tag{21}$$

și z_k converge la un punct $z_0 \in D$. Presupunem întîi numai că f și g sînt analitice în jurul lui z_0:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n, \qquad g(z) = \sum_0^\infty b_n(z - z_0)^n$$

și arătăm că $f(z) = g(z)$ în cercul de convergență (care va fi eventual același). Într-adevăr, avem din (21) pentru $z_k \to z_0$, grație continuității, $f(z_0) - g(z_0) = 0$ sau $a_0 = b_0$. Funcția $\dfrac{f(z) - g(z)}{(z - z_0)}$ este în aceleași condiții, deci $a_1 = b_1$. Etc.

Fie acum un punct oarecare $z \in D$. Un drum rectificabil (de exemplu poligonal) $\widehat{z_0 z}$ în D poate fi acoperit cu cercuri $\Gamma_0, \Gamma_1, \dots \subset D$ și astfel ca centrul fiecăruia să fie în precedentul. ρ fiind distanța drumului la fr D, se împarte drumul în arce $< \rho$. Funcțiile f, g coincid în Γ_0. Cum ele iau valorile egale într-un șir de puncte care converg către centrul lui Γ_1, coincid și în Γ_1 etc., și în definitiv coincid în z. Concluzia subsistă și pentru $z = \infty$ (cînd $D \supset \infty$): f și g vor fi egale într-o vecinătate $V_\infty - \infty$ și deci și în ∞, din cauza continuității.

Observație. Natural, teorema se aplică la orice mulțime care are cel puțin un punct limită conținut în D (căci din ea se poate extrage un șir ce converge către punctul limită). Dacă însă această condiție nu este satisfăcută, teorema poate să nu fie verificată.

Exemplul **2.** $\sin z$ *și* $e^z \sin z$ *sînt olomorfe în tot planul minus punctul de la* ∞, *și iau valoarea* 0 *în punctele* $z = k\pi$ (k întreg). Cum unicul punct limită al acestei mulțimi $z = \infty$, nu este în D, teorema nu se aplică.

Comparînd cu teorema lui Cauchy (§ 76, teorema 2): $f(z)$ este acolo determinat de valorile de pe conturul domeniului de olomorfie; cazul este diferit, pentru că f nu are nevoie să fie olomorf pe contur (ci numai continuă în $\bar{D}$).

Teorema 4. *Dacă $f(z)$ este olomorfă în D și neconstantă, mulțimea punctelor din D unde $f(z)$ ia o valoare dată α, este formată din puncte izolate în D (deci nu poate avea puncte limită decît în* fr D).

Căci în cazul contrar $f(z)$ și $g(z) \equiv \alpha$ ar fi egale într-o mulțime de puncte care are un punct limită în D, și deci ar coincide în D, adică $f(z) \equiv \alpha$ în D.

Corolarul 1. *Dacă $f(z)$ este olomorfă în z_0 și neconstantă, există o vecinătate V_{z_0} astfel că $f(z) \neq f'(z_0)$ în $V_{z_0} - z_0$. De asemenea, există o vecinătate V_{z_0} în care $f(z) \neq \alpha$, oricare ar fi $\alpha \neq f(z_0)$.*

Corolarul 2. *Într-un domeniu închis $\bar{D}'$, conținut în domeniul de olomorfie al funcției $f(z)$, aceasta nu poate lua o valoare dată α decît de un număr finit de ori.*

Altfel mulțimea punctelor unde $f(z) = \alpha$ ar avea puncte limită în $\bar{D}'$, deci în D, în contradicție cu teorema.

Corolarul 3. *Dacă $f(z)$ ia în orice vecinătate V_{z_0} o valoare α, z_0 este punct singular, sau $f(z) \equiv \alpha$.*

Mulțimea punctelor unde $f(z)$ ia o valoare dată este numărabilă. (Se consideră coroanele $\frac{1}{n+1} < \delta(z, \text{fr } D) \leqslant \frac{1}{n}$ care conține un număr finit de puncte.)

Exemple: 3. e^z *ia orice valoare $\alpha \neq 0, \infty$, în orice V_∞ (exteriorul oricărui cerc) într-o infinitate de puncte* (vezi § 45). *Deci ∞ este punct singular pentru e^z (orice valoare am atribui simbolului e^∞; din acest motiv se renunță de a se defini e^z în ∞).*

4. *La fel, ∞ este punct singular pentru* sin z, pentru că în orice V_∞, $\sin z = 0$ pentru o infinitate de puncte $z = k\pi$.

Definiție. *Un punct unde funcția olomorfă $f(z) = 0$ se numește zero al lui $f(z)$. Dacă z_0 este un zero, $a_0 = f(z_0) = 0$.* Dacă a_m este primul coeficient diferit de zero, putem scrie $f(z) = (z - z_0)^m g(z)$, unde $g(z)$ e olomorfă în z_0 ca și $f(z)$ și $g(z_0) \neq 0$. Se zice că z_0 este atunci un zero de *ordin* (multiplicitate) m.

Teorema 5. *Pentru ca un zero z_0 să fie de ordin > 1 pentru funcția $f(z)$ (olomorfă în z_0) este necesar și suficient ca $f'(z_0) = 0$.*

Rezultă din $f'(z) = (z - z_0)^{m-1}[mg + (z - z_0)g']$, (pe lîngă $f(z_0) = 0$).

§ 82. Dezvoltări tayloriene ale funcțiilor elementare

Teorema 1. *În tot planul (la distanță finită) avem*

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}.$$

Se obține imediat dezvoltînd funcția e^z în jurul originii.

Dezvoltarea este valabilă în tot planul pentru că e^z este olomorfă în tot planul.

Din precedenta se deduce imediat următorul:

Corolar.

$$\cos z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!},$$

$$\sin z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

sînt convergente de asemenea în tot planul.

Se aplică formula care exprimă funcțiile precedente prin exponențiale.

Teorema 2.

$$\log_0 (1+z) = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} \qquad |z| < 1$$

unde $\log_0 (1+z)$ *este determinarea principală (aceea care se anulează în origine).*

Se obţine integrînd între 0 şi z

$$\frac{1}{1+z} = \sum_0^\infty (-1)^n z^n \qquad |z| < 1$$

(se aplică teorema 3, § 78). Se va observa că $\int_0^z \frac{dz}{1+z} = \log_0(1+z)$ (vezi §73, exemplul 3).

În $z = -1$ seria diverge (în acest punct critic funcţia nu este definită). În toate celelalte puncte ale circumferinţei $|z| = 1$ seria converge după a doua teoremă a lui Abel (aplicată seriei $-\log_0(1-z) = \sum_1^\infty \frac{z^n}{n}$, ai cărei coeficienţi tind la 0 monoton). Iar după teorema a treia a lui Abel (teorema 10, § 79), în aceste puncte seria reprezintă funcţia. Mai mult, ea converge uniform într-un sector conţinut în cercul $|z| \leqslant 1$ şi cu centrul într-un asemenea punct.

Aplicaţii. 1) Pentru $z = 1$ obţinem:

$$\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \log 2.$$

2) Pentru $z = \cos\theta + i\sin\theta\,(-\pi < \theta < \pi)$ avem $\log_0(1+z) = \log\left(2\cos\frac{\theta}{2}\right) + i\frac{\theta}{2}$, căci $|1+z| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ şi $\arg z$ care dă determinarea principală a logaritmului trebuie să fie cuprinsă între $-\pi$ şi $+\pi$ (vezi fig. 94). Identificînd părţile reale şi imaginare, obţinem formulele:

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\cos n\theta}{n} = \log\left(2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|\right)$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\theta}{2} \qquad (-\pi < \theta < \pi).$$

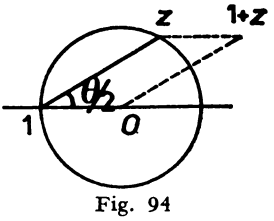

Fig. 94

De unde încă, schimbînd θ în $\pi - \theta$:

$$\sum_1^\infty \frac{\cos n\theta}{n} = -\log\left(2\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|\right)$$

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n\theta}{n} = \frac{\pi-\theta}{2} \qquad (0 < \theta < 2\pi).$$

Formulele întîia şi a treia sînt valabile pentru orice $\theta \neq (2k+1)\pi$, respectiv $\theta \neq 2k\pi$, cum se vede înlocuind pe θ cu $\theta + 2k\pi$.

Apoi adunînd formula întîia cu a treia și a doua cu a patra, obținem

$$\sum_0^\infty \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} = \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}\right| \qquad (\theta \neq k\pi),$$

$$\sum_0^\infty \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} = \pm\frac{\pi}{4} \text{ după cum } \sin\theta \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix} \quad (\theta \neq k\pi).$$

Ultima formulă stabilită astfel pentru $0 < \theta < \pi$, se extinde mai întîi la $-\pi < \theta < 0$ schimbînd pe θ în $-\theta$, și apoi la orice $\theta \neq k\pi$ schimbînd pe θ cu $\theta + 2k\pi$.

În sfîrșit, înlocuind în ultimele formule pe θ cu $\theta + \frac{\pi}{2}$, mai obținem:

$$\sum_0^\infty (-1)^n \frac{\cos(2n+1)\theta}{2n+1} = \pm\frac{\pi}{4} \text{ după cum } \cos\theta \begin{cases} > 0 \\ < 0 \end{cases} \qquad \left(\theta \neq \frac{2k+1}{2}\pi\right),$$

$$\sum_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{\sin(2n+1)\theta}{2n+1} = \frac{1}{2}\log\left|\operatorname{ctg}\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| \qquad \left(\theta \neq \frac{2k+1}{2}\pi\right).$$

Teorema 3. (*Seria binominală*) *α fiind un număr complex, care nu este întreg $\geqslant 0$,*

$$(1+z)^\alpha = \sum_0^\infty \binom{\alpha}{n} z^n \quad |z| < 1,$$

unde

$$a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{1,\ 2\ldots n}$$

și membrul întîi are determinarea: $e^{\alpha \log_0(1+z)}$. *Cînd α este real, aceasta este determinarea care este pozitivă în segmentul* $(-1, +1)$.

Pentru a calcula coeficienții se observă că

$$\frac{d}{dz}(1+z)^\alpha = \frac{\alpha}{1+z} e^{\alpha \log_0(1+z)} = \alpha e^{(\alpha-1)\log_0(1+z)} = \alpha(1+z)^{\alpha-1}$$

și în general

$$\frac{d^n}{dz^n}(1+z)^\alpha = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+z)^{\alpha-n}.$$

Raza de convergență rezultă din

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \left|\frac{\alpha-n+1}{n}\right| \to 1. \tag{22}$$

Deci $R = 1$.

Pentru a studia seria pe circumferința $|z| = 1$ vom pune $\alpha = a + ib$. Vom vedea că comportarea ei depinde numai de $a = \mathrm{Re}\alpha$.

1°. $a+1>0$. Vom aproxima $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|$ astfel:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \frac{1}{n}\sqrt{(a-n+1)^2+b^2} = \frac{n-a-1}{n}\sqrt{1+\left(\frac{b}{n-a+1}\right)^2} <$$

$$< \left(1-\frac{a+1}{n}\right)\left[1+\left(\frac{b}{n-a+1}\right)^2\right] < 1-\frac{q+1}{n}$$

cu $0<q+1<a+1$; aceasta cere

$$n\left(1-\frac{a+1}{n}\right)\left(\frac{b}{n-a+1}\right)^2 < a-q$$

şi se poate satisface cu $n>N$ deoarece primul membru $\to 0$ şi $a-q>0$.

Vom compara seria binominală cu seria $\sum^{\infty}\frac{1}{(n+1)^{q+1}} = \sum^{\infty} b_n$, care converge pentru $q>0$. Aplicînd criteriul raportului avem

$$\frac{b_n}{b_{n-1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(q+1)} = 1-\frac{q+1}{n}+\varepsilon_n$$

cu $\varepsilon_n>0$, pentru că ε_n reprezintă restul unei serii alternate, ai cărei termeni descresc în valoare absolută. Vom avea deci pentru $n>N$:

$$\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| < 1-\frac{q+1}{n} < \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Aceasta dovedeşte că seria binominală converge absolut pe toată circumferinţa $|z|=1$ cînd $a>0$. (Atunci putem lua $q>0$.)

2°. Din inegalitatea precedentă (valabilă cînd $a+1>0$), mai rezultă că $a_n \to 0$ cînd $a>-1$. Căci

$$|a_{N+1}| < |a_N|\frac{b_{N+1}}{b_N}, \ldots, |a_{N+p}| < |a_{N+p-1}|\frac{b_{N+p}}{b_{N+p-1}},$$

de unde

$$|a_{N+p}| < |a_N|\frac{b_{N+p}}{b_N} \to 0 \qquad \text{pentru } p\to\infty.$$

3°. Fie $-1<a\leqslant 0$. Vom considera sumele parţiale S_n şi S'_n ale dezvoltării lui $(1+z)^{\alpha}$ şi $(1+z)^{\alpha+1}$. Avem:

$$(1+z)S_n = \sum_0^n \binom{\alpha}{\nu} z^{\nu}(1+z) = 1+\sum_0^n\left[\binom{\alpha}{\nu-1}+\binom{\alpha}{\nu}\right]z^{\nu}+\binom{\alpha}{n}z^{n+1} =$$

$$= \sum_0^n \binom{\alpha+1}{\nu} z^{\nu} + a_n z^{n+1} = S'_n + a_n z^{n+1}.$$

După rezultatele 1° şi 2° S'_n converge şi $a_n \to 0$. Deci seria dată converge pe circumferinţa $|z|=1$ dacă $z\neq -1$. Pentru $z=-1$ seria nu converge în cazul nostru, pentru că ar trebui ca $(1+x)^{\alpha}$ să aibă limită finită

pentru $x \to -1$ (teorema a treia a lui Abel) (teorema 10, § 79). Or, $(1+x)^\alpha = (1+x)^\alpha e^{i\,b\log(1+x)}$, unde am luat determinarea principală; şi $|(1+x)^\alpha| = (1+x)^a \to \infty$, unde $-1 < a < 0$.

4°. $a \leqslant -1$. Atunci $\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| \geqslant 1$, cum se vede din (22), de unde urmează că a_n nu poate tinde la 0. Deci seria nu converge nicăieri pe circumferinţa $|z| = 1$.

În rezumat: Seria binominală are următoarea comportare pe circumferinţa de convergenţă.

$\mathrm{Re}\,\alpha > 0$ converge absolut şi deci uniform în $|z| \leqslant 1$.

$-1 < \mathrm{Re}\,\alpha \leqslant 0$ converge cu excepţia lui $z = -1$,

$\mathrm{Re}\,\alpha \leqslant -1$ nu converge.

În toate punctele de convergenţă seria este egală cu funcţia $(1+z)^\alpha$.

Observaţie. Studiul convergenţei seriei binominale pe cercul $|z| = 1$ se poate face mai repede cu ajutorul funcţiei $\Gamma(z)$. După formulele lui Gauss

$$\Gamma(-\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!\, n^{-\alpha}}{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n n^{-\alpha}}{(n-\alpha)\,a_n},$$

de unde

$$a_n = \binom{\alpha}{n} \sim (-1)^n \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)},$$

şi

$$|a_n| \sim \frac{n^{-\alpha-1}}{|\Gamma(-\alpha)|}.$$

De aici se vede că seria binominală este absolut convergentă pentru $a > 0$ şi că $a_n \to 0$ pentru $a > -1$.

Cazuri particulare.

$$\frac{1}{(1-z)^m} = 1 + \sum_1^\infty \frac{m(m+1)\ldots(m+n-1)}{n!} z^n \quad \begin{cases} m \text{ întreg} > 0, \\ |z| < 1. \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(2n)} z^n \quad (|z| \leqslant 1,\ z \neq 1). \tag{24}$$

De aici

$$1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots(n2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Aplicaţie. Pentru a real avem (teorema 2) pe circumferinţa $|z| = 1$:

$$(1+z)^a = e^{a\left[\log|1+z| + i\frac{\theta}{2}\right]} = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^a \left(\cos\frac{a\theta}{2} + i\sin\frac{a\theta}{2}\right)$$

cu $-\pi < \theta < \pi$. Egalînd părţile reale şi imaginare în dezvoltarea binominală pentru $\alpha = a > -1$, obţinem

$$\sum_0^\infty \binom{a}{n} \cos n\theta = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^a \cos\frac{a\theta}{2}$$

$$\sum_0^\infty \binom{a}{n} \sin n\theta = \left(2\cos\frac{\theta}{2}\right)^a \sin\frac{a\theta}{2} \qquad \begin{cases} a > -1, \\ -\pi < \theta < \pi. \end{cases}$$

Cînd $a > 0$ aceste formule sînt valabile şi pentru $\theta = \pm\pi$ (prima funcţie avînd valorile 2^a şi 0 pentru $\theta = 0$ şi $\theta = \pm\pi$). Avem deci:

$$\sum_0^\infty \binom{a}{n} = 2^a, \quad \sum_0^\infty (-1)^n \binom{a}{n} = 0 \qquad (a > 0).$$

Teorema 4.

$$\operatorname{arc}_0 \sin z = z + \sum_1^\infty \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots (2n)} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|z| \leqslant 1),$$

cu determinarea care se anulează în origine.

Se obţine integrînd (24) unde s-a înlocuit z prin z^2. Ca şi seria (24), seria precedentă are raza de convergenţă 1. După teorema 7, § 79, deoarece $a_n \geqslant 0$ şi $\operatorname{arc}_0 \sin x$ este mărginit, seria este absolut convergentă pe toată circumferinţa $|z| = 1$, şi prin urmare uniform convergentă în cercul închis $|z| \leqslant 1$. Ea reprezintă funcţia în acest cerc.

În particular

$$1 + \sum_1^\infty \frac{1}{2n+1} \frac{1.3 \ldots (2n-1)}{2.4 \ldots 2(n)} = \frac{\pi}{2}.$$

La fel se stabileşte:

$$\operatorname{sect}_0 \operatorname{sh} z = \log_0 (z + \sqrt{1+z^2}) = z + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{1.3 \ldots (2n+1)}{2.4 \ldots (2n)} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|z| \leqslant 1),$$

cu determinarea radicalului care are valoarea 1 în origine.

Integrînd de la 0 la z

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_0^\infty (-1)^n z^{2n} \qquad (|z| < 1)$$

obţinem:

Teorema 5.

$$\operatorname{arc}_0 \operatorname{tg} z = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad (|z| < 1).$$

cu aceeaşi rază de convergenţă; determinarea fiind aceea care se anulează în $z = 0$.

În ce priveşte comportarea pentru $|z| = 1$, vom observa că seria $\sum_0^\infty (-1)^n \frac{\zeta^n}{2n+1}$ converge pentru $|\zeta| = 1$ cu eventuala excepţie a lui $\zeta = -1$, după teorema a doua a lui Abel (teorema 9, § 79); evident, în acest punct ea diverge. Punînd $\zeta = z^2$ şi înmulţind această serie cu z, urmează că seria

lui $\operatorname{arc}_0 \operatorname{tg} z$ converge pe circumferința $|z| = 1$ cu excepția punctelor $z = \pm i$, care sînt punctele critice ale funcției. Seria reprezintă funcția în punctele de convergență (teorema a treia a lui Abel) (teorema 10, § 79).

Avem deci de exemplu:

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}.$$

La fel se va stabili:

$$\operatorname{sect}_0 \operatorname{th} z = \frac{1}{2} \log_0 \frac{1+z}{1-z} = \sum_0^\infty \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad (z \leqslant 1,\ z \neq \pm 1).$$

Observația 1. Toate aceste formule se pot scrie imediat cunoscîndu-se formule corespunzătoare pe axa reală. În general să presupunem că o funcție $f(z)$ olomorfă în discul $|z| < R$ este reală pe axa reală, deci cu partea reală egală cu $f(x)$ pentru $y = 0$. Dacă $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ este dezvoltarea taylorianã a lui $f(z)$ în $z = 0$, avem $f(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$; coeficienții a_n sînt deci reali. Urmează $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Invers, aceasta atrage pentru $z = x$, $f(x) = \overline{f(x)}$ pentru că $f(x)$ este real. Așadar: o funcție analitică într-un punct real satisface condiția $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ numai atunci cînd ia valori reale pe axa reală. De exemplu e^z, funcțiile circulare și funcțiile inverse. Dacă se cunoaște această dezvoltare vom avea imediat dezvoltarea funcției $f(z)$ și raza de convergență va fi eventual aceeași (fiind determinată de coeficienții a_n conform teoremei lui Cauchy).

Observația 2. În toate exemplele precedente funcția are un singur punct singular și cercurile de convergență trec prin punctul singular.

Observația 3. Teoria funcțiilor explică pentru ce în cazul unor funcții reale ca $\frac{1}{1+x^2}$ sau $\frac{1}{\operatorname{ch} x}$, analitice pe întreaga axă, intervalul de convergență al seriei Mac Laurin este totuși finit: motivul este că funcțiile au în planul complex puncte singulare (imaginare) care limitează cercul de convergență. Astfel $\frac{1}{1+z^2}$ are punctele singulare (poli) $z = \pm i$, iar $\frac{1}{\operatorname{ch} z}$ are $z = (2k+1)\frac{\pi}{2} i$; de aceea în primul caz raza de convergență a dezvoltării tayloriene în $z = 0$ este $R = 1$, iar în al doilea $R = \frac{\pi}{2}$.

Seria

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = 1 + \sum_1^\infty \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\,\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\,\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n$$

unde α, β, γ sînt numere complexe și γ nu este un întreg $\leqslant 0$, se numește *seria hipergeometrică.*

Teorema 6. *Seria hipergeometrică converge în cercul* $|z| < 1$, *unde reprezintă o funcție olomorfă.*

Aceasta reiese din

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(n+1)(\gamma+n)} \right| \to 1.$$

Pentru a examina comportarea ei pe circumferința $|z| = 1$, vom aproxima raportul precedent pentru valori mari ale lui n. Avem, notînd $\alpha = a + ib$,

$$|\alpha + n| = \sqrt{(n+a)^2 + b^2} = (n+a)\sqrt{1 + \left(\frac{b}{n+a}\right)^2} = n\left(1 + \frac{a}{n}\right)\left(1 + \frac{\varepsilon}{n^2}\right)$$

unde ε este mărginit și > 0. Făcînd la fel pentru $|\beta + n|$ și $|\gamma + n|$, obținem:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 + \frac{\mathrm{Re}(\alpha + \beta - \gamma - 1)}{n} + \frac{\lambda}{n^2}$$

unde λ este mărginit.

Vom compara acum seria $\sum_1^\infty |a_n|$ cu seria $\sum_1^\infty b_n = \sum_1^\infty \frac{1}{n^h}$, convergentă pentru $h > 1$. Avem

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-h} > 1 - \frac{h}{n}.$$

Deci, dacă $\mathrm{Re}(\alpha + \beta - \gamma - 1) < -1$, vom putea lua un $h > 1$ așa ca $\mathrm{Re}(\alpha + \beta - \gamma - 1) < -h$ și vom avea

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{b_{n+1}}{b_n} \qquad \text{pentru } n > N.$$

Așa dar scriem că seria hipergeometrică converge absolut pe toată circumferința $|z| = 1$ cînd $\mathrm{Re}(\alpha + \beta - \gamma) < 0$.

Cînd $\mathrm{Re}(\alpha + \beta - \gamma) \geqslant 1$ avem $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$ și seria nu converge nicăieri pentru $|z| = 1$, pentru că a_n nu tinde la zero.

Cazul rămas, $0 \leqslant \mathrm{Re}(\alpha + \beta - \gamma) < 1$, va fi elucidat cu ajutorul teoremei a doua a lui Abel (teorema 9, § 79). Vom observa mai întîi că, deoarece $\mathrm{Re}(\alpha + \beta - \gamma - 1) < 0$, se poate găsi un $h > 0$ astfel ca $\mathrm{Re}(\alpha + \beta - \gamma - 1) < -h$. Vom avea atunci pentru $n > N$:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

de unde se deduce

$$|a_n| < Kb_n = \frac{K}{n^h} \qquad \text{pentru } n > N$$

($K = \text{const}$). Aceasta arată că $a_n \to 0$ (deoarece $h > 0$). Avem apoi

$$|a_n - a_{n+1}| = \left|a_n\left(1 - \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(n+1)(\gamma + n)}\right)\right| =$$

$$= \frac{|a_n|}{n}\left|\frac{n^2(\alpha + \beta - \gamma - 1) + n(\alpha\beta - \gamma)}{(n+1)(n+\gamma)}\right| < H\frac{|a_n|}{n}$$

cu H constant $\neq 0$; căci factorul al doilea tinde la $|\alpha + \beta + \gamma - 1| > 0$.

Astfel

$$|a_n - a_{n+1}| < \frac{HK}{n^{1+h}} \qquad (h > 0) \text{ pentru } n > N,$$

de unde rezultă că seria $\sum |a_n - a_{n+1}|$ este convergentă. Condiţiile teoremei a doua a lui Abel (teorema 9, § 79) fiind împlinite, urmează că, în cazul considerat, seria hipergeometrică converge pe circumferinţa $|z| = 1$ cu eventuala excepţie a punctului $z = 1$. Se poate arăta de exemplu cu criteriul lui Weierstrass (teorema 1, § 23) că în acest punct seria nu converge.

Observaţia 1. Rezultatele precedente se obţin mai repede folosind funcţia $\Gamma(z)$. Avem imediat din formula lui Gauss:

$$\frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)}{n!} \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

de unde

$$a_n \sim \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} n^{\alpha+\beta-\gamma-1}$$

şi

$$|a_n| \sim \left|\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\right| n^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-1)}.$$

Aceasta arată că seria hipergeometrică este absolut convergentă pe $|z| = 1$ pentru $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 0$ şi că $a_n \to 0$ pentru $\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma) < 1$.

Apoi dintr-o relaţie anterioară se deduce

$$|a_n - a_{n+1}| \sim |\alpha+\beta-\gamma-1| \frac{|a_n|}{n} \sim |\alpha+\beta-\gamma-1| \left|\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\right| n^{\mathrm{Re}(\alpha+\beta-\gamma-2)}$$

etc.

Se vede încă, în cazul cînd α, β, γ sînt reali, că în punctul $z = 1$ seria diverge pentru $(\alpha+\beta-\gamma) \geqslant 0$. Căci atunci termenii seriei fiind > 0, ea poate fi comparată cu $\sum^{\infty} n^{\alpha+\beta-\gamma-1}$, care este divergentă.

Observaţia 2. Să considerăm seria binominală

$$\frac{1}{(1-z)^{\sigma}} = \sum_0^{\infty} c_n z^n \qquad (\sigma > 0),$$

unde

$$c_n = \frac{\sigma(\sigma+1)\ldots(\sigma+n-1)}{n!} \sim \frac{n^{\sigma-1}}{\Gamma(\sigma)}.$$

Avem deci, luînd $\sigma = \alpha+\beta-\gamma$:

$$a_n \sim \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} c_n.$$

De aici urmează, după teorema 12, § 79, cînd α, β, γ sînt reali şi $\alpha+\beta-\gamma > 0$:

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) \sim \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)\,\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \frac{1}{(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}}, \text{ pentru } x \to 1.$$

În cazul $\alpha + \beta - \gamma = 0$ avem $a_n \sim \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \dfrac{1}{n}$ și considerînd seria

$$\log \frac{1}{1-x} = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n};$$

se găsește:

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta; x) \sim \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \log \frac{1}{1-x} \text{ pentru } x \to 1.$$

Să considerăm funcția $z \operatorname{ctg} z$. Deoarece ea tinde la 1 pentru $z \to 0$, este regulată în origine. Se știe că singurele singularități ale ei sînt polii $z = k\pi$ $(k \neq 0)$ și punctul singular esențial $z = \infty$. Deci funcția este olomorfă în cercul $|z| < \pi$. Deoarece este o funcție pară, dezvoltarea ei taylo-riană în jurul originei este de forma:

$$z \operatorname{ctg} z = 1 - \sum_1^\infty \frac{B_n}{(2n)!} (2z)^{2n} \qquad (|z| < \pi) \tag{25}$$

raza de convergență fiind π.

Coeficienții B_n din această dezvoltare se numesc *numerele lui Bernoulli*. Din (25) se deduc dezvoltările multor funcții elementare.

Schimbînd z în iz avem mai întîi:

$$z \operatorname{cth} z = z \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}} = 1 + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} (2z)^{2n} \qquad (|z| < \pi). \tag{25'}$$

Schimbînd aici z în $\dfrac{z}{2}$, obținem:

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} z^{2n} \qquad (|z| < 2\pi). \tag{26}$$

Scriind

$$\operatorname{tg} z = \operatorname{ctg} z - 2 \operatorname{ctg} 2z$$

și aplicînd (25) avem

$$\operatorname{tg} z = 2 \sum_1^\infty \frac{(2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} (2z)^{2n-1} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right), \tag{27}$$

de unde

$$\operatorname{th} z = 2 \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{(2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} (2z)^{2n-1} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right), \tag{27'}$$

$$\frac{1}{e^z + 1} = \frac{1}{2} - \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{(2^{2n} - 1) B_n}{(2n)!} z^{2n-1} \qquad (|z| < \pi). \tag{26'}$$

Apoi scriind

$$\frac{1}{\sin z} = \operatorname{ctg} z + \operatorname{tg} \frac{z}{2}$$

şi aplicînd (25), (27):

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{(2^{2n-1} - 1)\, B_n}{(2n)!}\, z^{2n} \qquad (|z| < \pi). \tag{28}$$

$$\frac{z}{\operatorname{sh} z} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2^{2n-1} - 1)\, B_n}{(2n)!}\, z^{2n} \qquad (|z| < \pi). \tag{28'}$$

În sfîrşit, integrînd de la 0 la z dezvoltarea lui $\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}$, avem

$$\log_0 \frac{\sin z}{z} = -\sum_{1}^{\infty} \frac{B_n}{2n(2n)!}\, (2z)^{2n} \qquad (|z| < \pi) \tag{29}$$

şi integrînd dezvoltarea (27)

$$\log_0 \cos z = -\sum_{1}^{\infty} \frac{(2^{2n} - 1)\, B_n}{2n(2n)!}\, (2z)^{2n} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right). \tag{30}$$

Derivînd (27) avem încă:

$$\frac{1}{\cos^2 z} = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{(2^{2n} - 1)\, B_n}{n(2n-2)!}\, (2z)^{2n-2} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right). \tag{31}$$

Etc.

Numerele lui Bernoulli se pot calcula prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi, introducînd în (25) dezvoltările cunoscute ale lui $\cos z$ şi $\sin z$, sau în (26) dezvoltarea lui e^z. Se stabileşte în acest mod o relaţie de recurenţă. Avem din (26):

$$z = \left(\sum_{1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right)\left[1 - \frac{z}{2} + \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!}\, z^{2n}\right].$$

Egalînd cu zero termenul în z^3 obţinem $B_1 = \frac{1}{6}$ şi în general, egalînd cu zero termenul în z^{2n+1} avem:

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu}{(2\nu)!\,(2n - 2\nu + 1)!} + \frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{2\,(2n)!} = 0,$$

sau înmulţind cu $(2n+1)!$:

$$\sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \binom{2n+1}{2\nu} B_\nu = \frac{2n-1}{2}. \tag{32}$$

Cu ajutorul acestei relaţii se găseşte:

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30},\ B_3 = \frac{1}{42},\ B_4 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{5}{66},\ B_6 = \frac{691}{2730},$$

$$B_7 = \frac{7}{6},\ B_8 = \frac{3617}{510},\ B_9 = \frac{43867}{798},\ B_{10} = \frac{174\,611}{300},\ B_{11} = \frac{854\,513}{138},$$

$$B_{12} = \frac{236\,364\,091}{2\,730}, \ldots$$

Se poate observa că relaţia de recurenţă poate fi scrisă simbolic:

$$(1 + i\sqrt{B})^{(2n+1)} + (1 - i\sqrt{B})^{(2n+1)} = 2n - 3,$$

sau

$$\operatorname{Re}(1 + i\sqrt{B})^{(2n+1)} = \frac{2n-3}{2}.$$

Rezolvînd sistemul liniar obţinut luînd în relaţia de recurenţă $n = 1, 2, \ldots, n$, se găseşte:

$$B_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3,\ 5,\ \ldots\ (2n+1)2^n} \begin{vmatrix} \binom{3}{2} & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \binom{5}{2} & \binom{5}{4} & \cdots & 0 & 3 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \binom{2n-1}{2} & \binom{2n-1}{4} & \cdots & \binom{2n-1}{2n-2} & (2n-3) \\ \binom{2n+1}{2} & \binom{2n+1}{4} & \cdots & \binom{2n+1}{2n-2} & (2n-1) \end{vmatrix}.$$

Uneori în loc de B_n se scrie $(-1)^{n-1} B_{2n}$.

Mai departe (teoria reziduurilor) se va demonstra formula:

$$B_n = 2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^{2n}}.$$ [12]

De aici rezultă că numerele B_n sînt pozitive. Ele sînt evident raţionale.

Dintr-o teoremă ulterioară (Fatou) va rezulta că seria (25) converge pe circumferinţa $|z| = 1$ cu excepţia punctelor singulare $\pm\pi$. (Şi analog celelalte serii.)

$$\frac{z^2}{\sin^2 z} = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{B_n}{2n(2n-2)!} (2z)^{2n} \qquad (|z| < \pi). \tag{33}$$

Se derivează cotg z şi înmulţeşte cu z^2.

$$\log \frac{\operatorname{sh} z}{z} = \sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{2n(2n)!} (2z)^{2n} \qquad (|z| < \pi). \tag{34}$$

Se integrează

$$\operatorname{cth} z = \frac{1}{z} + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} (2z)^{2n-1}. \tag{35}$$

---

[12] Se poate demonstra că $B_n < \frac{(2n)!}{20^n}$, $(n > 1)$. Pe de altă parte din faptul că raza de convergenţă a seriei (25) este π urmează că avem $B_n > \frac{(2n)!}{[2(\pi+\varepsilon)]^{2n}}$ pentru o infinitate de indici n; de aici reiese că B_n sînt nemărginiţi.

(36) $$\log \operatorname{ch} z = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{(2^{2n}-1)B_n}{an(2n)!} (2z)^{2n} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Se integrează seria (27') sau se deduce din (30).

(37) $$\frac{z^2}{\operatorname{sh}^2 z} = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{B_n}{2n(2n-2)!} (2z)^{2n} \qquad (|z| < \pi).$$

Se derivează (35) și se înmulțește cu z^2 sau se deduce din (33) schimbînd z în iz.

(38) $$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 z} = 4 \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{(2^{2n}-1)\,B_n}{(2n)!} (2z)^{2n-2}$$

Se derivează (27').

Să considerăm încă funcția $\frac{1}{\cos z}$, care este olomorfă în origine și are ca singularități polii $z = \frac{2k+1}{2}\pi$ și punctul singular esențial $z = \infty$. Ea este deci olomorfă în cercul $|z| < \frac{\pi}{2}$ care trece prin polii cei mai apropiați de origine. Funcția fiind pară, are în acest cerc o dezvoltare de forma

(39) $$\frac{1}{\cos z} = 1 + \sum_1^\infty \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

cu raza de convergență $\frac{\pi}{2}$. Coeficienții E_n se numesc *numerele lui Euler*.

Din această dezvoltare se deduce de exemplu:

(39') $$\frac{1}{\operatorname{ch} z} = 1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right)$$

și prin integrarea lui (39):

(40) $$\log_0 \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{z}{2}\right) = z + \sum_1^\infty \frac{E_n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \qquad \left(|z| < \frac{\pi}{2}\right).$$

Pentru calculul numerelor lui Euler avem:

$$1 = \left[1 + \sum_1^\infty (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}\right]\left[1 + \sum_1^\infty \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n}\right],$$

de unde, egalînd cu zero termenul în z^{2n}:

(41) $$\sum_{\nu=1}^n (-1)^{n-\nu} \frac{E_\nu}{(2\nu)!\,(2n-2\nu)!} + \frac{(-1)^n}{(2n)!} = 0$$

sau

$$\sum_{\nu=1}^n (-1)^{\nu-1} \binom{2n}{2\nu} E_\nu = 1.$$

Aceasta se mai scrie simbolic:

$$\operatorname{Re}\,(1 + i\sqrt{E})^{(2n)} = 0.$$

Cu ajutorul relației de recurență se găsesc valorile:

$$E_1 = 1, \quad E_2 = 5, \quad E_3 = 61, \quad E_4 = 1385, \ldots .$$

Deoarece coeficienții relației de recurență sînt întregi și E_n are coeficientul $(-1)^{n-1}$, numerele E_n sînt întregi.

Se găsește:

$$E_n = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \binom{4}{2} & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \binom{2n-2}{2} & \binom{2n-2}{4} & \cdots & 1 & 1 \\ \binom{2n}{2} & \binom{2n}{4} & \cdots & \binom{2n}{2n-2} & 1 \end{vmatrix}$$

Uneori în loc de E_n se scrie $(-1)^n E_{2n}$.

Numerele lui Euler sînt evident întregi și se poate demonstra că sînt pozitive.

Seria (39) converge pe circumferința $|z| = 1$, cu excepția punctelor singulare $z = \pm \frac{\pi}{2}$.

Seriile lui Lambert[13]. Se numesc astfel seriile de forma:

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n \frac{z^n}{1 - z^n}. \qquad |z| \neq 1.$$

Convergența unei asemenea serii este legată de convergența seriei $\sum_1^\infty a_n$. Și anume:

Teorema 7. *Dacă* $\sum_1^\infty a_n$ *nu converge, seria lui Lambert* ***converge absolut*** *în același cerc ca seria* $\sum_1^\infty a_n z^n$ *și nu converge în afara acestuia.* ***Dacă prima*** *serie converge, seria lui Lambert converge pentru orice* $|z| \neq 1$.

1°. Fie $\sum_1^\infty a_n$ divergentă. Deci seria $\sum_1^\infty a_n z^n$ are raza de convergență $R \leqslant 1$. Pentru orice punct z din cercul de convergență al acestei serii avem (deoarece $|z| < 1$):

$$\left| \frac{a_n z^n}{1 - z^n} \right| \leqslant \frac{|a_n z^n|}{1 - |z|^n} \leqslant \frac{|a_n z^n|}{1 - |z|}, \tag{42}$$

[13] V. Konrad Knopp, *Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen*, Springer Verlag, Berlin, 1924.

de unde se vede că seria lui Lambert converge absolut în z. Invers, dacă această serie converge pentru $|z| < 1$, avem

$$a_n z^n| = \left|\frac{a_n z^n}{1 - z^n}\right| |1 - z^n| < 2\left|\frac{a_n z^n}{1 - z^n}\right|,$$

deci și seria de puteri converge. Pe de altă parte, seria lui Lambert nu poate converge pentru $|z_0| > 1$. Aceasta ar însemna ca seria de puteri $\sum_1^\infty \frac{a_n}{1 - z_0^n} z^n$ să conveargă pentru $z = z_0$, deci și pentru $z = 1$. Or atunci ar urma ca seria

$$\sum_1^\infty \frac{a_n}{1 - z_0^n} - \sum_1^\infty \frac{a_n z_0^n}{1 - z_0^n} = \sum_1^\infty a_n$$

să fie convergentă contrar ipotezei. Cu aceasta am dovedit că seria lui Lambert converge în cercul de convergență al seriei $\sum_1^\infty a_n z^n$ și nu în afara acestuia.

2°. Fie $\sum_1^\infty a_n$ convergentă, deci $R \geqslant 1$. Raționamentul de mai sus ne arată că seria lui Lambert converge absolut pentru $|z| < 1$. Ea converge și pentru $|z| > 1$, cum se vede scriind

$$\sum_1^\infty a_n \frac{z^n}{1 - z^n} = -\sum_1^\infty a_n - \sum_1^\infty a_n \frac{\left(\frac{1}{z}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{z}\right)^n}, \tag{43}$$

unde ambele serii din membrul al doilea converg $\left(\text{pentru că } \left|\frac{1}{z}\right| < 1\right)$.

Observație. Convergența seriei lui Lambert este uniformă în interiorul domeniului sau domeniilor de convergență, căci în primul caz, considerînd un cerc $|z| \leqslant r < R$, inegalitatea (42) ne dă

$$\left|a_n \frac{z^n}{1 - z^n}\right| \leqslant \frac{|a_n z^n|}{1 - r}.$$

Aceasta se aplică și în cazul 2° pentru $|z| \leqslant r < 1$, sau $|z| \geqslant r' > 1$, ținînd seama de (43).

Să considerăm seria în interiorul cercului de convergență care are raza $\leqslant 1$. Cum termenii seriei sînt olomorfi și seria converge uniform în interiorul cercului, putem aplica lema lui Weierstrass:

$$\begin{cases} \frac{a_1 z}{1 - z} = a_1 z + a_1 z^2 + a_1 z^3 + a_1 z^4 + \ldots, \\ \frac{a_2 z^2}{1 - z^2} = \quad a_2 z^2 \quad + a_2 z^4 + \ldots, \\ \frac{a_3 z^3}{1 - z^3} = \quad a_3 z^3 \quad + a_6 z^6 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \tag{44}$$

şi adunînd pe coloane obţinem dezvoltarea taylorianã:

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_1^\infty A_n z^n,$$

unde A_n este suma coeficienţilor a_ν cu indicele ν divizor al lui n (inclusiv 1 şi n), ceea ce scriem:

$$A_n = \sum_{d|n} a_d$$

(d parcurge divizorii lui n). Considerînd ecuaţiile pentru $A_1, \ldots, A_n$, se vede cã ele determinã pe a_n (care intrã cu coeficientul 1 numai în ultima) şi cã în expresia astfel obţinutã intrã numai A_d cu d divizor al lui n (inducţie). Mai precis, se gãseşte

$$a_n = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) A_d,$$

unde $\mu(m)$ — simbolul lui Mõbius — are valoarea 0 cînd m are factori primi egali şi valorile $+1$ sau -1 cînd m are numai factori primi diferiţi, în numãr par respectiv impar.

Aşa dar orice serie de puteri $\sum_1^\infty A_n z^n$ se poate scrie în mod unic, ca serie Lambert.

Exemple.

1. $a_n = 1$; *avem*

$$\sum_1^\infty \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_1^\infty d(n) z^n \qquad (|z| < 1),$$

unde $d(n)$ este numãrul divizorilor lui n (egal cu 2 cînd n este prim). Dupã teorema precedentã raza de convergenţã este 1.

2. $a_n = n$.

$$\sum_1^\infty \frac{n z^n}{1-z^n} = \sum_1^\infty \delta(n) z^n \qquad (|z| < 1)$$

unde $\delta(n)$ este suma divizorilor lui n.

3. $A_1 = 1$, $A_n = 0 (n > 1)$, *deci* $a_n = \mu(n)$; *obţinem*:

$$z = \sum_1^\infty \mu(n) \frac{z^n}{1-z^n} \qquad (|z| < 1)$$

($\sum a_n$ *nu converge*).

4. $A_n = n$. Ţinînd seamã de formula

$$\sum_{d|n} d\mu\left(\frac{n}{d}\right) = \varphi(n),$$

unde $\varphi(n)$ este numãrul numerelor $< n$ şi prime faţã de n, obţinem

$$\sum_1^\infty n z^n = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_1^\infty \varphi(n) \frac{z^n}{1-z^n} \qquad (|z| < 1).$$

Sumînd în (44) pe linii oblice (ceea ce este permis fiindcă seria dublă este asbsolut convergentă), obținem formula:

$$\sum_1^\infty \frac{a_n z^n}{1-z^n} = \sum_1^\infty g(z^m) \quad \text{cu} \quad g(z) = \sum_1^\infty a_\nu z^\nu$$

valabilă în cercul de convergență al primei serii.

5. $a_\nu = \frac{1}{\nu}$, $g(z) = -\log_0(1-z)$.

Se obține:

$$\prod_1^\infty (1-z^n) = \exp^{-1} \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{z}{1-z^n} \qquad (|z|<1).$$

6. $a_\nu = \nu$, $g(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, deci

$$\sum_1^\infty \frac{nz^n}{1-z^n} = \sum_1^\infty \frac{z^m}{(1-z^m)^2} \qquad (|z|<1).$$

Exerciții:

1. *Să se dezvolte în serie Laurent*

$$f(z) = \frac{z}{z^2-3z+2}$$

în coroane concentrice cu originea.

R. $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = \frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-1}$.

Pentru $|z|<1$:

$$f(z) = z(1+z+z^2+\ldots) - \frac{z}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right) = \sum_1^\infty \left(1-\frac{1}{2^n}\right) z^n.$$

Pentru $1<|z|<2$:

$$f(z) = -\frac{z}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)} - \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\sum_0^\infty \frac{1}{z^n} - \sum_0^\infty \frac{z^n}{2^n}.$$

Pentru $|z|>2$:

$$f(z) = \frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_0^\infty \frac{2^n}{z^n} - \sum_0^\infty \frac{1}{z^n} = \sum_1^\infty \frac{2^n-1}{z^n}.$$

2. *Să se dezvolte în serie Laurent*

$$f(z) = \frac{1}{z-2} \log \frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$$

cu determinarea logaritmului, care este reală pentru $z = 2\mathrm{i}$.

R. Prelungind pe axa imaginară de la $z = 2\mathrm{i}$ la $z = 0$, cu un semicircuit în jurul lui $z = \mathrm{i}$, se vede că în $z = 0$ determinarea lui $f(z)$ are valoarea $+\frac{\pi}{2}\mathrm{i}$. Pentru $|z|<1$:

$$f(z) = \frac{1}{z-2}\left(\log\frac{1+iz}{1-iz} - \pi i\right) = -\frac{1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}\left[\log(1+iz) - \log(1-iz) - \pi i\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)\left[-\pi i + 2\left(\frac{iz}{1}+\frac{i^3z^3}{3}+\cdots\right)\right] =$$

$$= \frac{i}{2}\left\{\pi + \left(\frac{\pi}{2}-2\right)z + \left(\frac{\pi}{4}-1\right)z^2 + \ldots\right\} =$$

$$= i\left(\frac{\pi}{2} + \sum_1^\infty \left(\frac{z}{2}\right)^n a_n\right),$$

unde

$$a_n = \frac{\pi}{2} + A_n,$$

$$A_{2\nu} = A_{2\nu-1} = -\left(2 - \frac{2^3}{3} + \ldots + (-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu-1}}{2\nu-1}\right).$$

Pentru $1 < |z| < 2$:

$$f(z) = \frac{-1}{2\left(1-\frac{z}{2}\right)}\log\frac{1-\frac{i}{z}}{1+\frac{i}{z}} =$$

$$= \left(1+\frac{z}{2}+\left(\frac{z}{2}\right)^2+\cdots\right)\left(\frac{i}{z}+\frac{i^3}{3z^3}+\cdots\right) = \sum_0^\infty a_n\left(\frac{z}{2}\right)^n + \sum_1^\infty b_n\left(\frac{2}{z}\right)^n,$$

unde

$$a_n = i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1}{2^5\cdot 5} - \cdots\right) = -\log\frac{1-\frac{i}{2}}{1+\frac{i}{2}} = -\log\frac{2-i}{2+i},$$

$$b_{2\nu} = i\left((-1)^\nu\frac{1}{2(2\nu+1)} + \frac{(-1)^{\nu+1}}{2^3(2\nu+3)} + \cdots\right)\frac{1}{2^{2\nu}} = -\log\frac{2-i}{2+i} - B_{2\nu},$$

$$b_{2\nu+1} = i\left((-1)^\nu\frac{1}{(2\nu+1)} + \frac{(-1)^{\nu+1}}{2^2(2\nu+3)} + \cdots\right)\frac{1}{2^{2\nu+1}} = -\log\frac{2-i}{2+i} - B_{2\nu+1},$$

cu

$$B_{2\nu} = B_{2\nu+1} = i\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3\cdot 2^3} + \cdots + \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu-1)\,2^{2\nu-1}}\right).$$

Pentru $|z| > 2$:

$$f(z) = \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}\log\frac{1-\frac{i}{z}}{1+\frac{i}{z}}$$

$$= -\frac{2}{z}\left(1+\frac{2}{z}+\left(\frac{2}{z}\right)^2+\cdots\right)\left(\frac{i}{z}+\frac{i^3}{3z^3}+\cdots\right) = \sum_1^\infty c_n\left(\frac{2}{z}\right)^n,$$

unde

$$-c_{2\nu} = i\left(2^{2\nu-1} - \frac{2^{2\nu-3}}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{\nu-1}2}{2\nu-1}\right)\frac{1}{2^{2\nu}} = B_{2\nu},$$

$$-c_{2\nu+1} = i\left(2^{2\nu} - \frac{2^{2\nu-2}}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{\nu-1}2^2}{2\nu-1}\right)\frac{1}{2^{2\nu+1}} = B_{2\nu+1}.$$

3. *Să se dezvolte în serie de puteri funcția* $\frac{1}{1+z+z^2}$, *în* $z = 0$ *și* $z = \infty$.

R. Funcția are polii $z = \alpha$, $\frac{1}{\alpha}$ unde α este o rădăcină imaginară a ecuației $z^3 = 1$; fie $\alpha = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$. Avem $z^2 + z + 1 = (1-\alpha z)\left(1 - \frac{z}{\alpha}\right)$,

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \left(\frac{\alpha}{1-\alpha z} - \frac{\frac{1}{\alpha}}{1-\frac{z}{\alpha}}\right)\frac{1}{\alpha - \frac{1}{\alpha}} = \frac{i}{\sqrt{3}}\sum_0^\infty\left(\alpha^{n+1} - \frac{1}{\alpha^{n+1}}\right)z^n \qquad |z| < 1$$

sau

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\sum_0^\infty z^n \sin\frac{2(n+1)\pi}{3} \qquad |z| < 1.$$

(Cercul de convergență trece prin poli.) Dezvoltarea în $z = \infty$ se va deduce înlocuind z cu $\frac{1}{z}$, ceea ce dă

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{-2}{\sqrt{3}}\sum_2^\infty \frac{1}{z^n}\sin\frac{2(n-1)\pi}{3} \qquad |z| > 1$$

sau se obține la fel, scriind

$$\frac{1}{1+z+z^2} = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{\alpha}{z}} - \frac{1}{1-\frac{1}{\alpha z}}\right)\frac{1}{\alpha - \frac{1}{\alpha}}.$$

4. *Idem* $[\log(1+z)]^2$, *în* $z = 0$ (*determinarea care se anulează în* $z = 0$).

R. Se face produsul lui Cauchy al seriei $\log(1+z) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ ($|z| < 1$) cu ea însăși. Coeficientul lui z^n:

$$\sum_{\nu=1}^{n-} \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\frac{(-1)^{n-\nu-1}}{n-\nu} = \frac{(-1)^n}{n}\sum_{\nu=1}^{n-1}\left(\frac{1}{\nu} + \frac{1}{n-\nu}\right) = 2\frac{(-1)^n}{n}\sum_0^{n-1}\frac{1}{\nu},$$

astfel

$$\frac{1}{2}\left[\log(1+z)\right]^2 = \sum_2^\infty \frac{(-1)^n}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right)z^n \qquad (|z| < 1).$$

5. *Idem* $\log(1+z^2)\operatorname{arc\,tg} z$, *în* $z = 0$ (*determinarea care se anulează în* $z = 0$).

R. Produsul lui Cauchy al seriilor

$$\log(1+z^2)=\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n}z^{2n},\quad \operatorname{arc\,tg} z=\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{2n+1}z^{2n+1}\qquad (|z|<1).$$

Produsul este impar; coeficientul lui z^{2n+1} este

$$\sum_{\nu=1}^{n}\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu}\cdot\frac{(-1)^{n-\nu}}{2n-2\nu+1}=2\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{2\nu}+\frac{1}{2n-2\nu+1}\right)=$$

$$=2\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\sum_1^{2n}\frac{1}{\mu}.$$

Așadar

$$\frac{1}{2}\log(1+z^2)\operatorname{arc\,tg} z=\sum_1^\infty\frac{(-1)^{n-1}}{2n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)z^{2n+1}\qquad (|z|<1).$$

6. *Seria* $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}(\log n)^{-z}$ *este convergentă în tot planul, dar nicăieri absolut convergentă.*

R. Este o serie Dirichlet: $\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}e^{-z\log_2 n}$. Este destul să stabilim convergența pentru x real oarecare (vezi observația 1 de la teorema 4, § 78). Ea rezultă din faptul că $\frac{1}{\sqrt{n}}(\log n)^{-x}\to 0$ monoton (criteriul Leibniz). Pe de altă parte, pentru $x\leqslant 0$,

$$\frac{(\log(n+1))^{-x}}{\sqrt{n+1}}:\frac{(\log n)^{-x}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\left(\frac{\log(n+1)}{\log n}\right)^{-x}>\frac{1}{\sqrt{n+1}}:\frac{1}{\sqrt{n}},$$

ceea ce arată că seria modulilor $\sum_1^\infty\frac{(\log n)^{-x}}{\sqrt{n}}$ este divergentă, ca și seria $\sum_1^\infty\frac{1}{\sqrt{n}}$, iar pentru $x>0$, divergența rezultă din faptul că $\frac{1}{\sqrt{n}(\log n)^x}>\frac{1}{n}$.

7. *Să se examineze convergența seriei* $\sum_1^\infty a^n n^{-z}$.

R. 1°. $|a|<1$. Seria converge absolut în tot planul, căci seria modulilor este $\sum_1^\infty |a|^n n^{-x}$, și se aplică criteriul lui D'Alembert.

2°. $|a|>1$. Seria diverge în tot planul pentru că $|a|^n n^{-x}\to+\infty$.

3°. $a=1$. Seria $\zeta(z)=\sum_1^\infty\frac{1}{n^z}$ are ca semiplan de convergență și de convergență absolută $\operatorname{Re} z>1$. Căci $\sum\frac{1}{n^x}$ este convergentă pentru $x>1$ și divergentă pentru $x\leqslant 1$. Se pot aplica și teoremele 7 și 8 din § 78.

Pe dreapta $\operatorname{Re} z=1$ seria este oscilatoare pentru $y\neq 0$.

8. *Să se stabilească formulele* :

$$F(\alpha-1,\beta,\gamma;1)=\frac{\gamma-\alpha-\beta}{\gamma-\alpha}F(\alpha,\beta,\gamma;1)$$

$$\operatorname{Re}(\gamma-\alpha-\beta)>0.$$

$$F(\alpha,\beta,\gamma+1;1)=\frac{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}F(\alpha,\beta,\gamma;1)$$

R. Fie a_n, a'_n, a''_n coeficienții lui z^n în $F(\alpha, \beta, \gamma; z)$, $F(\alpha - 1, \beta, \gamma; z)$ și $F(\alpha, \beta, \gamma + 1; z)$. e verifică imediat

$$(\gamma - \alpha)a'_n = (\gamma - \alpha + n)\, a_n - (\beta + n - 1)\, a_{n-1} \qquad n \geqslant 1.$$

Sumînd și observînd că $\sum_1^\infty [na_n - (n-1)a_{n-1}] = \lim_{n\to\infty} na_n = 0$, după cum rezultă din faptul că seria $\sum na_n$ este convergentă, pentru Re $(\gamma - \alpha - \beta) > 1$, cum se vede din $\frac{n+1}{n}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha - \gamma - \beta}{n} + \frac{\lambda(n)}{n^2}$ sau mai bine din teorema lui Olivier (§ 17), deoarece

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1 - \frac{1}{n}\,\mathrm{Re}\,(\gamma - \alpha - \beta + 1) + \frac{\lambda}{n^2} < 1,$$

obținem

$$(\gamma - \alpha)\,[F(\alpha - 1, \beta, \gamma;\ 1) - 1] = (\gamma - \alpha)\,[F(\alpha, \beta, \gamma;\ 1) - 1] - \beta F(\alpha, \beta, \gamma;\ 1),$$

adică prima relație.

Se verifică apoi

$$a_n - a_{n+1} = \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) a''_n - a''_{n+1} \qquad n \geqslant 0,$$

de unde, sumînd și observînd că $\sum_0^\infty (a_n - a_{n+1}) = 1 - \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = 1$,

$$1 = \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\right) F(\alpha, \beta, \gamma + 1;\ 1) - [F(\alpha - 1, \beta, \gamma;\ 1) - 1].$$

adică formula

$$F(\alpha, \beta, \gamma + 1;\ 1) = \frac{\gamma}{\gamma - \beta}\, F(\alpha - 1, \beta, \gamma;\ 1);$$

din aceasta și prima formulă demonstrată urmează a doua.

9. *Funcția* $F(\alpha, \beta, \gamma; z) = w$ $(|z| < 1)$ *verifică ecuația lui Gauss.*

$$z(1 - z)\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\, z^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} - \alpha\beta w = 0.$$

R. Revine la relația între coeficienți

$$-n(n-1)a_n + (n+1)(n+\gamma)a_{n+1} - [n(\alpha + \beta + 1) + \alpha\beta]a_n = 0$$

sau

$$(n+1)(n+\gamma)a_{n+1} = (n+\alpha)(n+\beta)a_n,$$

care este evidentă.

10. *În dezvoltarea tayloriană în vecinătatea lui* $t = 0$ *a funcției de* t

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2tz + t^2}} = \sum_0^\infty P_n(z)t^n$$

cu determinarea $+1$ *a radicalului, coeficientul* $P_n(z)$ *este un polinom, numit polinomul lui Legendre, de grad* n. *Să se calculeze* $P_0(z)$, $P_1(z)$, $P_3(z)$. *Să se stabilească formula de recurență*

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)\,zP_n(z) + nP_{n-1}(z) = 0.$$

R. 1°. Rădăcinile ecuației $1 - 2tz + t^2 = 0$ sînt

$$\alpha = z + \sqrt{z^2 - 1}, \quad \frac{1}{\alpha} = z - \sqrt{z^2 - 1}.$$

Dacă $|\alpha|$ este cel mai mic, dezvoltarea taylorianã este valabilă în $|t| < |\alpha|$ (cantitate > 0).

2°. Aplicînd seria binominală

$$(1 - 2tz + t^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}(2tz - t^2) + \frac{3}{8}(2tz - t^2)^2 + \dots$$

$$= 1 + tz + \frac{t^2}{2}(3z^2 - 1) + \dots,$$

deci

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z, \quad P_2(z) = \frac{1}{2}(3z^2 - 1).$$

3°. Derivînd seria obţinem

$$\frac{z - t}{(\sqrt{1 - 2zt + t^2})^3} = \sum_1^\infty n P_n(z) t^{n-1}$$

şi înmulţind ambii membri cu $1 - 2zt + t^2$

$$(z - t)\sum_0^\infty P_n(z)t^n = \sum_1^\infty n(1 - 2zt + t^2)P_n(z)t^{n-1}$$

de unde, comparînd termenii cu t^n:

$$zP_n(z) - P_{n-1}(z) = (n + 1)P_{n+1}(z) - 2nzP_n(z) + (n - 1)P_{n-1}(z),$$

care este relaţia afirmată.

Ea arată că $P_n(z)$ este un polinom de grad n (inducţie). De altfel, dacă $P_n(z) = p_n z^n + \dots$, avem din relaţia de recurenţă

$$p_{n+1} = \frac{2n + 1}{n + 1} p_n,$$

deci

$$p_0 = 1, \quad p_1 = \frac{1}{1} p_0, \quad p_2 = \frac{3}{2} p_1, \ \dots, \ p_n = \frac{2n - 1}{n} p_{n-1}$$

şi înmulţind

$$p_n = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n - 1)}{n!}.$$

11. *Să se stabilească*

$$P_n(z) = F\left(n + 1, -n, 1, \frac{1 - z}{2}\right) = (-1)^n F\left(n + 1, -n, 1, \frac{1 + z}{2}\right).$$

R. Avem:

$$(1 - 2zt + t^2)^{-\frac{1}{2}} = [(1 - t)^2 + 2t(1 - z)]^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - t}\left(1 + \frac{2t(1 - z)}{(1 - t)^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1 - t} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{1 - t} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \left(\frac{4t}{(1 - t)^2} \frac{1 - z}{2}\right)^n$$

$$= \sum_0^\infty t^m + \sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \dots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \dots (2n)} \sum_{\nu=0}^\infty 4^n \frac{(2n + 1)(2n + 2) \dots (2n + \nu)}{\nu!} t^{n+\nu} \left(\frac{1 - z}{2}\right)^n.$$

Coeficientul lui $t^m (m = m + \nu)$ este

$$P_m(z) = 1 + \sum_1^m (-1)^n \frac{(m+n)!}{(n!)^2 (m-n)!} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$= 1 + \sum_1^m \frac{(m+1)\dots(m+n)(-m)(-m+1)\dots(-m+n-1)}{n! 1 \cdot 2 \dots n} \left(\frac{1-z}{2}\right)^n$$

$$= F\left(m+1, -m, 1, \frac{1-z}{2}\right).$$

Pentru a obține formula a doua schimbăm z în $-z$ și t în $-t$ observînd că prin aceasta coeficientul lui t^m devine $(-1)^m P_m(z)$.

12. $P_n(z) = w$ *satisface ecuația lui Legendre*:

$$(1 - z^2) \frac{d^2w}{dz^2} - 2z \frac{dw}{dz} + n(n+1)w = 0.$$

R. Urmează din exercițiile 9, 11: punînd $\alpha = n + 1$, $\beta = -n$, $\gamma = 1$, $z = \frac{1 - z'}{2}$.

13. *Se numește funcția lui Legendre de specia I și indice n funcția analitică definită de*

$$P_n(z) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-z}{2}\right) \qquad |z| < 1,$$

unde n este un număr complex oarecare. Ea satisface ecuația precedentă și admite formulele de recurență

$$(n+1)P_{n+1}(z) - (2n+1)z\,P_n(z) + n\,P_{n-1}(z) = 0,$$

$$nP_n(z) = zP_n'(z) - P_{n-1}'(z),$$

$$P_{-n}(z) = P_{n-1}(z).$$

R. 1°. Vezi exercițiul 10.

§ 83. Principiul maximului modulului

a) Vom stabili întîi o formulă dată de Parseval:

Dacă $f(z) = \sum_0^\infty a_m (z - z_0)^m$ și $g(z) = \sum_0^\infty b_n (z - z_0)^n$ în cercul $|z - z_0| < R$, avem:

$$\sum_0^\infty a_n b_n r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, g(z_0 + re^{-i\theta})\, d\theta \tag{45}$$

pentru $r < R$.

Într-adevăr, punctele $z = z_0 + re^{i\theta}$ și $z = z_0 + re^{-i\theta}$ fiind în cercul precedent, avem:

$$f(z_0 + re^{i\theta}) = \sum_0^\infty a_m r^m e^{im\theta}, \quad g(z_0 + re^{-i\theta}) = \sum_0^\infty b_n r^n e^{-in\theta}$$

deci (aceste serii fiind absolut convergente)

$$f(z_0 + re^{i\theta})\, g(z_0 + re^{-i\theta}) = \sum_0^\infty c_p r^p, \tag{46}$$

unde

$$c_p = \sum_{m+n=p} a_m b_n e^{i(m-n)\theta},$$

şi

$$|c_p| \leqslant \sum_{m+n=p} |a_m b_n| = \gamma_p.$$

Seriile date fiind absolut convergente pentru $|z| = r < R$, seriile $\sum_0^\infty |a_m| r^m$ şi $\sum_0^\infty |b_n| r^n$ sînt convergente, şi tot aşa produsul Cauchy al lor, care este $\sum_0^\infty \gamma_p r^p$. Cum $|c_p| \leqslant \gamma_p$, urmează (criteriul lui Weierstrass) că seria (46) este uniform convergentă cu privire la θ în intervalul $[0,2\pi]$. Avem deci dreptul s-o integrăm termen cu termen în acest interval. Acum

$$\int_0^{2\pi} c_p \, d\theta = \sum_{m+n=p} \int_0^{2\pi} a_m b_n e^{i(m-n)\theta} \, d\theta,$$

iar

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-n)\theta} \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{pentru } m \neq n, \\ 2\pi & \text{pentru } m = n; \end{cases}$$

deci

$$\int_0^{2\pi} c_p \, d\theta = \begin{cases} 0 & \text{pentru } p \text{ impar}, \\ 2\pi a_n b_n & \text{pentru } p = 2n. \end{cases}$$

Astfel

$$\int_0^{2\pi} \sum_0^\infty c_p r^p \, d\theta = \sum_0^\infty 2\pi a_n b_n r^{2n}$$

şi *formula lui Parseval* este stabilită.

Luînd în formula aceasta $\bar{f} = g$ ($b_n = \bar{a}_n$) şi observînd că $\bar{f}(z_0 + re^{-i\theta})$ este conjugat cu $f(z_0 + re^{i\theta})$, obţinem:

$$\sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|^2 \, d\theta. \tag{47}$$

b) Să presupunem că, în cercul $|z - z_0| < R$, unde seria dată este convergentă, avem $|f(z)| < M$ fix. Atunci integrala din (47) este $\leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi \cdot M^2$ adică $\leqslant M^2$ şi avem

$$\sum_0^\infty |a_n|^2 r^{2n} \leqslant M^2, \text{ pentru } r < R.$$

Făcînd $r \to R$, obţinem *inegalitatea lui Gutzmer*:

$$\sum_0^\infty |a_n|^2 R^{2n} \leqslant M^2. \tag{48}$$

(Notînd cu s_n și S_n sumele parțiale ale seriilor precedente, avem $s_n \leqslant M^2$ și pentru $r \to R$, $S_n \leqslant M^2$, ceea ce arată că ultima serie este convergentă și are suma $\leqslant M^2$.)

c) **Teorema 1.** *Fie* $f(z) = \sum_0^\infty a_n (z - z_0)^n$ *în discul* $|z - z_0| < R$ *și* $|f(z)| < M$ *fix, în acest disc. Atunci are loc inegalitatea lui Cauchy:*

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{R^n}, \tag{49}$$

cu egalitate numai atunci cînd $f(z)$ *este de forma:*

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{M}{R^n} (z - z_0)^n \qquad \theta = const. \tag{49'}$$

Inegalitatea (49) rezultă imediat din (51): $|a_n|^2 R^{2n} \leqslant M^2$. Dacă avem egalitate, seria (48) reducîndu-se la acest termen, urmează că $a_\nu = 0$ pentru $\nu \neq m$ și $f(z) = a_n(z - z_0)^n$. Însă prin ipoteză $|a_n| = \frac{M}{R^n}$ deci $a_n = e^{i\theta} \frac{M}{R^n}$ ($a^{i\theta}$ fiind o constantă de modul 1). Astfel $f(z)$ are în acest caz forma (49').

Observație. Inegalitatea (49) se poate deduce și din formula cunoscută:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)\, dt}{(t - z_0)^{n+1}}$$

Γ fiind circumferința $|z - z_0| = r < R$. Ea dă în adevăr

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}$$

și făcînd $r \to R$ obținem (49). Dar de aici nu rezultă imediat precizarea referitoare la cazul egalității.

d) Din inegalitatea lui Cauchy vom deduce următoarea teoremă, cunoscută sub numele de *principiul maximului (modulului):*

Teorema 2. *Modulul unei funcții neconstante, olomorfă în domeniul* D, *nu este maxim nicăieri în* D.

Să presupunem, din contra, că $|f(z)|$ este maxim în punctul $z_0 \in D$ și fie $|f(z_0)| = M$, deci $|f(z)| \leqslant M$ într-un disc $|z - z_0| < R$, conținut în D. În acest disc $f(z)$ fiind olomorfă, este valabilă dezvoltarea tayloriană $f(z) = \sum_0^\infty a_n(z - z_0)^n$. După (49) ($n = 0$) trebuie să avem $|a_0| = |f(z_0)| \leqslant M$. Ori, în cazul nostru avem chiar $|a_0| = M$, deci după teorema precedentă $f(z) = e^{i\theta} M = \text{const.}$, în discul precedent. De aici rezultă apoi $f(z) = \text{const.}$ în D (principiul identității) (cf. § 81, teorema 3).

Observație. Principiul maximului poate fi demonstrat direct în felul următor: fie Γ un cerc de rază $r < R$ și centru z_0. Avem

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(t)\, dt}{t - z_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta,$$

de unde

$$|f(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta.$$

Dacă $|f(z_0)| = M$ este maxim în cercul de rază R, urmează că $|f(z_0 + re^{i\theta})| = M$ (altfel membrul al doilea ar fi $< M$), deci $|f(z)| = M$ în discul $|z - z_0| < R$. De aici se conchide $f(z) = \text{const.}$ în acest disc (din condițiile lui Cauchy).

Consecință. Dacă $f(z)$ este olomorfă în D și continuă în $\bar{D}$, $|f(z)|$ este maxim pe fr D.

Aplicînd teorema precedentă funcției $\dfrac{1}{f(z)}$, care este olomorfă în D dacă $f(z)$ este olomorfă și nenulă, obținem un rezultat analog (*principiul minimului*):

Teorema 3. *Modulul unei funcții neconstante și nenule, olomorfă într-un domeniu D, nu este minim nicăieri în D.*

Bineînțeles, dacă funcția se anulează în D., teorema nu este adevărată (modulul avînd valoarea minimă 0).

Observație. Teoremele precedente au o interpretare geometrică foarte simplă, în planul (w). Dacă admitem că punctul $w = f(z)$ descrie un domeniu E cînd punctul z descrie domeniul D (ceea ce se va demonstra mai departe), atunci principiul maximului spune că distanța punctului w la origine nu este maximă în E. Evident, dacă $w_0 \in E$, într-o vecinătate $V_{w_0} \subset E$, există puncte avînd distanța la origine mai mare decît a punctului w_0.

Principiul maximului are numeroase aplicații, dintre care unele pot fi prezentate chiar de pe acum.

e) **Lema lui Schwarz.** *Fie $f(z)$ olomorfă în discul $|z| < R$, unde $|f(z)| < M$ fix. Dacă $f(z)$ are în $z = 0$ un zero de multiciplitate $\geqslant m$, atunci avem în discul precedent:*

$$|f(z)| \leqslant \frac{M}{R^m} |z|^m; \tag{50}$$

mai mult, egalitatea într-un punct $z_1 \neq 0$ atrage egalitatea în tot discul, și $f(z)$ este atunci de forma

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{M}{R^m} z^m \qquad \theta = \text{const.} \tag{50'}$$

Cînd $m = 0$ (adică $f(z)$ nu are zero în origine, sau are un zero dar nu ținem seamă de el) enunțul precedent se confundă cu principiul maximului. Cînd însă $m \geqslant 1$ avem o precizare a acestui principiu: deoarece $\left|\dfrac{z}{R}\right| < 1$, inegalitatea (50) ne dă o aproximare mai bună a lui $|f(z)|$ în discul $|z| < R$.

Prin ipoteză, $|f(z)| < M$ și

$$f(z) = z^m \varphi(z) \qquad \text{pentru } |z| < R$$

cu $\varphi(z)$ olomorfă. De aici urmează că, pe circumferința $|z| = r < R$, avem

$$|\varphi(z)| < \frac{M}{r^m}. \tag{51}$$

După principiul maximului, această inegalitate este adevărată chiar pentru $|z| \leqslant r$. (Căci $|\varphi(z)|$ își atinge maximul pe circumferința acestui disc.) Ținînd fix pe z și făcînd $r \to R$, urmează

$$|\varphi(z)| \leqslant \frac{M}{R^m} \tag{52}$$

(deoarece inegalitatea (51) rămîne valabilă cînd r creşte).
Înlocuind apoi $|\varphi(z)| = \left|\frac{f(z)}{z^m}\right|$ obţinem (50).

În (50) avem egalitate cînd $z = 0$. Dacă însă $|f(z_1)| = \frac{M}{R^m}|z_1|^m$ pentru $z_1 \neq 0$, adică $|\varphi(z_1)| = \frac{M}{R^m}$, aceasta înseamnă după (52), că $|\varphi(z)|$ este maxim în z_1. Atunci, după principiul maximului, $\varphi(z)$ este o constantă şi anume: $\varphi(z) = e^{i\theta}\frac{M}{R^m}$ (θ = const.); deci $f(z)$ este de forma (50').

Observaţie. Lema lui Schwarz poate fi aplicată în general unei funcţii $f(z)$ olomorfă într-un disc $|z - z_0| < R$ şi care ia în z_0 valoarea $f(z_0)$ cu o multiplicitate $\geqslant m$: se va înlocui z cu $z - z_0$ şi $f(z)$ cu $f(z) - f(z_0)$.

f) Vom face acum o aplicaţie importantă a lemei lui Schwarz. Am văzut că, fiind date două domenii circulare sau semiplane D şi E, le putem face să se corespundă biunivoc printr-o transformare liniară, care depinde de trei parametri reali; şi aceste transformări sînt conforme. Se pune chestiunea dacă pot exista şi alte corespondenţe biunivoce şi conforme între domeniile D şi E. Răspunsul este negativ.

Într-adevăr, fie T o reprezentare conformă a lui D pe E, care este biunivocă, aşa că T^{-1}, care aplică E pe D este tot o reprezentare conformă. Fie $z_0 \in D$ şi $z_0' \in E$ două puncte corespunzătoare. Cu nişte transformări liniare S şi S_1 vom duce domeniile D şi E în discul $|z| < 1$ şi totodată punctele z_0 şi z_0' în punctul $z = 0$. Transformarea $S^{-1}TS_1 = T_1$ este biunivocă şi conformă, şi duce discul $|z| < 1$ în el însuşi păstrînd punctul $z = 0$, şi tot aşa inversa ei. Dacă vom arăta că T_1 este o transformare liniară, va rezulta că şi $T = ST_1S_1^{-1}$ este liniară. Or, fie $z' = f(z)$ ecuaţia transformării T_1; $f(z)$ este o funcţie olomorfă în discul $|z| < 1$, unde $|f(z)| < 1$ şi $f(0) = 0$. (Căci T_1 duce $z = 0$ în $z' = 0$ şi orice punct al discului într-un punct al discului.) Putem deci aplica lema lui Schwarz cu $R = 1$, $m = 1$ şi $M = 1$; ea ne dă

$$|f(z)| \leqslant |z|$$

sau $|z'| \leqslant |z|$ pentru orice pereche de puncte corespunzătoare relativ la T_1. Considerînd inversa lui T_1, avem deasemeni $|z| \leqslant |z'|$, deci $|z'| = |z|$. Acum lema lui Schwarz ne asigură că $z' = e^{i\theta}z$ (θ = const.), cu alte cuvinte T_1 este o rotaţie, şi prin urmare T o transformare liniară. Aşadar:

Teorema 4. *Singurele reprezentări conforme biunivoce ale unui domeniu circular sau semiplan pe un domeniu analog sînt cele liniare.*

CURBELE DE NIVEL. INEGALITATEA LUI LINDELÖF

a) Am numit *curbă de nivel* (de modul constant) pentru o funcţie neconstantă şi olomorfă $f(z)$, locul punctelor în care $|f(z)| = \lambda$ (constantă); o vom nota cu C_λ. Cînd $\lambda = 0$, C_0 este mulţimea punctelor unde $f(z) = 0$, care este o mulţime izolată; vom exclude acest caz.

Dacă $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, o curbă de nivel este reprezentată de ecuaţia

$$F(x, y) = u(x, y)^2 + v(x, y)^2 = \lambda^2.$$

În domeniul de olomorfie D funcția $F(x, y)$ este continuă și are derivate continue de orice ordin, deci avem de-a face cu o curbă în sensul geometriei diferențiale. Punctele multiple ale curbei C_λ sînt date de $F_x = 0$ și $F_y = 0$, sau

$$uu_x + vv_x = 0, \quad uu_y + vv_y = 0.$$

Cum, pe curbă, u și v nu se pot anula simultan (fiindcă am presupus $\lambda > 0$), urmează că un punct multiplu este caracterizat prin condiția

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0 \text{ sau } f'(z) = 0.$$

Așadar: Punctele multiple ale curbei de nivel C_λ sînt acelea unde $|f(z)| = \lambda$ și $f'(z) = 0$. (Sînt deci punctele unde reprezentarea $w = f(z)$ nu este conformă.)

Exemple: 1. $f(z) = \dfrac{z - a}{z - b}$. *Curbele de nivel sînt cercurile care admit perechea simetrică* a, b.

2. $f(z) = (z - a)(z - b)(a \neq b)$. *Curbele de nivel sînt curbe ovale printre care aceea care corespunde la* $f'(z) = 0$, $z = \dfrac{a + b}{2}$, $\lambda = \dfrac{1}{4}|a - b|^2$ *are un punct dublu (este o lemniscată)* (fig. 95).

b) Să considerăm încă mulțimea punctelor din D, în care $|f(z)| < \lambda$ $(\lambda > 0)$; o vom nota cu D_λ.

Este o mulțime deschisă. Căci dacă $z_0 \in D_\lambda$, există în virtutea continuității o vecinătate U_{z_0} în care $|f(z)| < \lambda$, deci $U_{z_0} \subset D$.

Curba de nivel C_λ este frontiera mulțimii D_λ în D (adică $C_\lambda = D \cap \text{fr } D_\lambda$).

Într-adevăr, fie $\zeta \in D \cap \text{fr } D_\lambda$. Evident, $|f(\zeta)| \geqslant \lambda$, dar $|f(\zeta)| > \lambda$ este exclus pentru că am avea $|f(z)| > \lambda$ și într-o vecinătate U_ζ, și ζ ar fi exterior pentru D_λ. Deci $|f(\zeta)| = \lambda$, adică $\zeta \in C_\lambda$. Invers, fie $\zeta \in C_\lambda$. Orice $U_\zeta \subset D$ conține puncte din D_λ, căci altminteri am avea în acea vecinătate $|f(z)| \geqslant \lambda$ și $|f(z)|$ ar fi minim în $z = \zeta$ fără a se anula (contrar principiului minimului). Deci $\zeta \in \text{fr } D_\lambda$.

Cum se știe, mulțimea deschisă D_λ se descompune în domenii.

Dacă o componentă a lui D_λ are toată frontiera sa în D, atunci acea componentă conține măcar un zero al lui $f(z)$. Căci, în componenta închisă, $|f(z)|$ nu poate fi minim pe frontieră (unde $|f(z)| = \lambda$) și prin urmare minimul este atins într-un punct interior; acolo, după principiul minimului, $f(z)$ se anulează.

Aceasta se întîmplă cu toate componentele lui D_λ atunci cînd $f(z)$ fiind continuu în $\bar{D}$, λ este mai mic decît minimul m al lui $|f(z)|$ pe fr D. Atunci $C_\lambda \subset D$ și se descompune în curbe închise, care limitează componentele lui D_λ. Numărul acestor componente este cel mult egal cu numărul zerourilor lui $f(z)$ în D.

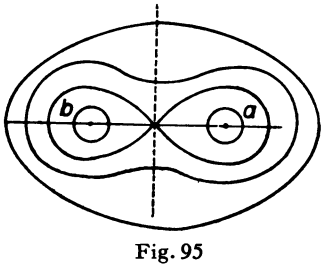

Fig. 95

În particular, dacă $f(z)$ are un singur zero în D și $\lambda < m$, D_λ este un domeniu și $\bar{D}_\lambda \subset D$.

Invers, fie Γ o curbă de nivel simplă și închisă, în domeniul mărginit D. Atunci interiorul ei conține cel puțin un zero al lui $f(z)$.

Într-adevăr, dacă pe Γ avem $|f(z)| = \lambda$, în interiorul lui Γ vom avea $|f(z)| < \lambda$ (principiul maximului); și, ca mai sus, minimul lui $|f(z)|$ în acest domeniu va avea loc într-un zero al lui $f(z)$.

c) **Teorema 5.** (*Lindelöf*). *Fie $f(z)$ o funcție olomorfă în domeniul D, ale cărei valori se află în domeniul E, și în particular $w_0 = f(z_0)$. Fie apoi $\varphi(z)$ o funcție olomorfă în D și continuă în $\bar{D}$, satisfăcînd condițiile $\varphi(z_0) = 0$ și $|\varphi(z)| = 1$ pe fr D; $\psi(w)$ o funcție cu aceleași proprietăți relativ la domeniul E și punctul w_0. Mai presupunem că z_0 este singurul zero al lui $\varphi(z)$ și este simplu. În aceste condiții avem*

$$|\psi(f(z))| \leqslant |\varphi(z)| \qquad \text{în } D. \tag{53}$$

Mai general, dacă $z_1, \ldots, z_n$ sînt puncte din D, în care $f(z)$ ia valoarea w_0, și $\varphi_0(z), \ldots, \varphi_n(z)$ sînt funcții cu proprietățile lui $\varphi(z)$ relativ la aceste puncte, avem

$$|\psi(f(z))| \leqslant |\varphi_0(z) \ldots \varphi_n(z)| \qquad \text{în } D. \tag{53'}$$

Prin ipoteză $|\varphi(z)| = 1$ pe fr D și în consecință $|\varphi(z)| < 1$ în D (principiul maximului).

Vom considera funcția $\chi(z) = \dfrac{\psi(f(z))}{\varphi(z)}$, care este olomorfă în D. Într-adevăr, termenii raportului sînt funcții olomorfe ($f(z)$ luînd valorile sale în E, unde $\psi(w)$ este olomorfă) și $\varphi(z) \neq 0$ cu excepția punctului z_0, unde are un zero simplu; dar în acest punct se anulează și $\psi(f(z))$, căci $\psi(f(z_0)) = \psi(w_0) = 0$ prin ipoteză, așa că $\chi(z)$ este olomorfă chiar și în z_0. [$\chi(z)$ este de forma

$$\chi(z) = \frac{(z - z_0)\,\psi_1(z)}{(z - z_0)\,\varphi_1(z)} = \frac{\psi_1(z)}{\varphi_1(z)}$$

într-o vecinătate U_{z_0} unde $\psi_1(z)$ și $\varphi_1(z)$ sînt olomorfe și $\varphi_1(z_0) \neq 0$].

Fie acum $0 < \lambda < 1$ și D_λ mulțimea definită prin $|\varphi(z)| < \lambda$. Deoarece $\varphi(z)$ are un singur zero în D, D_λ este, cum am văzut mai sus, un domeniu avînd ca frontieră curba C_λ definită prin $|\varphi(z)| = \lambda$, și conținut în D împreună cu frontiera C_λ. Pe această frontieră avem

$$|\chi(z)| = \left|\frac{\psi(f(z))}{\varphi(z)}\right| < \frac{1}{\lambda} \tag{54}$$

pentru că în E, $|\psi(w)| < 1$ (principiul maximului) și deci în D, $|\psi(f(z))| < 1$. Cum maximul lui $|\chi(z)|$ are loc pe frontieră, inegalitatea este valabilă și în D_λ. Ținînd pe z fix ($z \in D$), această inegalitate are deci loc pentru orice λ care satisface $|\varphi(z)| < \lambda < 1$. Făcînd acum $\lambda \to 1$, obținem $|\chi(z)| \leqslant 1$, adică (53).

În cazul general avem la fel:

$$|\chi(z)| = \left|\frac{\psi(f(z))}{\varphi_1(z) \ldots \varphi_n(z)}\right| < \frac{1}{\lambda^n} \qquad \text{în } D_\lambda,$$

de unde se deduce (53') făcînd $\lambda \to 1$.

Demonstrația subsistă și atunci cînd punctele $z_1, \ldots, z_n$ nu sînt distincte. De exemplu dacă toate aceste puncte se confundă, w_0 este o valoare n-uplă a funcției $f(z)$ și z_1 un zero n-uplu pentru $\psi(f(z))$, așa că funcția $\chi(z)$ este olomorfă în z_1. Atunci (53') se scrie:

$$|\psi(f(z))| \leqslant |\varphi(z)|^n.$$

Corolar. *Dacă în (53') avem egalitate într-un punct diferit de* $z_1, \ldots, z_n$, *avem egalitate în tot domeniul* D *și*

$$\psi(f(z)) = e^{i\theta}\varphi_0(z) \ldots \varphi_n(z) \qquad cu\ \theta = const.$$

Căci în acel punct $|\chi(z)| = 1$ este maxim și prin urmare $\chi(z) = e^{i\theta}$ ($\theta = \text{const.}$)

Observație. Din (53) rezultă în D_λ: $|\psi(f(z))| \leqslant |\varphi(z)| < \lambda$, ceea ce înseamnă că, atunci cînd z parcurge domeniul D_λ, $(0 < \lambda < 1)$, $w = f(z)$ rămîne în mulțimea E_λ definită prin $|\psi(w)| < \lambda$. În felul acesta inegalitatea lui Lindelöf ne dă o limitare a valorilor lui $f(z)$ depinzînd de poziția lui z față de curbele de nivel ale funcției $\varphi(z)$. (E_λ este tot un domeniu dacă w_0 este singurul zero al lui $\psi(w)$ și este simplu.) (fig. 96).

d) Pentru a aplica teorema precedentă la cazul cel mai simplu vom presupune că D este discul $|z| < R$ și fie $M = \sup |f(z)|$; așa că putem lua pentru E discul $|w| < M$. O funcție $\varphi(z)$ care împlinește condițiile teoremei este (vezi § 42):

$$\varphi(z) = \frac{R(z - z_0)}{R^2 - z\bar{z}_0}$$

căci ea duce discul $|z| < R$ în discul $|\varphi| < 1$ și z_0 în $\varphi = 0$; apoi este olomorfă în primul disc (punctul $\frac{R^2}{\bar{z}_0}$, simetric cu z_0, fiind în afara cercului) și nu are decît un zero simplu în z_0. La fel putem lua

$$\psi(w) = \frac{M(w - w_0)}{M^2 - w\bar{w}_0}.$$

Inegalitatea (56) se scrie acum:

$$\left|\frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}\right| \qquad \text{în } |z| < R \tag{55}$$

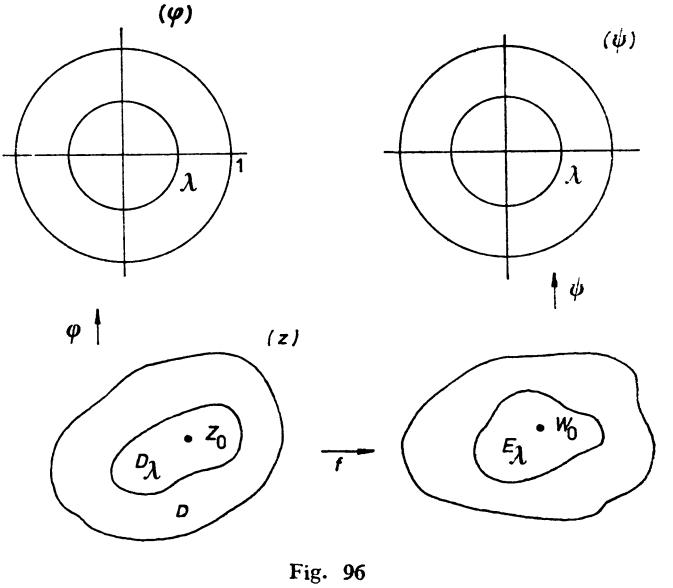

Fig. 96

și avem egalitatea într-un punct $\neq z_0$ numai dacă

$$\frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)} = e^{i\theta} \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z},$$

ceea ce înseamnă că $w = f(z)$ duce discul D în discul E.

În cazul de față D_λ și E_λ sînt discurile:

$$\left| \frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z} \right| < \lambda, \quad \left| \frac{M(w - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 w} \right| < \lambda,$$

care se corespund astfel că, atunci cînd z descrie primul disc, $w = f(z)$ rămîne în al doilea. Scriind ecuația circumferinței C_λ sub forma

$$\frac{R}{|z_0|} \left| \frac{z - z_0}{z - \frac{R^2}{\bar{z}_0}} \right| = \lambda,$$

se vede că ea este locul punctelor ale căror distanțe la punctele z_0 și $\frac{R^2}{\bar{z}_0}$ sînt în raportul $\frac{\lambda}{R} |z_0|$. Circumferințele C_λ constituie deci un fascicol de specia a doua, admițînd perechea simetrică comună formată din punctele precedente. La fel circumferințele din planul (w), perechea simetrică fiind $w_0, \frac{M^2}{\bar{w}_0}$ și raportul constant $\frac{\lambda}{M} |w_0|$.

Cele de mai sus ne dau o soluție a problemei: să se determine o vecinătate U_{z_0} în care $|f(z) - w_0| < \varepsilon$ (dat). O asemenea vecinătate va fi domeniul D_λ dacă domeniul corespunzător E_λ este conținut în discul $|w - w_0| < \varepsilon$. Cel mai mare E_λ cu această proprietate va fi evident tangent cercului precedent în punctul său cel mai apropiat de origine. Ținînd seama de observația de adineaori, avem pentru acest E_λ:

$$\frac{\varepsilon}{\frac{M^2}{|w_0|} - (|w_0| - \varepsilon)} = \frac{\lambda}{M} |w_0|,$$

de unde

$$\lambda = \frac{M\varepsilon}{M^2 - |w_0|^2 + \varepsilon |w_0|}.$$

Condiția $0 < \lambda < 1$ mai cere $(M - |w_0|)(M + |w_0| - \varepsilon) > 0$, adică $\varepsilon < M + |w_0|$. (Numai așa $E_\lambda \subset E$ și $D_\lambda \subset D$.) Dacă dorim ca U_{z_0} să fie un disc de centru z_0 și rază η, vom lua acest disc tangent la D_λ în punctul cel mai îndepărtat de origine, ceea ce ne dă

$$\frac{\eta}{\frac{R^2}{|z_0|} - (|z_0| + \eta)} = \frac{\lambda}{R} |z_0|,$$

de unde

$$\eta = \frac{\lambda(R^2 - |z_0|^2)}{R + \lambda |z_0|}$$

şi introducînd valoarea găsită pentru λ:

$$\eta = \frac{M(R^2 - |z_0|^2)\,\varepsilon}{R(M^2 - |w_0|^2 + \varepsilon|w_0|) + M\varepsilon|z_0|}.$$

O vecinătate de rază η_1 mai mică, dar de expresie mai simplă, se obţine majorînd numitorul lui η cu ajutorul condiţiei $\varepsilon < M + |w_0|$; se găseşte

$$\eta_1 = \frac{R - |z_0|}{M + |w_0|}\varepsilon.$$

Din (58) se deduce, făcînd $z_0 \to z$:

$$|f'(z)| \leqslant \frac{R}{M}\,\frac{M^2 - |f(z)|^2}{R^2 - |z|^2} \leqslant \frac{RM}{R^2 - |z|^2} \qquad (|z| < R),$$

o aproximaţie care devine foarte neprecisă cînd z se apropie de circumferinţa $|z| = R$.

e) Aplicînd în acelaşi mod inegalitatea (53') avem:

$$(55') \qquad \left|\frac{M[f(z) - w_0]}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{R(z - z_1)}{R^2 - \bar{z}_1 z}\right| \cdots \left|\frac{R(z - z_n)}{R^2 - \bar{z}_n z}\right| \qquad (|z| < R),$$

unde $f(z_1) = \ldots = f(z_n) = w_0$. În particular, dacă $w_0 = f(z_0)$ este o valoare n-uplă a funcţiei,

$$\left|\frac{M(f(z) - w_0)}{M^2 - \bar{w}_0 f(z)}\right| \leqslant \left|\frac{R(z - z_0)}{R^2 - \bar{z}_0 z}\right|^n \qquad (|z| < R),$$

cu egalitatea într-un punct $\neq z_0$ numai cînd funcţiile dintre bare diferă printr-un factor constant $e^{i\theta}$. Luînd aici $z_0 = 0$ şi $w_0 = 0$ obţinem din nou lema lui Schwarz.

f) Altă particularizare importantă a formulei (55') se capătă pentru $w_0 = 0$ şi $z = 0$. Aceasta este *inegalitatea lui Jensen*

$$(56) \qquad \prod_k \left|\frac{z_k}{R}\right| \geqslant \frac{|f(0)|}{M},$$

în membrul I figurînd zerourile lui $f(z)$ în cercul $|z| < R$, sau numai o parte din ele.

Cînd origina este un zero, această inegalitate nu ne dă nimic. Putem însă obţine şi în acest caz o inegalitate implicînd zerourile $z_k \neq 0$, făcînd apel la inegalitatea lui Schwarz. Anume, dacă $z = 0$, este un zero de multiplicitate p, putem scrie $f(z) = z^p f_1(z)$, unde $f_1(z)$ este olomorfă în $|z| < R$, şi nu se mai anulează în $z = 0$, dar are în restul discului aceleaşi zerouri ca $f(z)$. După lema lui Schwarz $|f(z)| \leqslant \frac{M}{R^p}|z|^p$, aşa că $|f_1(z)| \leqslant \frac{M}{R^p}$; (valabil şi în $z = 0$, cum se vede făcînd $z \to 0$). Prin urmare, dacă aplicăm inegalitatea (56) funcţiei $f_1(z)$ şi notăm

$$c = f_1(0) = \frac{1}{p!}f^{(p)}(0),$$

avem inegalitatea

$$(56') \qquad \prod_k \left|\frac{R}{z_k}\right| \leqslant \frac{M}{|c|R^p},$$

produsul întinzîndu-se la zerourile diferite de origine ale funcției $f(z)$ (sau numai la o parte din ele).

Vom observa că, în felul cum am dedus (56) și (56'), rezultă că un zero de multiplicitate m poate figura de m ori în produsul din membrul I.

Să mai observăm că numărul zerourilor z_k poate fi infinit. Ele formează atunci un șir infinit (fiind izolate) și inegalitatea (56') rămîne valabilă, cum se vede făcînd $k \to \infty$. (Vom avea deci în membrul I un produs infinit convergent.)

În acest caz (56') ne dă o informație cu privire la modul de creștere a numărului de zerouri cînd modulul lor $\to R$: zerourile fiind luate în ordinea modulilor nedescrescători, și $\mu(r)$ fiind numărul acelora de modul $\leqslant r < R$, avem

$$\prod_1^{\mu(r)} \left| \frac{R}{z_k} \right| < \frac{M}{|c| R^p}$$

(neglijînd în (56') factori > 1). Cum factorii produsului sînt $\geqslant \frac{R}{r}$, urmează

$$\left| \frac{R}{r} \right|^{\mu(r)} < \frac{M}{|c| R^p}.$$

Putem deci spune că numărul de zerouri $\mathcal{M}(r)$ nu crește mai repede decît $\dfrac{1}{\log \dfrac{R}{r}}$.

Pentru a mai face o aplicație a formulei lui Jensen, să o scriem pentru cercul $|z| < r < R$ $(r > 0)$. Notînd $\mathcal{M}(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, avem:

$$\prod_1^{\nu} \left| \frac{r}{z_k} \right| \leqslant \frac{\mathcal{M}(r)}{|c| r^p}$$

unde $z_1, \ldots, z_\nu$ sînt zerourile conținute în $|z| < r$ (și diferite de origine). Cum pentru celelalte zerouri $\left| \dfrac{r}{z_k} \right| \leqslant 1$, putem scrie:

$$\prod \left| \frac{r}{z_k} \right| \leqslant \frac{\mathcal{M}(r)}{|c| r^p}, \tag{56''}$$

unde produsul poate fi întins la toate zerourile diferite de origine ale lui $f(z)$. Această inegalitate în general este mai precisă decît (56'), căci dacă numărul zerourilor z_k este n, ea dă pentru R destul de mare

$$\prod \left| \frac{1}{z_k} \right| \leqslant \frac{\mathcal{M}(r)}{|c| r^{p+n}} < \frac{M}{|c| R^{p+n}},$$

deoarece, cum se va vedea în alt capitol, $\mathcal{M}(r)$ crește mai repede decît crește o o putere a lui r, dacă $f(z)$ nu este un polinom.

Exemple.

3. *Dacă $f(0) \neq 0$ și într-un disc $|z| \leqslant r$ funcția olomorfă $f(z)$ are un singur zero, avem $f(z) \neq 0$ în discul*

$$|z| < \frac{r f(0)}{\mathcal{M}(r)}.$$

Într-adevăr (56″) ne dă pentru acel zero $|z_1| \geqslant \dfrac{rf(0)}{\mathcal{M}(r)}$.

4. *Fie, în cercul* $|z| < 1$, $f(z)$ *olomorfă și* $\operatorname{Im} f(z) > 0$; $f(0) = u_0 + iv_0$. *Atunci*

$$\left|\frac{f(z) - w_0}{f(z) - \bar{w}_0}\right| \leqslant |z| \qquad \text{în } |z| < 1$$

și

$$\frac{1-r}{1+r} v_0 \leqslant \operatorname{Im} f(z) \leqslant \frac{1+r}{1-r} v_0 \qquad \text{în } |z| \leqslant r < 1.$$

Se observă că transformarea $w_1 = \dfrac{w - w_0}{w - \bar{w}_0}$ duce semiplanul $\operatorname{Im} w > 0$ în discul $|w_1| < 1$ (căci la $w = w_0, \bar{w}_0$ corespund $w_1 = 0$, $w_1 = \infty$ și la w real, $|w_1| = 1$). Deci, luînd $w = f(z)$, avem $|w_1| < 1$ și $w_1(0) = 0$. Astfel prima inegalitate se obține aplicînd lema lui Schwarz funcției $w_1(z)$. Pentru $|z| \leqslant r < 1$, aceeași inegalitate ne dă $|w_1(z)| \leqslant r$. La discul $|w_1| \leqslant r$, transformarea precedentă face să corespundă un disc Γ din planul (w), în care se va afla $w = f(z)$. Se vede că pentru $w_1 = \pm r$ se obțin punctele $\dfrac{w_0 \mp r\bar{w}_0}{1 \mp r}$, diametral opuse pe circumferința Γ. De aici se conchide și situația pe o paralelă la axa imaginară

$$\operatorname{Im} \frac{w_0 + r\bar{w}_0}{1+r} \leqslant \operatorname{Im} w \leqslant \operatorname{Im} \frac{w_0 - r\bar{w}_0}{1-r},$$

care este a doua inegalitate afirmată.

5. *Dacă* z_k *sînt zerouri ale funcției* $f(z)$ *în cercul de olomorfie* $|z| < R$, *avem*

$$|f(z)| \leqslant M \prod_k \left|\frac{R(z - z_k)}{R^2 - \bar{z}_k z}\right| \qquad \text{în } |z| < R,$$

cu egalitate într-un punct $z \neq z_k$ *numai cînd*

$$f(z) = e^{i\theta} M \prod \frac{R(z - z_k)}{R^2 - \bar{z}_k z} \qquad (\theta = \text{const.}).$$

Caz particular al inegalității (55′).

6. *Să se aplice teorema lui Lindelöf unei funcții* $f(z)$ *olomorfe în semiplanul* $\operatorname{Re} z > 0$. Se va lua

$$\varphi(z) = \frac{z_0 - z}{\bar{z}_0 + z} \qquad \psi(w) = \frac{M(w - w_0)}{M^2 - w_0 w}.$$

7. *În semiplanul* $\operatorname{Re} z > 0$, $f(z)$ *este olomorfă și* $\sup |f(z)| = M$. *Să se demonstreze că* z_k *fiind zerouri ale funcției în semiplan, avem*

$$|f(z)| \leqslant M \prod_k \left|\frac{z_k - z}{\bar{z}_k + z}\right| \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

FUNCȚIA $\mathcal{M}(r)$

a) fiind dată funcția $f(z)$ olomorfă într-o coroană $R_1 < |z| < R_2$, vom considera funcția de r:

$$\mathcal{M}(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|,$$

definită în intervalul $R_1 < r < R_2$.

Următoarea proprietate a acestei funcții se obține fără greutate:

Teorema 6. *Funcția* $\mathcal{M}(r)$ *este (strict) crescătoare și continuă.*

Într-adevăr, fie $r < r_1$ și z, z_1 puncte unde $f(z)$ este maxim pe circumferințele de raze r, r_1: $f(z) = \mathcal{M}(r)$, $f(z_1) = \mathcal{M}(r_1)$. După principiul maximului $|f(z)| < |f(z_1)|$, adică $\mathcal{M}(r) < \mathcal{M}(r_1)$.

Apoi, z_1 fiind definit la fel, există pentru $\varepsilon > 0$ dat, o vecinătate $|z - z_1| < \eta$ în care $|f(z) - f(z_1)| < \varepsilon$. Aceasta este intersectată de circumferințele $|z| = r < r_1$, dacă $r_1 - r < \eta$, și într-un punct de intersecție avem

$$|f(z)| > |f(z)_1| - \varepsilon,$$

deci

$$\mathcal{M}(r) > \mathcal{M}(r_1) - \varepsilon \qquad \text{pentru } 0 < r_1 - r < \eta.$$

Schimbînd r cu r_1, avem de asemenea

$$\mathcal{M}(r_1) > \mathcal{M}(r) - \varepsilon \qquad \text{pentru } 0 < r - r_1 < \eta,$$

așa că

$$|\mathcal{M}(r_1) - \mathcal{M}(r)| < \varepsilon \qquad \text{pentru } |r_1 - r| < \eta,$$

ceea ce dovedește continuitatea.

b) **Teorema celor 3 cercuri (Hadamard).** *Fie* $f(z)$ *olomorfă pentru* $\rho_1 \leqslant |z| \leqslant \rho_3$ *și* $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$. *Avem*

$$\mathcal{M}(\rho_2)^{\log \frac{\rho_3}{\rho_1}} \leqslant \mathcal{M}(\rho_1)^{\log \frac{\rho_3}{\rho_2}} \mathcal{M}(\rho_3)^{\log \frac{\rho_2}{\rho_1}}. \tag{57}$$

Considerăm în coroana precedentă, funcția $z^\lambda f(z)$, cu λ real. Maximul ei avînd loc pe frontiera coroanei, avem, considerînd valorile de pe circumferința $|z| = \rho_2$:

$$\rho_2^\lambda \mathcal{M}(\rho_2) \leqslant \max \{\rho_1^\lambda \mathcal{M}(\rho_1), \ \rho_3^\lambda \mathcal{M}(\rho_3)\},$$

cu egalitate numai cînd $z^\lambda f(z) = c$ (const.), sau $f(z) = c\, z^{-\lambda}$. Determinăm pe λ prin condiția

$$\rho_1^\lambda \mathcal{M}(\rho_1) = \rho_3^\lambda \mathcal{M}(\rho_3),$$

de unde

$$\lambda = -\frac{\log \dfrac{\mathcal{M}(\rho_3)}{\mathcal{M}(\rho_1)}}{\log \dfrac{\rho_3}{\rho_1}}.$$

Inegalitatea precedentă se scrie acum:

$$\mathcal{M}(\rho_2) \leqslant \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{-\lambda} \mathcal{M}(\rho_1),$$

sau ridicînd la puterea $\log \dfrac{\rho_3}{\rho_1}$.

$$\mathcal{M}(\rho_2)^{\log \frac{\rho_3}{\rho_1}} \leqslant \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{\log \frac{\mathcal{M}(\rho_3)}{\mathcal{M}(\rho_1)}} \mathcal{M}(\rho i)^{\log \frac{\rho_2}{1}} = \left(\frac{\mathcal{M}(\rho_3)}{\mathcal{M}(\rho_1)}\right)^{\log \frac{\rho_2}{\rho_1}} \mathcal{M}(\rho_1)^{\log \frac{\rho_3}{\rho_1}} =$$

$$= (\rho_1) \mathcal{M}^{\log \frac{\rho_3}{\rho_2}} \mathcal{M}(\rho_3)^{\log \frac{\rho_2}{\rho_1}}.$$

Observații 1. Egalitatea este exclusă dacă $f(z)$ nu este de forma cz^{λ},

2. Inegalitatea lui Hadamard spune că $\log \mathcal{M}(r)$ este o funcție *convexă* de $\log r$.

O funcție $F(x)$ reală se zice *convexă* dacă curba $y = F(x)$, în orice interval (x_1, x_2), rămîne sub coarda ce unește punctele curbei corespunzătoare extremităților intervalului. Scriind că paralela la axa y-lor de abscisă x taie coarda într-un punct de ordonată mai mare decît $y = F(x)$, obținem condiția

$$F(x) < \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} F(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} F(x_2) \tag{58}$$

care trebuie să fie verificată pentru fiecare ternă de valori $x_1 < x < x_2$ (în intervalul de definiție al funcției). Funcția este convexă în sens larg dacă în condițiile precedente poate avea loc și egalitate.

Inegalitatea lui Hadamard fiind scrisă

$$\log \mathcal{M}(\rho_2) \leqslant \frac{\log \rho_3 - \log \rho_2}{\log \rho_3 - \log \rho_1} \log \mathcal{M}(\rho_1) + \frac{\log \rho_2 - \log \rho_1}{\log \rho_3 - \log \rho_1} \log \mathcal{M}(\rho_2).$$

exprimă că $\log \mathcal{M}(\rho)$ este o funcție convexă de $\log \rho$, (în sens strict, dacă $f(z)$ nu este de forma $c z^{\lambda}$).

3. O funcție convexă este continuă. Într-adevăr, făcînd $x \to x_1$ în (58) se obține $F(x_1 + 0) \leqslant F(x_1)$, și în general $F(x + 0) \leqslant F(x)$. Făcînd $x_2 \to x$, se obține $F(x) \leqslant F(x + 0)$. Deci $F(x) = F(x + 0)$. La fel se arată că $F(x - 0) = F(x)$.

Așa dar, $\mathcal{M}(r)$ este o funcție continuă de $\log r$, și deci $\mathcal{M}(r)$ o funcție continuă de r.

4. Printre funcțiile convexe se află acelea care admit derivată secundă pozitivă. Într-adevăr, din $F''(x) > 0$ urmează $F'(x)$ crescătoare și de aici

$$\frac{1}{x - x_1} \int_{x_1}^{x} F'(t)\, dt < F'(x) < \frac{1}{x_2 - x} \int_{x}^{x_2} F'(t)\, dt$$

sau

$$\frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} < \frac{F(x_2) - F(x)}{x_2 - x},$$

care este o altă formă a inegalității (58). [Ea spune că raportul incrementar $\frac{F(x) - F(x')}{x - x'}$ este mai mare la dreapta ($x' > x$), decît la stînga lui x ($x' < x$).]

5. Dacă punem în (58) $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ avem

$$F\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{1}{2} [F(x_1) + F(x_2)].$$

Această inegalitate se ia ca definiție a unei noțiuni mai generale de convexitate.

c) Dacă $f(z)$ este o funcție olomorfă într-un cerc $|z| < R$, din faptul că $\mathrm{Re} f(z)$ este mărginită nu se poate deduce că și $|f(z)|$ este mărginit. Astfel, pentru $f(z) = i \log_0(1 + z)$ în discul $|z| < 1$, avem $\mathrm{Re} f = -\arg_0(1 + z)$

mărginit în intervalul $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, în timp ce $|f(z)|$ nu este mărginit, însă se poate afirma că $|f(z)|$ este mărginit într-un cerc $|z| \leqslant r < R$. Mai precis:

Teorema 7. (*Carathéodory*). *Dacă $f(z)$ este olomorfă în cercul $|z| < R$, avem*

$$\mathcal{M}(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r}\left[\sup_{|z|<R} \operatorname{Re} f(z) + |f(0)|\right] \text{ pentru } r < R. \tag{59}$$

Presupunem întîi $f(0) = 0$ și considerăm funcția

$$\varphi(z) = \frac{f(z)}{2U - f(z)}$$

unde $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ și $U = \sup_{|z|<R} u$. Deoarece $f(0) = 0$, $U > 0$. Mai observăm că funcția $u(x, y)$ nu poate fi maximă în $|z| < R$, pentru că nici $|e^{f(z)}| = e^{u(x,y)}$ nu poare fi. Deci $u(x, y) < U$ în discul $|z| < R$. Din aceste două proprietăți ale lui U rezultă că numitorul lui $\varphi(z)$ nu se poate anula, partea sa reală fiind > 0, și prin urmare această funcție este olomorfă. Evident $\varphi(0) = 0$. În sfîrșit avem

$$|\varphi(z)|^2 = \frac{u^2 + v^2}{(2U - u)^2 + v^2} < 1,$$

căci accasta revine la $4U(U - u) > 0$. Putem deci conchide, aplicînd lema lui Schwarz: $|\varphi(z)| < \frac{|z|}{R}$, de unde

$$|f(z)| = \left|\frac{2U\varphi(z)}{1 - \varphi(z)}\right| \leqslant \frac{2U|z|}{R - |z|} \qquad |z| < R$$

și luînd maximul pe circumferința $|z| = r < R$:

$$\mathcal{M}(r) \leqslant \frac{2Ur}{R-r} < \frac{R+r}{R-r} U \qquad (r < R),$$

adică (59) pentru $f(0) = 0$.

Dacă $f(0) \neq 0$, vom aplica rezultatul precedent funcției $f(z) - f(0)$:

$$|f(z) - f(0)| \leqslant \frac{2|z|}{R - |z|} \sup_{|z|<R} \operatorname{Re}[f(z) - f(0)] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2|z|}{R - |z|}\left[\sup_{|z|<R} \operatorname{Re} f(z) + |f(0)|\right],$$

de unde

$$|f(z)| \leqslant \frac{2|z|}{R - |z|}\left[\sup_{|z|<R} \operatorname{Re} f(z) + |f(0)|\right] + |f(0)| =$$

$$= \frac{2|z|}{R - |z|} \sup_{|z|<R} \operatorname{Re} f(z) + \frac{R + |z|}{R - |z|}|f(0)|,$$

de unde rezultă (59) ca mai sus.

Observație. Înlocuind $f(z)$ prin $-f(z)$ sau $\mp i f(z)$ se vede că inegalitatea (59) are loc la fel și cu $-\inf \operatorname{Re} f(z)$, $\sup \operatorname{Im} f(z)$ și $-\inf \operatorname{Im} f(z)$.

Inegalitatea (59) se poate extinde și la derivatele lui $f(z)$.

Teorema 8. *În aceleași condiții ca în teorema precedentă avem*

$$\max_{|z|=r} |f^{(n)}(z)| \leqslant \frac{2^{n+2}\, n!\, R}{(R-r)^{n+1}} [\sup_{|z|<R} \operatorname{Re} f(z) + |f(0)|]. \tag{59'}$$

Aceasta se va obține cu ajutorul formulei lui Cauchy:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}\, dt,$$

unde Γ este circumferința de centru z și rază $\frac{1}{2}(R-r)$. Avem pe Γ

$$|t| \leqslant r + \frac{1}{2}(R-r) = \frac{1}{2}(R+r),$$

și aplicînd (59) circumferinței de rază $\frac{1}{2}(R+r)$:

$$\max |f(t)| < \frac{4R}{R-r} [\sup_{|z|<R} \operatorname{Re} f(z) + |f(0)|]$$

(59') urmează din formula lui Cauchy cu ajutorul inegalității precedente.

Observație. (59') este valabilă și pentru funcția $f(z)$, $(n = 0)$.

§ 84. Seria lui Laurent

Teorema 1. *Dacă $f(z)$ este olomorfă într-o coroană $R_1 < |z - z_0| < R_2$, avem acolo*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ cu } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(t)\, dt}{(t - z_0)^{n+1}} \tag{60}$$

Γ fiind un cerc oarecare de centru z_0, în acea coroană, și seria este uniform convergentă în orice coroană interioară precedentei.

Avem (§ 76, observația 3) în orice coroană (Γ_1', Γ_2') de centru z_0 și conținută în cea dată (Γ_1, Γ_2) dimpreună cu Γ_1', Γ_2':

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2'} \frac{f(t)\, dt}{t - z} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1'} \frac{f(t)\, dt}{z - t}$$

(Γ_2' cercul exterior). Raționamentul de la § 81, teorema 1, se aplică primei integrale și ne dă

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2'} \frac{f(t)\, dt}{t - z} = \sum_{0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ cu } a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2'} \frac{f(t)\, dt}{(t - z_0)^{n+1}}. \tag{61}$$

Transformăm apoi a doua integrală scriind

$$\frac{1}{z - t} = \frac{1}{z - z_0} \sum_{1}^{\infty} \left(\frac{t - z_0}{z - z_0} \right)^{n-1},$$

serie uniform convergentă pe Γ_1', pentru că modulul termenului general este $\frac{1}{|z-z_0|}\left|\frac{R_1'}{z-z_0}\right|^{n-1}$ (independent de t şi dînd naştere unei serii convergente). Urmează în acelaşi mod

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'}\frac{f(t)\,dt}{z-t}=\sum_{1}^{\infty}b_n(z-z_0)^{-n}\text{ cu }b_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'}(t-z_0)^{n-1}f(t)\,dt.$$

Punînd pentru uniformitate $b_n=a_{-n}$, mai putem scrie

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'}\frac{f(t)\,dt}{z-t}=\sum_{-\infty}^{-1}a_n(z-z_0)^n\text{ cu }a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1'}\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}. \tag{62}$$

(60) rezultă acum adunînd (61) cu (62) şi observînd că în expresiile coeficienţilor $a_n(n\geqslant 0$, şi $n<0)$, cercurile Γ_2', Γ_1' se pot înlocui cu un cerc Γ oarecare în (Γ_1', Γ_2') şi deci în coroana dată (§ 74, teorema 3). Rămîne să observăm că seria de puteri pozitive este uniform convergentă în Γ_2' (ca orice serie de puteri pozitive), cea de puteri negative (deci de puterile pozitive ale lui $(z-z_0)^{-1}$) este uniform convergentă în exteriorul lui Γ_1'. Deci (60) este uniform convergentă în (Γ_1', Γ_2').

Observaţia 1. Dacă $f(z)$ este olomorfă şi în $\overline{\Gamma_1}$, deci în Γ_2, avem $a_n=0$ pentru $n<0$, integrandul din (60) fiind olomorf în Γ şi (60) se reduce la dezvoltarea tayloriană în jurul punctului z_0.

Pe de altă parte, dacă $f(z)$ este olomorfă şi în $\overline{\text{ext }\Gamma_2}$ inclusiv ∞, deci în ext Γ_1, avem $a_n=0$ pentru $n>0$. Într-adevăr, făcînd substituţia $t-z_0=\frac{1}{t'}$ avem dreptul să scriem

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'}f\left(z_0+\frac{1}{t'}\right)t'^{n-1}dt',$$

unde Γ' e cercul $|t'|=\frac{1}{R}$ (R fiind raza lui Γ) (se va observa că substituţia schimbă sensul pe drumul de integrare); or, pentru $n>0$ integrandul este olomorf prin ipoteză în $\overline{\Gamma'}$. Astfel în acest caz avem o dezvoltare în ∞. Seria Laurent are interes cînd nu se prezintă nici una din aceste circumstanţe, adică cercurile Γ_1, Γ_2 sau cele două regiuni exterioare coroanei conţin puncte singulare (ori regiuni în care f nu este definit).

Observaţia 2. Dezvoltarea Laurent este unică de felul ei, într-o coroană (Γ_1, Γ_2) unde $f(z)$ este olomorfă.

Într-adevăr, fie $f(z)=\sum_{-\infty}^{\infty}a_m(z-z_0)^m$ în acea coroană, iar Γ un cerc de centru z_0. În coroană avem

$$\frac{f(t)}{(t-z_0)^{n+1}}=\sum_{-\infty}^{\infty}a_m(t-z_0)^{m-n-1}$$

în (Γ_1, Γ_2) şi seriile parţiale $m>n$, $m\leqslant n$ sînt uniform convergente pe Γ (prima fiind astfel în Γ_2, iar a doua în ext Γ_1). Deci putem scrie

$$\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{a_m}{2\pi i}\int_{\Gamma}(t-z_0)^{m-n-1}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

În membrul I termenii cu $m \neq n$ sînt nuli și rămîne

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{(t-z_0)^{n+1}}.$$

Seria dată este deci aceea a lui Laurent.

Observația 3. Am văzut că seria (60) se poate deriva termen cu termen în coroana de convergență (§ 78, teorema 2 sau § 79, teoremele 2 și 3). Astfel avem și pentru $f'(z)$ dezvoltarea Laurent

$$f'(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} n\, a_n (z-z_0)^{n-1}.$$

Teorema 2. *Dacă* $f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *într-o coroană* (Γ_1, Γ_2) *și* $\mathcal{M}(r) = \max |f(z)|$ *pe un cerc* Γ *din coroană, avem*

$$|a_n| \leqslant \frac{\mathcal{M}(r)}{r^n} \qquad R_1 < r < R_2$$

cu egalitate numai cînd $f(z) = \varepsilon \frac{\mathcal{M}(r)}{r} z^n$ *unde* ε *este o constantă și* $|\varepsilon| = 1$.

Raționamentele făcute la teoremele 1 și 2, § 81, se extind imediat pentru cazul nostru (seria cu două capete fiind descompusă în două), vom avea deci mai întîi inegalitatea lui Gutzmer

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \leqslant \mathcal{M}(r)^2$$

din care se deduce la fel teorema actuală.

§ 85. Teoremele lui Vitali și Montel

a) **Teorema lui Vitali.** *Fie* $\{f_n(z)\}$ *un șir de funcții olomorfe în domeniul* D *și uniform mărginite în interiorul lui* D. *Dacă șirul converge într-un șir de puncte avînd un punct limită în* D, *el converge uniform în interiorul lui* D.

Demonstrația lui Jentzsch. Fie ζ_k șirul de puncte de convergență. Cu o transformare $z = z' + z_0$ putem aduce punctul limită în origine (transformarea nu schimbă ipotezele). Fie $|z| < \rho$ un disc conținut în D și $|z| < R$ un disc mai mare, de asemenea conținut în D. Fie

$$f_n(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu \text{ în } |z| \leqq R,$$

și $|f_n(z)| < M$ fix, în același disc. Deci

$$|f_n(z) - f_n(0)| \leqslant |f_n(z)| + |f_n(0)| < 2M.$$

Cum $f_n(z) - f_n(0)$ se anulează în origine, după lema lui Schwarz avem

$$|f_n(z) - f_n(0)| \leqq \frac{2M}{R}|z| \qquad (|z| \leqslant R). \tag{63}$$

Avem acum pentru $|\zeta_k| < R$ (deci k destul de mare)

$$|f_n(0) - f_{n+p}(0)| \leqslant |f_n(0) - f_n(\zeta_k)| + |f_n(\zeta_k) - f_{n+p}(\zeta_k)| + |f_{n+p}(\zeta_k) - f_{n+p}(0)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4M}{R}|\zeta_k| + |f_n(\zeta_k) - f_{n+p}(\zeta_k)|.$$

Deoarece $\zeta_k \to 0$, putem alege k aşa ca $\frac{4M}{R}|\zeta_k| < \frac{\varepsilon}{2}$ (dat) şi deoarece în ζ_k, $\{f_n(z)\}$ converge, vom avea

$$|f_n(\zeta_k) - f_{n+p}(\zeta_k)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{pentru } n > N, \ p \text{ arbitrar.}$$

Astfel

$$|f_n(0) - f_{n+p}(0)| < \varepsilon \qquad \text{pentru } n > N, \text{ şi } p \text{ arbitrar,}$$

ceea ce dovedeşte că $f_n(0) = a_{n,0}$ converge pentru $n \to \infty$ la limita a_0.

Funcţiile

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - a_{n,0}}{z} = a_{n,1} + \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

satisfac aceleaşi condiţii ca $f_n(z)$ în discul $|z| \leqslant R$. Anume, sînt olomorfe, converg în punctele ζ_k (pentru că $a_{n,0}$ converg) şi $|g_n(z)| < \frac{2M}{R}$. Deci putem conchide că $g_n(0) = a_{n,1}$ converg la o limită a_1. La fel, în general, $a_{n,\nu} \to a_\nu$ pentru $n \to \infty$.

Seria $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n\nu} z^\nu$ converge uniform cu privire la n şi z în discul $|z| < \rho$, deoarece după inegalitatea lui Cauchy

$$|a_{n,\nu} z^\nu| < \frac{M}{R_\nu}\rho^\nu \qquad \text{(serie convergentă în } |z| < \rho).$$

Evident $a_{n,\nu} z^\nu \to a_\nu z^\nu$ uniform cu privire la z.

Din acestea se conchide că $\{f_n(z)\}$ converge uniform în discul $|z| < \rho$, la $\sum_0^\infty a_\nu z^\nu$.

Pentru acelaşi motiv, $\{f_n(z)\}$ converge uniform şi într-un disc conţinut în D şi avînd centrul în discul precedent; şi a.m.d.; de unde se deduce că $\{f_n(z)\}$ converge uniform în orice cerc conţinut în D (vezi de exemplu proprietatea de identitate). Un domeniu $\overline{\Delta} \subset D$ putînd fi acoperit cu un număr finit de asemenea discuri, urmează că $f_n(z)$ converg uniform în $\overline{\Delta}$.

b) **Definiție** (*Montel*). *O familie de funcții* $\{f(z)\}$ *se zice compactă (normală) în domeniul* D, *dacă din orice șir* $\{f_n(z)\}$ *ce-i aparține, se poate extrage un subșir ce converge uniform în interiorul lui* D (*sau tinde uniform la* ∞).

Teorema 10. (*Montel*). *Pentru ca o familie de funcții olomorfe în* D *să fie compactă este necesar și suficient ca ea să fie uniform mărginită în interiorul lui* D

1°. Fie funcțiile $\{f(z)\}$ uniform mărginite în interiorul lui D și $\{f_n(z)\}$ șirul dat. Considerăm un șir de puncte $\zeta_k \to z_0 \in D$. În general șirul $\{f_n(z)\}$ nu converge în ζ_1, dar conține în totdeauna un subșir $f_{n1}(z)$ care converge în ζ_1. Acesta conține un subșir $f_{n2}(z)$ care converge și în ζ_2. Și așa mai departe. Se obțin astfel șirurile

$$\begin{cases} f_{11}, f_{21}, \ldots, f_{q1}, \ldots \\ f_{12}, f_{22}, \ldots, f_{q2}, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{1q}, f_{2q}, \ldots, f_{qq}, \ldots \end{cases} \tag{64}$$

astfel că fiecare este un subșir al precedentelor și șirul de rang q converge în punctele $\zeta_1, \ldots, \zeta_q$. Să considerăm șirul diagonal:

$$f_{11}, f_{22}, \ldots, f_{qq}, \ldots \tag{65}$$

Începînd cu f_{qq}, termenii acestuia aparțin șirului (64) de rang q, și prin urmare (65) converge în ζ_q, pentru orice valoare a indicelui q. După teorema lui Vitali, șirul (65) este deci uniform convergent în interiorul lui D, și familia $\{f(z)\}$ compactă.

2°. Fie familia $\{f(z)\}$ compactă și $\overline{\Delta} \subset D$. Dacă ea n-ar fi uniform mărginită în $\overline{\Delta}$, ar exista în $\overline{\Delta}$ un șir de puncte ζ_k și un șir de funcții corespunzătoare $f_k(z)$, astfel că

$$|f_1(\zeta_1)| > 1, \ |f_2(\zeta_2)| > 2, \ldots, |f_k(\zeta_k)| > k, \ldots .$$

Prin ipoteză, din șirul $\{f_k(z)\}$ se poate extrage un subșir $\{f_l(z)\}$, care converge uniform în $\overline{\Delta}$, la o funcție $\varphi(z)$ olomorfă. Aceasta este mărginită în $\overline{\Delta}$: $|\varphi(z)| < M$ fix și pe de altă parte avem $|f_l(z) - \varphi(z)| < \varepsilon$ pentru $l > N$, deci

$$|f_l(z)| < M + \varepsilon \qquad l > N,$$

ceea ce este în contradicție cu $|f_l(z)| > l$.

c) **Aplicație**

Teorema 11. (*Montel*). *Fie* $f(z)$ *olomorfă în semibanda* D: $a < x < b$, $y > 0$. *Dacă* $f(z)$ *este mărginită în* D *și converge pentru* $z \to \infty$ *pe semidreapta* $x = x_0$ *din* D, *atunci* $f(z)$ *converge la aceeași limită pentru* $z \to \infty$ *într-o bandă* D_1: $a + \delta \leqq x \leqq b - \delta$.

Considerăm șirul de funcții $f_n(z) = f(z + in)$. Prin ipoteză el tinde la o limită l în toate punctele de abscisă x_0 din D; deci după teorema lui Vitali,

şirul converge uniform la l într-un dreptunghiu $a + \delta \leqslant x \leqslant b - \delta$, $\eta \leqslant y \leqslant \eta + 1$: $|f(z + in) - l| < \varepsilon$ pentru $n \geqslant \nu$, în dreptunghiul precedent. Cînd $n = \nu, \nu + 1, \ldots, y + n$ descrie intervalul $[\eta + \nu, + \infty)$. Avem deci $|f(z) - l| < \varepsilon$ în D, pentru $y > \eta_0 = \eta + \nu$ (adică z într-o vecinătate U_∞); aceasta înseamnă că $f(z) \to l$ în D_1.

Transformînd semibanda prin $z = i \log z'$ într-un sector $\alpha < \theta' < \beta$, $1 < \rho' < \infty$, obţinem:

Teorema 12. *Fie $f(z)$ olomorfă într-un unghi $\alpha < \theta < \beta$. Dacă $f(z)$ este mărginit în acest unghi, şi converge la o limită l pentru $z \to \infty$ pe o semidreaptă a unghiului, atunci $f(z) \to l$ pentru $z \to \infty$ într-un unghi $\alpha + \delta \leqslant \theta \leqslant \beta - \delta$.*

Capitolul VI

Punctele singulare ale funcţiilor uniforme

Reziduuri

§ 86. Generalităţi

1. *Funcţie uniformă într-un domeniu* $\mathfrak{D}$ este o funcţie olomorfă în toate punctele lui $\mathfrak{D}$ cu excepţia unei mulţimi de puncte A, de măsură (L) bidimensională nulă [14]. Acestea din urmă se numesc *punctele singulare* ale funcţiei; în ele funcţia poate să nu fie definită. Celelalte puncte, care constituie mulţimea $\mathfrak{D} - A = D$, se numesc *puncte regulate.*

Funcţie uniformă (fără alt calificativ) este o funcţie uniformă în tot planul (cu sau fără ∞).

Termenul de funcţie uniformă are aici o semnificaţie specială, mai restrînsă decît aceea de pînă acum.

Reamintim că o funcţie $f(z)$, definită în $z = \infty$, este considerată olomorfă (regulată) în acest punct, dacă $f(1/z')$ este olomorfă în $z' = 0$ (cu valoarea în $z' = 0$ egală aceleia a lui $f(z)$ în $z = \infty$). Rezultă de aici că $\lim f(z)$ pentru $z \to \infty$ este egală cu valoarea funcţiei şi că funcţia este mărginită într-o vecinătate V_∞.

Observaţii 1) Evident nu ar avea sens să vorbim de derivata funcţiei la ∞, şi deci să definim olomorfia în acest punct cu ajutorul monogeneităţii.

2) În definiţia precedentă putem considera şi $f\left(\frac{1}{z'' - \alpha}\right)$, în $z'' = \alpha$. Într-adevăr, dacă $\varphi(z') = f\left(\frac{1}{z'}\right)$ este olomorfă în $z' = 0$, $\varphi(z' - \alpha) = f\left(\frac{1}{z' - \alpha}\right)$ este olomorfă în $z' = \alpha$ şi reciproc. Mai general, putem considera $f\left(\frac{\alpha z' + \beta'}{\alpha z' + \delta}\right)$ cu $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, $\gamma \neq 0$, în punctul $z' = -\delta/\gamma$.

Nu poate fi vorba nici de dezvoltare tayloriană în vecinătatea punctului ∞ (care ar comporta derivatele funcţiei). Însă, o funcţie olomorfă la ∞ are o dezvoltare Laurent de forma

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{z^n}.$$

[14] În cazurile cele mai des întîlnite, această mulţime este numărabilă, deoarece unele metode importante de investigaţie a funcţiilor uniforme (cum ar fi teoria reziduurilor) se pot aplica doar singularităţilor izolate.

Într-adevăr, $f(1/z')$ fiind olomorfă în $z'=0$, avem o dezvoltare taylo-riană în vecinătatea originei:

$$f(1/z') = \sum_0^\infty a_n z'^n$$

de unde rezultă dezvoltarea precedentă, valabilă în exteriorul unui cerc de centru O. La fel putem obține o dezvoltare de forma

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{b_n}{(z - z_0)^n}$$

(cu alți coeficienți) valabilă în exteriorul unui cerc de centru z_0. Acestea sînt dezvoltări Laurent (din cauza unicității dezvoltării Laurent într-o coroană limitată interior de cercul precedent). De altfel se vede că, în cazul nostru, dezvoltarea Laurent nu are decît termeni de exponenți $\leqslant 0$:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'} f(1/t')t'^{n-1}\,dt' = 0 \quad (n > 0)$$

(nu se pune — înainte pentru că atunci cînd t parcurge Γ, $t' = 1/t$ parcurge Γ' în sens contrar). Sau: $|a_n| < M/r^n \to 0$ pentru $r \to \infty$ cînd $n > 0$.

Exemple:

1. e^z *are punctul singular* $z = \infty$, pentru că nu este mărginit în nici o vecinătate V_∞, sau pentru că nu are limită pentru $z \to \infty$. Este o funcție uniformă; mulțimea A se reduce la $z = \infty$.

2. *Tot așa,* $e^{1/z}$ *are punctul singular* $z = 0$, *dar* $z = \infty$ *este regulat*, pentru că $z' = 1/z = 0$, astfel pentru $e^{z'}$ (atribuim lui $e^{1/z}$ valoarea 1 în $z = \infty$). Dezvoltarea în vecinătatea lui $z = \infty$ este

$$e^{1/z} = \sum_0^\infty \frac{1}{n!} z^{-n}.$$

3. *Un polinom* $P(z) = a_0 z^n + \ldots + a_n$ *are un punct singular (pol) la* ∞, pentru că $P(1/z') = \frac{1}{z'^n}(a_0 + \ldots + a_n z'^n)$ are ca punct singular $z' = 0$. $\frac{1}{P(z)}$ este regulat în $z = \infty$.

4. *O funcție rațională* $\frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + \ldots + a_n}{b_0 z^p + \ldots + b_p}$ $(a_0 \neq 0,\ b_p \neq 0)$ *și* P, Q *relativ primi, are ca puncte singulare zerourile lui* $Q(z)$ *și* $z = \infty$ *dacă* $n > p$. *Tot așa* $e^{P(z)/Q(z)}$.

5. *O determinare a funcției* $\log z$ *este o funcție uniformă, fără singularități, în planul tăiat după semiaxa reală pozitivă.*

6. $\operatorname{cotg} z$ *este o funcție uniformă, cu punctele singulare* $z = k\pi$ *și* $z = \infty$.

7. $\sin \frac{1}{\sin \frac{1}{\sin z}}$ *este o funcție uniformă cu punctele singulare date de* $z = k\pi$, $z = \infty$ *și* $\sin z = \frac{1}{h\pi}$ $(h \neq 0)$.

2. **a)** Mulțimea $D = \mathfrak{D} - A$ în care o funcție uniformă este olomorfă este evident deschisă. Ea se descompune în general în domenii în număr finit sau numărabil.

Exemple.

8. $f(z) = \sum_{1}^{\infty} \frac{z^{2^n-1}}{1-z^{2^n}} = \begin{cases} \dfrac{z}{1-z} & |z| < 1, \\ \dfrac{1}{1-z} & |z| > 1. \end{cases}$

(Se stabileşte inductiv $S_n = \dfrac{z}{1-z} \dfrac{1-z^{2^n-1}}{1-z^{2^n}}$.) (A se vedea şi exerciţiul 12, § 79.)
Funcţia nu poate avea limită finită în nici un punct al circumferinţei $|z| = 1$. Mulţimea A este acest cerc, D se descompune în două domenii.

9. $f(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int_C \dfrac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} \varphi(z) & \text{în interiorul lui } C, \\ 0 & \text{în exteriorul lui } C, \end{cases}$

$\varphi(z) \not\equiv 0$ fiind o funcţie olomorfă în domeniul $\mathfrak{D}$ simplu conex şi C un contur rectificabil în $\mathfrak{D}$. Şi aici D este suma a două domenii.

În exemplele precedente avem curbe formate din puncte singulare.

Observaţii. *1)* O curbă rectificabilă are măsura nulă. O epicicloidă de modul iraţional are măsura > 0.

2) Un mijloc des întrebuinţat de a dovedi că un punct este singular este de a arăta că în acel punct funcţia nu are limită finită, sau că nu este mărginită în nici o vecinătate a lui. (Se aplică şi la ∞).

3) Cînd D se descompune în mai multe domenii, este suficient să studiem funcţia separat în fiecare. Atunci punctele frontieră ale domeniului, care nu sînt în $\mathfrak{D}$, nu mai apar ca puncte singulare.

b) *A este închisă în $\mathfrak{D}$*, pentru că $D = \mathfrak{D} - A$ este deschisă (absolut şi în $\mathfrak{D}$). De aici rezultă că *un punct limită de puncte singulare este un punct singular (dacă se află în $\mathfrak{D}$).*

c) *Orice punct singular este punct limită de puncte regulate*: $A \subset D'$ *şi deci* $A \subset \bar{D}$, *de unde* $A \subset \operatorname{fr} D$. Într-adevăr altfel ar exista o vecinătate $V_\alpha \subset A$, contrar cu faptul că măs $A = 0$. De aici deducem că: *A nu este nicăieri densă în $\mathfrak{D}$.*

d) Teorema 1. $\operatorname{fr} D = \operatorname{fr} \mathfrak{D} \cup A$.

Într-adevăr: 1°. $A \subset \operatorname{fr} D$ (cum am văzut). Un punct $\beta \in \operatorname{fr} \mathfrak{D}$ nu este în D şi orice V_β conţine puncte din D sau din A, care însă sînt puncte limită de puncte din D.

2°. Un punct din $\operatorname{fr} D$, dacă nu este în A, nefiind în D (care este deschisă), nu este în $\mathfrak{D}$; el este punct limită de puncte din D (deci din $\mathfrak{D}$) şi prin urmare face parte din $\operatorname{fr} \mathfrak{D}$.

Teorema 2. *O curbă Jordan rectificabilă are măsura nulă.*

Într-adevăr, fie s lungimea ei; s-o împărţim în n arce de lungime $\frac{s}{n}$ şi din mijlocul fiecărui arc ca centru să descriem un cerc de rază $\frac{s}{2n}$. Obţinem astfel n discuri care acoperă curba şi a căror măsură totală,

$$n\pi\left(\frac{s}{2n}\right)^2 = \frac{s^2}{4n} \to 0.$$

Observație. Mulțimea deschisă D în care $f(z)$ este olomorfă poate fi un domeniu, sau o reuniune cel mult numărabilă de domenii: $D = D_1 \cup D_2 \cup \ldots$ Putem desigur considera funcții egale cu $f(z)$ în fiecare din aceste domenii. Dar un asemenea studiu nu ar fi suficient din punct de vedere al definiției lui f; căci astfel ne-ar scăpa adevărata natură a punctelor singulare care fac parte din frontiera mai multor domenii (cu vecinătăți aparținînd la mai multe domenii). Sîntem obligați să considerăm tot domeniul D în ansamblul lui. Se poate încă întîmpla ca o funcție să fie definită (ca funcție uniformă) în domenii $\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_2, \ldots$ *separate*, adică fără puncte interioare și nici puncte frontieră comune. Atunci putem considera fără inconvenient funcția numai în cîte unul din aceste domenii.

În legătură cu aceasta să mai amintim că pentru a studia o funcție neuniformă, se restrînge adesea la un domeniu (cît mai mare posibil) în care să avem determinări uniforme (în sensul definiției actuale); procedeul este însă artificial și nu ne poate da o idee completă despre comportarea funcției. (Se recurge atunci la înlocuirea planului lui Gauss printr-o suprafață a lui Riemann).

Exemplul 10. $f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{n}}{1+z^{2^n}}$, *serie convergentă în interiorul* D_1 *și exteriorul* D_2 *ale circumferinței* A: $|z| = 1$, *dar nedefinită sau neconvergentă pe* A. *Circumferința* A *este mulțimea punctelor singulare.*

Observație. În exemplele precedente, mulțimea punctelor singulare este închisă. Astfel în exemplul 7 ea are punctele limită 0 și ∞, care sînt de asemenea singulare.

3. O singularitate α se zice *izolată* dacă există o vecinătate V_α în care funcția este olomorfă cu excepția lui α.

Mai general, o singularitate va fi numită de *specia 1* dacă este limită de singularități izolate, adică este punct izolat în A', ... de *specia* S dacă este punct izolat în $A^{(S)}$.

Dacă A_0 este mulțimea punctelor singulare izolate, A_0' este mulțimea punctelor de specie $\geqslant 1$, ..., $A_0^{(S)}$ este mulțimea punctelor de specie $\geqslant s$. $A = A_0 \cup A_0' \cup A_1 = \bar{A}_0 \cup A_1$ (A_1 mulțimea punctelor singulare ce nu au specie).

Exemplul 11. *În exemplul* 6, $z = \infty$ *este punct singular de specia 1. Pentru funcția*

$$\sin \cfrac{1}{\sin \cfrac{1}{\sin \cdot \cdot \cdot \sin \cfrac{1}{z}}}$$

cu $m+1$ *simboli sin suprapuși,* $z = 0$ *este singular de specia* m.

Funcțiile uniforme cele mai obișnuite sînt acele ale căror singularități sînt izolate sau puncte limită de singularități izolate (de specie mărginită).

Cînd A este izolată, un domeniu închis $\overline{\mathfrak{D}}_1 \subset \mathfrak{D}$ poate conține numai un număr finit de puncte din A (pentru că un punct limită al acestora ar fi un punct singular neizolat în $\overline{\mathfrak{D}}_1$ și deci în $\mathfrak{D}$).

Astfel, dacă o funcție uniformă, are numai singularități izolate la distanță finită, în cercurile de centru O și raze $r = 1, 2, ..., n, ...$ vor cădea singularități în număr finit, care vor fi numărabile. Ele vor forma un șir care poate fi așezat în ordinea crescătoare a modulilor:

$$|z_0| \leqslant |z_1| \leqslant ... \leqslant |z_n| \leqslant ....$$

Dacă șirul este infinit, punctul ∞ va fi o singularitate de specia 1.

Acest rezultat se poate extinde la funcții uniforme într-un domeniu $\mathfrak{D}$ oarecare (reprezentîndu-l de exemplu conform pe un disc), sau considerînd mulțimile închise

$$\delta(z, \text{fr } \mathfrak{D}) \geqslant \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, ...).$$

Rezultatul se aplică și în cazul cînd singularitățile au specii mărginite: $S \leqslant K$. Se vede la fel că cele de specie S sînt numărabile, apoi se observă că, într-o vecinătate a unei singularități de specie S, singularitățile de specie $S - 1$ sînt numărabile (pentru un motiv analog); etc.

4). În vecinătatea unui punct singular izolat funcția poate fi reprezentată de o dezvoltare Laurent.

$$(1) \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Dacă $| z - z_0 | < R$ este o vecinătate lipsită de alte singularități, dezvoltarea precedentă valabilă în orice coroană de raze $0 < R' < R'' < R$, deci avînd în vedere unicitatea ei, este valabilă în domeniul $0 < | z - z_0 | < R$. Seria (convergentă) formată de termenii cu exponenți < 0 se numește *partea principală (caracteristica)* punctului singular; prezența ei face ca punctul să fie singular.

În cazul punctului de la ∞, avem la fel o dezvoltare de forma

$$(2) \qquad f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

valabilă pentru $| z | > R$, dacă în acest domeniu nu există altă singularitate. În acest caz seria termenilor cu exponenți $n \leqslant 0$ are ca sumă o funcție olomorfă la ∞; partea principală, care conferă punctului ∞ caracterul singular, este deci seria de termeni cu exponenți $n > 0$.

În definitiv, în vecinătatea unui punct singular, funcția este de forma

$$f(z) = P(z) + G(z)$$

unde $G(z)$ este olomorfă și $P(z)$ — partea principală — are acel punct singular. Cînd punctul singular z_0 este la dinstață finită, $P(z)$ este o serie $\sum_{1}^{\infty} \frac{a_n}{(z - z_0)^n}$; cînd punctul singular este ∞, $P(z)$ este de forma $\sum_{1}^{\infty} a_n z^n$. Adăugăm că seria $P(z)$ este convergentă în exteriorul unui cerc oricît de mic cu centrul în z_0; deci funcția $P(z)$ nu are, în tot planul lui Gauss, decît punctul singular z_0.

Exemplul 12. *Pentru* $f(z) = \frac{1}{z - \alpha}$, $P(z) = \frac{1}{z - \alpha}$ (*în* $z = \alpha$). *Pentru* e^z, *în* $z = \infty$ $P(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$. *Pentru* cotg z, *în* $z = k\pi$, $P(z) = \frac{1}{z - k\pi}$.

5. Teorema 3. *Dacă $f(z)$ este olomorfă și mărginită în vecinătatea V_α cu excepția punctului α (despre care nu se știe nimic), atunci există* $\lim_{z\to\alpha} f = \lambda$ *finită, și atribuind funcției valoarea λ în $z = \alpha$, obținem o funcție olomorfă în V_α (inclusiv α).*

Presupunînd α finit, avem o dezvoltare (1) valabilă în $V_\alpha - \alpha$ și $|f(z)| < M$ (fix) în acest domeniu; r fiind raza unui cerc conținut în V_α și de centru α, avem

$$|a_n| < \frac{M}{r^n} \to 0 \text{ pentru } r \to 0, \text{ dacă } n < 0.$$

Deci $a_n = 0$ pentru $n < 0$ și (1) este o serie întreagă, care reprezintă o funcție $f_1(z)$ olomorfă în tot V_α; $f_1(z) = f(z)$ în $V_\alpha - \alpha$, deci $f(z)$ are aceeași limită pentru $z \to \alpha$ ca $f_1(z)$; or, această limită este $\lambda = f_1(\alpha) = a_0$.

Dacă $\alpha = \infty$, avem o dezvoltare Laurent (2) și

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n} \to 0 \text{ pentru } r \to \infty, \text{ dacă } n > 0.$$

Acum $a_n = 0$ pentru $n > 0$ și concluzia rămîne aceeași. (Sau reducem acest caz la precedentul prin mijlocirea transformării $z = \frac{1}{z'}$.)

Se poate ca $f(z)$ să fie definit în α, dar $f(\alpha) \neq \lambda$. Atunci α se zice singularitate *removibilă (aparentă)*.

O asemenea singularitate poate fi înlăturată schimbînd doar valoarea funcției în $z = \alpha$, ceea ce vom face întotdeauna; nu vom mai avea deci de considerat astfel de singularități.

Observație. Teorema este aplicabilă cînd se știe că există $\lim_{z\to\alpha} f(z)$ finită, căci atunci $f(z)$ va fi mărginită într-o vecinătate V_α.

6. Teorema 4. *(Liouville). O funcție olomorfă și mărginită în tot planul la distanță finită este o constantă.*

Prin ipoteză $|f(z)| < M$ (fix) și

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

în tot planul la distanță finită.

Avem

$$|a_n| \leqslant \frac{M}{r^n} \to 0 \text{ pentru } r \to \infty \text{ și } n > 0 \text{ deci } a_n = 0 \ (n > 0) \text{ și } f(z) = a_0.$$

Teorema 5. *O funcție uniformă, care nu se reduce la o constantă, are cel puțin o singularitate în planul lui Gauss.*

Căci în cazul contrar, funcția va fi mărginită atît în exteriorul unui cerc (fiind olomorfă la ∞) cît și în interiorul și periferia cercului), deci mărginită în tot planul, și se aplică teorema precedentă.

Aplicație.

Teorema lui d'Alembert. *Un polinom (neconstant) are cel puțin un zero (la distanță finită).*

Într-adevăr, dacă polinomul $P(z)$ nu are nici un zero, $1/P(z)$ este olomorf în tot planul și în punctul ∞ (atribuindu-i valoarea 0, după convenția făcută mai sus, deoarece $1/P(z) \to 0$ pentru $z \to \infty$); deci ar urma $P(z) = \text{const.}$

Sau, fiindcă $1/P \to 0$, avem $|1/P| < M$ pentru $|z| > R$ și $|1/P| < N$ pentru $|z| \leqslant R$ ....

Corolar *(Teorema lui Gauss). Un polinom de grad m se descompune în m factori (în complex).*

7. Singularitățile aparente fiind excluse, rămîn pentru un *punct* singular izolat α, două posibilități:

1° $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \infty$; atunci α se numește *pol* al funcției f.

2° f nu are limită pentru $z \to \alpha$; atunci α se numește un punct *singular esențial (izolat)*.

În general numim singularitate esențială a unei funcții uniforme orice singularitate afară de poli (și, bineînțeles, de singularități aparente).

Punctele singulare esențiale pot fi de natură foarte diversă. În primul rînd trebuie să distingem (după cum am văzut mai sus) pe cele izolate, de cele care sînt puncte limită de puncte singulare; acestea pot fi izolate ca puncte singulare esențiale (deci puncte limită de poli) sau puncte limită de puncte singulare esențiale etc.

În cazul unei singularități izolate, se vede după definiție că ea este pol sau punct singular esențial, după cum caracteristica are un număr finit sau infinit de termeni nenuli.

Exemple. **13.** $\sin^{-1}(1/z)$ *are punctul singular esențial* $z=0$ *și polii* $z = 1/k\pi$ *(k întreg), care au primul punct ca punct limită.*

14. *Pentru* e^z, ∞ *este singular esențial. Pentru* $\operatorname{ctg} z$, $z = k\pi$ *sînt poli și* $z=\infty$ *punct singular esențial (limită de poli).*

§ 87. Poli

După definiție, un pol este o singularitate izolată, în care funcția are limită infinită.

Urmează că orice punct singular care este limită de puncte singulare (adică e de specie > 0) este esențial (adică nu poate fi pol).

Definiția unui pol mai poate fi pusă sub forma:

Un punct α este un pol pentru $f(z)$ dacă este un zero pentru $1/f(z)$.

Într-adevăr aceasta înseamnă că α este singularitate izolată și $\lim_{z \to \alpha} f = \infty$ echivalează cu $\lim_{z \to \alpha} 1/f = 0$. (Se atribuie lui $1/f$ valoarea 0 în α.)

I. Un pol α se zice de *ordinul* p dacă el este zero de ordin p al funcției $1/f$.

II. Cînd $\alpha \neq \infty$, aceasta înseamnă că putem scrie într-o vecinătate V_α: $1/f(z) = (z - \alpha)^p g(z)$ cu $g(z)$ funcție olomorfă și $g(\alpha) \neq 0$; sau

$$f(z) = \frac{1}{(z - \alpha)^p} \varphi(z) \qquad (\varphi = 1/g) \tag{3}$$

cu $\varphi(z)$ funcție olomorfă în α și $\varphi(\alpha) \neq 0$. Reciproc, dacă $f(z)$ poate fi pus sub această formă într-o vecinătate $V_\alpha - \alpha$, α este un pol de ordinul p, fiindcă $1/f(z)$ are în α un zero de ordin p.

III. Altă caracterizare: un punct $\alpha \neq \infty$ este pol de ordin p al funcției $f(z)$ dacă $f(z)$ este olomorfă într-o vecinătate $V_\alpha - \alpha$ și $f(z)\,(z-\alpha)^p$ tinde la o limită λ finită și nenulă. Căci aceasta înseamnă că $f(z)(z-\alpha)^p = \varphi(z)$ este olomorfă în V_α (nr. 5) și $\varphi(\alpha) = \lambda \neq 0$, adică $f(z)$ este de forma (3).

IV. O a patra caracterizare a unui pol $\alpha \neq \infty$ de ordin p este: Punct singular izolat, în care partea principală $P(z)$ este un polinom de grad p în $\dfrac{1}{z-\alpha}$. Într-adevăr, plecînd de la (3), avem

$$\varphi(z) = a_0 + a_1(z-\alpha) + \ldots \qquad a_0 \neq 0 \tag{4}$$

(dezvoltare taylorianã), deci

$$f(z) = \left(\frac{a_0}{(z-\alpha)^p} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{z-\alpha}\right) + a_p + \ldots,$$

dezvoltare Laurent (unică) cu partea principală

$$P(z) = \frac{a_0}{(z-\alpha)^p} + \cdots + \frac{a_{p-1}}{z-\alpha} \qquad (a_0 \neq 0)$$

de grad p în $\dfrac{1}{z-\alpha}$. Invers, dacă $f(z)$ admite o dezvoltare Laurent de această formă, se poate pune sub forma (3) cu $\varphi(z)$ dat de (4), deci α este pol de ordin p.

Pentru ∞ pol de ordin p se demonstrează analog echivalența definiției de mai sus cu următoarele:

II'. $f(z) = z^p \varphi(z)$ într-o vecinătate V_∞, unde $\varphi(z)$ este olomorfă la ∞, $\varphi(\infty) \neq 0$.

III'. $f(z)$ este olomorfă într-o vecinătate $V_\infty - \infty$ și $f(z)\dfrac{1}{z^p}$ tinde la o limită finită și nenulă cînd $z \to \infty$.

IV'. ∞ este punct singular izolat, în care partea principală $P(z)$ este un polinom de grad p în z.

Exemple 1. *Pentru un polinom $P(z)$ de gradul p, ∞ este un pol de ordin p, avînd ca parte principală chiar $P(z)$.*

2. *Pentru funcția rațională de la exemplul 4) din paragraful precedent un zero de ordin q al numitorului $Q(z)$ (prim cu $P(z)$!) este un pol de ordin q. Dacă $n > p$, punctul ∞ este un pol de ordinul $n - p$,* pentru că $1/f$ are ∞ ca zero de acest ordin, sau pentru că $f(z)\,z^{n-p} \to a_0/b_0$ (finit și nenul).

Observații 1. Caracterizările II', III', IV' rezultă din II, III, IV pe baza principiului că $f(z)$ are în ∞ un pol de ordin p cînd $f(1/z')$ are în $z'=0$ un pol de acest ordin.

2. Dacă $f(z)$ are un pol de ordin p la distanță finită, $f'(z)$ are acolo un pol de ordin $p+1$. Dacă polul lui $f(z)$ este la ∞, acest punct este pol de ordin $p-1$ pentru $f'(z)$. (Deci punct regulat dacă $p = 1$.) Rezultă din II și II'.

§ 88. Puncte singulare esențiale izolate. Funcții meromorfe

1. Comportarea unei funcții în vecinătatea unui punct singular esențial este complexă. Deocamdată vom demonstra.

Teorema 1 *(Casorati-Weierstras). În orice vecinătate a unui punct singular esențial izolat α, funcția ia valori oricît de apropiate de orice valoare dată.*

Cu alte cuvinte: dîndu-se arbitrar o vecinătate U_α, o valoare λ și o vecinătate V_λ, există în U_α puncte pentru care $f(z)$ este în V_λ.

1°. Cazul $\lambda = \infty$. Teorema spune atunci că în U_α funcția ia valori $|f(z)| > M$ dat arbitrar. Într-adevăr, dacă nu ar fi așa ar exista un M astfel că $|f(z)| < M$ în $U_\alpha - \alpha$; dar atunci α ar fi cel mult o singularitate aparentă, în virtutea teoremei 3 din paragraful precedent.

2°. $\lambda \neq \infty$. Funcția $\dfrac{1}{f(z) - \lambda}$ are punctul esențial α, căci dacă acest punct ar fi regulat sau pol, $f(z) - \lambda$ și prin urmare $f(z)$ ar avea un punct de aceeași natură în α ($f(z)$ fiind olomorfă într-o vecinătate $V_\alpha - \alpha$ și avînd limită în α).

Astfel, după 1°, există în U_α puncte pentru care

$$\left|\frac{1}{f(z) - \lambda}\right| > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{sau} \quad |f(z) - \lambda| < \varepsilon,$$

ε dat arbitrar.

Corolarul 1. *Mulțimea valorilor luate de funcție într-o vecinătate U_α este densă în planul (w).*

După o teoremă a lui Picard, ea este formată din tot planul (w) minus cel mult 2 valori.

Observații 1) Teorema se aplică și la un punct singular care este limită de puncte singulare *izolate* (de specie finită), căci U_α conținînd un punct singular izolat, teorema rămîne adevărată cînd acesta este esențial (U_α fiind și o vecinătate a sa); iar dacă U_α conține un pol, vom avea în U_α puncte pentru care $|f(z)| > M$ dat arbitrar, astfel că partea 1° a demonstrației subsistă; partea 2° rămîne neschimbată.

Teorema poate însă să nu se aplice unui punct singular esențial care nu este nici izolat nici punct limită de puncte singulare izolate. De exemplu într-un punct α situat pe un arc de curbă format din puncte singulare, funcția poate avea limite cînd $z \to \alpha$ de o parte sau alta a arcului și este evident că în acest caz teorema nu este adevărată (vezi exemplele 8, 9 din § 86).

Teorema se poate enunța și astfel: fiind dat λ, există un șir de puncte z_n care converg la α, astfel că $f(z_n) \to \lambda$ (teoremă atribuită și lui Sohoțki (1868)).

2) Un punct α cu proprietatea că funcția ia o valoare dată în orice vecinătate a sa, în puncte $\neq \alpha$, dar nu și în aceast punct, este singular esențial. Pentru că altfel funcția ar avea limită în acel punct și deci n-ar putea avea proprietatea considerată.

Exemplul 1. *Am văzut că e^z ia orice valoare afară de 0 și ∞, în orice vecinătate a puctului ∞ (și chiar de ∞ ori). Tot așa* sin z *ia orice valoare finită,* tg z *orice valoare afară de* $\pm i$.

Aceste fapte se subsumează unei teoreme a lui Picard ce va fi stabilită mai tîrziu, și care precizează teorema lui Casorati-Weierstrass.

Corolarul 2. *O funcție meromorfă (și în particular olomorfă) și neconstantă într-un domeniu închis $\bar{D}$ (adică meromorfă într-un domeniu $D \supset \bar{D}$) nu poate lua o valoare dată λ decît într-un număr finit de puncte din $\bar{D}$.*

Într-adevăr, altfel aceste puncte ar avea un punct limită în $\bar{D}$, care ar fi singularitate esențială. Mai putem zice: ecuația $f(z) - \lambda = 0$ are un număr finit de rădăcini în $\bar{D}$.

Și acum, în baza notațiilor de la § 86, fie $f(z)$ o funcție olomorfă în domeniul D și să presupunem că într-un punct $\alpha \in A$ există $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z) < \infty$ relativ la D. Fie A_{00} mulțimea punctelor de acest fel și $D_0 = D \cup A_{00}$. Într-un punct $\alpha \in A_0$, $f(\alpha)$ poate să nu fie definită sau să fie diferită de $\lim\limits_{z\to\alpha} f(z)$. Vom modifica (dacă este cazul) valorile funcțiilor $f(z)$ în A_{00} luînd în D_0:

$$f_0(z) = \begin{cases} f(z) & \text{în } D, \\ \lim\limits_{z\to\alpha} f(z) & \text{în punctele } \alpha \in A_{00}. \end{cases}$$

Funcția $f_0(z)$, care coincide cu $f(z)$ în D, este continuă în D_0 (§ 7). Vom arăta că:

Teorema 2. *Mulțimea $D_0 = D \cup A_{00}$ este deschisă și funcția $f_0(z)$ este olomorfă în D_0.*

1°. Pentru prima afirmație este destul să considerăm un $\alpha \in A_{00}$ și fie $f_0(\alpha) = \lim\limits_{z\to\alpha} f(z) = \lambda \neq \infty$. Deci fiind dată o vecinătate V_λ, există o vecinătate V_α astfel că $w = f(z) \in V_\lambda$ cînd $z \in V_\alpha \cap D$ (mulțime nevidă). Dacă α nu este interior lui D_0, orice V_α conține un punct $\beta \in A - A_{00}$, unde $\lim\limits_{z\to\beta} f(z)$ nu există, cazul în care această limită ar fi ∞ fiind evident exclus. Deci, în virtutea teoremei 1, există puncte $z \in V_\alpha \cap D$ (într-o vecinătate V_β) pentru care $w = f(z) \notin V_\lambda$. Această contradicție arată că $\alpha \in \operatorname{int} D_0$ și D_0 este deschisă.

2°. Rămîne să arătăm că $f_0(z)$ este olomorfă în orice $\alpha \in A_{00}$. După cum am văzut există un cerc C de centru α și conținut în D_0. După teorema 1, există un punct $z_0 \in \operatorname{int} C$, unde $f(z)$ este olomorfă, și deci un cerc Γ de centru z_0 și $\subset \operatorname{int} C$, în care și pe care $f(z)$ este olomorfă. Pe de altă parte, $f_0(z)$ este olomorfă în $\operatorname{int} C$ și pe C, cu excepția unei mulțimi de măsură nulă și este continuă în tot acest domeniu închis. Atunci teorema lui Cauchy este aplicabilă și avem (§ 74, observația 3)

$$\int_C \frac{f_0(t)\,dt}{t - z_0} = \int_\Gamma \frac{f_0(t)\,dt}{t - z_0} = \int_\Gamma \frac{f(t)\,dt}{t - z_0} = 2\pi i f(z_0).$$

(Se poate aplica și teorema lui Morera.) Astfel

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f_0(t)\,dt}{t - z} = f_0(z) \quad \text{în } D \cap \operatorname{int} C.$$

Or, $\varphi(z)$ este olomorfă în $\operatorname{int} C$ (§ 76, teorema 2) și coincide cu $f_0(z)$ în punctele din D. Cum $f_0(z)$ este continuă și (într-un cerc $C' \subset C$) punctele din A sînt puncte limită ale unor puncte din D, urmează $f_0(z) = \varphi(z)$ (în C'), și în particular $f_0(z)$ olomorfă în $z = \alpha$.

Observația 3. În cazul cînd A_{00} este o curbă Jordan rectificabilă putem evita recursul la generalizarea teoremei lui Cauchy de care ne-am servit. Cum A_{00} este un continuu, se va găsi într-o componentă D_0' a mulțimii deschise $D_0 = A_{00} \cup D$. Dacă A_{00} este o curbă închisă, ea împarte D_0' în două domenii: $D_0' = D'' \cup D'''$ avînd pe A_{00} în frontiera lor; dacă A_{00} are extremități distincte, le vom uni cu fr D_0' și vom împărți de asemenea D_0' în două domenii avînd pe A_{00} în frontiera lor. $f(z)$ este olomorfă în D'' și D'''. Fie acum $\alpha \in A_{00}$ (fig. 97). Vom uni printr-o transversală $\mathcal{L}'' \subset D''$ două puncte (accesibile) β'', γ'' din A_{00}, de o parte și de alta a lui α și de asemenea vom uni printr-o transversală $\mathcal{L}''' \subset D'''$, puncte β''', γ''' analoage. Teorema lui Cauchy, aplicată curbelor Jordan închise $\mathcal{L}'' + \overset{\frown}{\beta''\gamma''} = C''$, $\mathcal{L}''' + \overset{\frown}{\beta'''\gamma'''} = C'''$, ne dă integrale a căror sumă este integrala pe curba Jordan închisă: $C' = \mathcal{L}'' \cup \mathcal{L}''' \cup \overset{\frown}{\beta''\beta'''} \cup \overset{\frown}{\gamma''\gamma'''}$, și avem

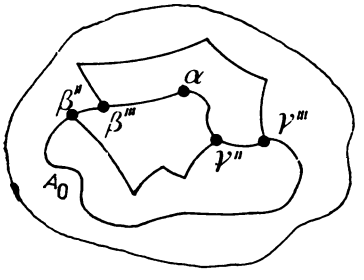

Fig. 97

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{f_0(t)\,dt}{t - z} = f(z)$$

cu z în int C'' sau în int C''' (una din integralele pe C'', C''' este nulă și cealaltă $f(z)$). De aici înainte se va conchide ca mai sus.

Observația 4. Domeniul de olomorfie D_0 al funcției f_0 nu poate fi lărgit prin aceeași operație (care ne-a condus de la D la D_0). Căci dacă există $\lim\limits_{z\to\alpha} f_0$, există *a fortiori* $\lim\limits_{z\to\alpha} f$ (relativ la D) și deci $\alpha \in D_0$.

Să reținem: Dacă există una din limitele $\lim\limits_{z\to\alpha} f$, $\lim\limits_{z\to\alpha} f_0$, există și cealaltă și ele sînt egale.

Natura și distribuția punctelor singulare joacă un rol fundamental în studiul funcțiilor uniforme. Cu ajutorul lor se pot caracteriza diverse clase de funcții.

O clasă importantă este aceea a funcțiilor *întregi*. Sînt numite astfel funcțiile uniforme olomorfe în tot planul, la distanță finită.

a) Dezvoltarea tayloriană în O este valabilă, pentru o funcție întreagă în tot planul:

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n. \tag{5}$$

Tot această dezvoltare, minus a_0, este partea principală a funcției în punctul ∞.

b) funcțiile întregi se clasifică după natura punctului ∞, în:

constante,	∞ punct regulat,
polinoame,	∞ pol de ordin egal cu gradul polinomului,
transcendente,	∞ punct singular esențial.

Aici este implicată teorema:

Teorema 3. *O funcție uniformă, care nu are altă singularitate decît un pol de ordin m la* ∞, *este un polinom de grad m (Liouville).*

Într-adevăr, dacă $P(z)$ este partea principală la ∞ — polinom de grad m — putem scrie $f(z) = P(z) + G(z)$, unde $G(z)$ este o funcție întreagă, regulată și la ∞, deci o constantă (după prima teoremă a lui Liouville).

c) O funcție întreagă periodică este transcendentă (dacă nu este constantă) Într-adevăr funcția luînd o aceeași valoare pentru o infinitate de valori z, nu poate fi un polinom.

Exemplul **2.** e^{az}, sin z, cos z *sînt transcendente.*

d) Dacă $g(z)$ este o funcție întreagă neconstantă, $e^{g(z)}$ este o funcție întreagă transcendentă. Deoarece e olomorfă pentru orice z finit și nu poate fi un polinom, deoarece nu are nici un zero.

Reciproc:

Teorema 4. *O funcție întreagă* $f(z)$ *ce nu are zerouri, se poate pune sub forma* $f(z) = e^{g(z)}$, *unde* $g(z)$ *este întreagă.*

Să considerăm funcția $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = h(z)$; ea este olomorfă în tot planul finit (întreagă). Putem scrie

$$\int_0^z h(z)\,dz = \log f(z) - \log f(O) = \log \frac{f(z)}{f(O)}$$

cu determinarea care se anulează în O, căci integrantul admite funcția primitivă $\log f(z)$, care este definită de-a lungul unei curbe de la O la z; $\log f(z)$ este o determinare urmărită prin continuitate, plecînd de la determinarea inițială a lui $\log f(O)$. Urmează

$$f(z) = e^{g(z)}, \quad \text{unde} \quad g(z) = \int_0^z h(z)\,dz + \log f(0)$$

este o funcție întreagă, deoarece $h(z)$ este întreagă.

e) $f(z)$ fiind o funcție întreagă neconstantă, să considerăm $\mathcal{M}(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$; $\mathcal{M}(r) \to \infty$ crescînd, cînd $r \to \infty$. Că $\mathcal{M}(r)$ este crescătoare rezultă imediat din principiul maximului modulului (cf. § 84, teorema 6). Dacă afirmația n-ar fi adevărată, adică $\mathcal{M}(r) \to M$ (finit), am avea $\mathcal{M}(r) \leqslant M$ pentru orice r și $|f(z)| \leqslant M$ pentru orice z finit; atunci $f(z) = \text{const.}$, după teorema lui Liouville.

Mai mult, $\mathcal{M}(r) \to \infty$ mai repede pentru o funcție transcendentă decît pentru un polinom, iar pentru un polinom de grad m mai repede decît pentru unul de grad $< m$.

Într-adevăr, dacă f și g sînt polinoame de grade $n > p$, avem $|f(z)/g(z)| \to \infty$ pentru $z \to \infty$. Dacă $\mathcal{M}_f(r) = f(z_1)$ și $\mathcal{M}_g(r) = g(z_2)$, avem $|f(z_2)/g(z_2)| \leqslant \mathcal{M}_f(r)/\mathcal{M}_g(r) \to \infty$ pentru că primul membru $\to \infty$.

Pentru a demonstra prima afirmație este destul să dovedim că, f fiind transcendent, $\mathcal{M}_f(r)/\mathcal{M}_g(r) \to \infty$ pentru $g = z^m$, adică $\mathcal{M}_g(r) = r^m$. Aceasta înseamnă, că dîndu-se $A > 0$, există $R > 0$ așa că

$$\mathcal{M}_f(r) > Ar^m \quad \text{pentru } r > R.$$

În cazul contrar, va exista un șir $R < r_1 < r_2 < \ldots < r_q < \ldots$ astfel că

$$\mathcal{M}_f(r_q) \leqslant Ar_q^m.$$

Dar atunci vom avea (pentru $r_q > 1$) în (5)

$$|a_n| \leqslant \frac{\mathcal{M}_f(r_q)}{r_q^n} \leqslant A r_q^{m-n} \to 0 \quad \text{pentru} \quad n > m,$$

adică $a_n = 0$ pentru $n > m$, și $f(z)$ ar fi un polinom.

În același mod se poate demonstra că, pentru o funcție întreagă transcendentă, $\log \mathcal{M}(r)/\log r \to \infty$. De aici rezultă că pentru a clasifica funcțiile întregi după modul de creștere al lui $\mathcal{M}(r)$, trebuie să considerăm de exemplu $\log_2 \mathcal{M}(r)/\log r$ (care va crește mai încet ca $\log \mathcal{M}(r)/\log r$). Limita superioară a acestui raport se numește *ordinul funcției întregi*. El este nul pentru toate polinoamele și egal cu p pentru o funcție de forma $e^{P(z)}$ cu $P(z)$ polinom de grad p.

Consecință. Dacă o funcție întreagă $f(z)$ satisface, pentru $|z| > R$ (fix), inegalitatea $|f(z)| \leqslant |\varphi(z)|$, unde $\varphi(z)$ este un polinom, atunci $f(z)$ este de asemenea un polinom, de grad cel mult egal cu al lui $\varphi(z)$.

2. O funcție uniformă se zice *meromorfă* dacă nu are alte puncte singulare la distanță finită decît poli. Mai general *o funcție meromorfă într-un domeniu* $\mathfrak{D}$ este o funcție uniformă în $\mathfrak{D}$ și care nu are în $\mathfrak{D}$ alte singularități decît poli (cel mult).

a) O funcție meromorfă poate fi:
constantă, cînd nu are singularități în planul lui Gauss,
rațională, cînd are numai poli în planul lui Gauss (sau punctul ∞ este regulat ori pol)
transcendentă, cînd punctul ∞ este singular esențial.

În această clasificare este implicată teorema:

Teorema 5. *(Liouville). O funcție uniformă, $f(z)$, care nu are alte singularități decît poli în planul lui Gauss, este o funcție rațională.*

Numărul polilor trebuie să fie finit, căci altfel ele ar admite un punct limită, care ar fi esențial. Fie α_k ($k = 1, \ldots, h$) polii (printre care poate fi și ∞), și $P_k(z)$ părțile principale. Un P_k nu are alt punct singular în planul lui Gauss decît α_k. Funcția $f(z) - \sum_k P_k(z)$ este olomorfă în orice punct care nu este pol. Într-un pol α_q avem $f(z) = P_q(z) + G_q(z)$, unde $G_q(z)$ este olomorfă în α_q; deci funcția $f(z) - \sum_k P_k(z) = G_q(z) - \sum_{k \neq q} P_k(z)$ este olomorfă în toți α_k, toți termenii din membrul al doilea fiind astfel. Ori, această funcție fiind olomorfă în tot planul lui Gauss, este o constantă C (după prima teoremă a lui Liouville) și astfel $f(z) = C + \sum_k P_k(z)$ este o funcție rațională.

b) *Observații*: 1. Părțile principale ale polilor unei funcții rationale apar în descompunerea ei în fracții simple:

$$\frac{\varphi(z)}{\Psi(z)} = P(z) + \left[\frac{C_{1,1}}{z - \alpha_1} + \cdots + \frac{C_{1,p_1}}{(z - \alpha_1)^{p_1}}\right] + \cdots$$

$$\cdots + \left[\frac{C_{h,1}}{z - \alpha_h} + \cdots + \frac{C_{h,p_h}}{(z - \alpha_h)^{p_h}}\right].$$

Polinomul $P(z)$ (care nu este o constantă cînd gradul lui φ întrece gradul lui ψ) este partea neolomorfă la ∞, deci tocmai partea principală în acest punct.

2. O funcție meromorfă transcendentă poate avea un număr finit de poli, sau o infinitate; în al doilea caz polii converg către ∞ (neputînd avea alt punct limită).

O funcție meromorfă periodică (neconstantă) nu poate fi decît transcendentă (pentru că ia o valoare dată în ∞ puncte, contrar funcțiilor raționale).

Exemplul 3. *$R(z)e^z$ este o funcție meromorfă, dacă $R(z)$ este rațională (poli în număr finit)*; ctg z *de asemenea are o infinitate de poli* ($z = k\pi \to \infty$).

c) O funcție se zice meromorfă într-un domeniu închis $\overline{\mathfrak{D}}$, dacă este meromorfă într-un domeniu $\mathfrak{D}_1 \supset \overline{\mathfrak{D}}$ și are toți polii în $\mathfrak{D}$ (deci este olomorfă pe fr $\mathfrak{D}$). O asemenea funcție nu poate avea decît un număr *finit* de poli în $\mathfrak{D}$.

d) Din ultima observație de la § 87 reiese că derivata unei funcții meromorfe este de asemenea meromorfă și are aceiași poli, cu excepția punctului ∞ cînd acesta este pol simplu al funcției date.

d') O funcție rațională de funcții meromorfe este de asemenea meromorfă. De exemplu, dacă $f(z)$ și $g(z)$ sînt meromorfe, tot așa sînt $f(z) + g(z)$, $f(z)\,g(z)$ și $1/f(z)$; în primele două cazuri funcția considerată are cel mult polii funcțiilor $f(z)$ și $g(z)$; în ultimul ea are ca poli și zerourile lui $f(z)$.

e) Principiul de identitate a funcțiilor olomorfe într-un domeniu se aplică și funcțiilor meromorfe. Într-adevăr:

Fie $f(z)$, $g(z)$ meromorfe în $\mathfrak{D}$ și egale într-o mulțime de puncte care admit un punct limită α din $\mathfrak{D}$. Putem scrie într-o vecinătate V_α

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^p},\quad g(z) = \frac{\psi(z)}{(z-\alpha)^q},$$

unde $\varphi(z)$, $\psi(z)$ sînt olomorfe și nenule în α; deci dacă punctul α este regulat pentru f, se va lua $p = 0$. Avem

$$(z-\alpha)^q\varphi(z) - (z-\alpha)^p\psi(z) = 0$$

pe mulțimea dată, și deci primul membru fiind o funcție olomorfă, este identic unul în V_α. Astfel $f = g$ în V_α și în tot domeniul $\mathfrak{D}$, unde f și g sînt amîndouă olomorfe (conform aceluiași principiu). Într-un pol oarecare β al unei funcții, f și g au aceeași limită, deci β este pol pentru amîndouă (deoarece $f = g$ într-o vecinătate V_β). Mai mult, β are același ordin pentru ambele funcții, căci dacă de exemplu $(z-\beta)^p f(z)$ are o limită finită și diferită de zero (adică β are ordinul p pentru f), aceeași limită o are și $(z-\beta)^p g(z)$. Așadar:

O funcție meromorfă într-un domeniu este determinată prin valorile pe care le ia pe o mulțime de puncte avînd un punct limită în acel domeniu.

Observație. Același raționament arată că, principiul de identitate se poate aplica și la două funcții uniforme oarecare, cel puțin una din ele avînd numai singularități izolate în domeniul $\mathfrak{D}$, cu condiția ca mulțimea de puncte în care funcțiile sînt egale să aibă un punct limită regulat sau pol.

Teorema 6. *Dacă z_0 este un punct regulat sau singular izolat al unei funcții uniforme $f(z)$, cercul de convergență (exterior în cazul al doilea) al dezvoltării Taylor sau Laurent în jurul punctului z_0 este acela care trece prin punctul singular cel mai apropiat de z_0.*

Într-adevăr, dezvoltarea este sigur valabilă în acest cerc C; dacă ar fi valabilă într-un cerc C' mai mare, ea ar reprezenta o funcție $\varphi(z)$ care este egală cu $f(z)$ în cercul C și este olomorfă în C', cu excepția eventuală a lui z_0. Deci am avea, după principiul de mai sus, $f(z) = \varphi(z)$ și în C', ceea ce este imposibil fiindcă C' cuprinde puncte singulare pentru f, care nu sînt singulare pentru φ.

Teorema 7. *Dacă o funcție meromorfă într-un domeniu $\mathfrak{D}$ are derivata nulă în acel domeniu, ea se reduce la o constantă.*

Fie $\Delta \subset \mathfrak{D}$ un domeniu simplu conex, în care $f(z)$ este olomorfă. Avem în Δ

$$0 = \int_{z_0}^{z} f'(z)\,dz = f(z) - f(z_0),$$

adică $f(z) = C$; din cauza principiului identității, această relație este adevărată în tot domeniul dat $\mathfrak{D}$.

§ 89. Metoda reziduurilor și aplicațiile ei

1. Fie $f(z)$ o funcție uniformă și α un punct regulat sau singular izolat; deci $f(z)$ olomorfă într-o vecinătate $V_\alpha - \alpha$. Se numește după Cauchy, *reziduul* funcției în punctul α:

$$\mathcal{R}_f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz, \tag{6}$$

integrala fiind luată pe un cerc $\gamma \subset V_\alpha$ și de centru α, în sens direct față de α.

Reziduul nu depinde de alegerea cercului γ în aceste condiții, întrucît dacă γ' este un alt cerc de același fel, $f(z)$ este olomorfă în coroana dintre γ și γ', și avem $\int_\gamma f\,dz = \int_{\gamma'} f\,dz$ (teorema lui Cauchy). Este de asemenea ușor de văzut că cercul poate fi înlocuit prin orice curbă simplă, închisă și rectificabilă, care înconjoară punctul α și este conținută în V_α. Se va compara această curbă cu un cerc γ conținut în domeniul determinat de curbă, în care se află α.

Definiția se aplică și punctului ∞; cercul γ va fi atunci un cerc de centru O în V_∞, parcurs în sens indirect față de O (adică direct față de ∞).

Nu se definește reziduul pentru puncte singulare neizolate.

Denumirea de reziduu (= rămășiță, diferență) vine de la faptul că Cauchy considera diferența a două integrale luate pe arce $\overset{\frown}{z_0\zeta z_1}$, $\overset{\frown}{z_0\zeta' z_1}$ ale unei curbe γ ce înconjoară punctul α; evident, această diferență este egală cu integrala luată pe γ.

Calculul reziduurilor

2. Pe baza noțiunii de reziduu Cauchy a creat o metodă de calcul și investigație care are numeroase aplicații în teoria elementară a funcțiilor uniforme. Ne vom opri mai întîi asupra calculului reziduurilor.

Într-un punct regulat, *la distanță finită*, reziduul este nul, în virtutea teoremei lui Cauchy.

Fiind dat un punct singular izolat α, la distanță finită, să considerăm dezvoltarea Laurent corespunzătoare:

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n (z - \alpha)^n.$$

Formula ce exprimă coeficienții a_n ne dă pentru $n = -1$

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\, dz;$$

avem deci

$$\mathcal{R}(\alpha) = a_{-1}. \tag{7}$$

În punctul ∞, regulat sau singular izolat, avem de asemenea o dezvoltare Laurent,

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n z^n,$$

ai cărei coeficienți se exprimă prin aceeași formulă, integrala fiind luată în sens direct. Cum în definiția reziduului această integrală este luată în sensul indirect, avem

$$\mathcal{R}(\infty) = -a_{-1}. \tag{7'}$$

În rezumat:

Teorema 1. *Reziduul într-un punct singular izolat α la distanță finită este egal cu coeficientul lui $\frac{1}{z-\alpha}$ din dezvoltarea Laurent; iar în punctul ∞ este egal cu coeficientul lui $1/z$ al dezvoltării Laurent, luat cu semnul schimbat.*

Putem deci avea reziduu diferit de zero la ∞, chiar dacă acest punct este regulat (căci a_{-1} aparține în acest caz părții regulate a dezvoltării în serie de puteri).

3. Avem pînă acum două metode generale pentru calculul reziduurilor:

a) evaluînd integrala (6);

b) căutînd coeficientul a_{-1} din dezvoltarea în serie de puteri în jurul punctului considerat.

În afară de acestea, în cazul unui pol la distanță finită, ne putem folosi de următoarele metode particulare:

c) dacă α este un pol de ordin m, $(z-\alpha)^m f(z)$ este olomorfă în α și coeficientul lui $(z-\alpha)^{m-1}$ din dezvoltarea Taylor a acestei funcții este evident coeficientul lui $\frac{1}{z-\alpha}$ din dezvoltarea Laurent a funcției $f(z)$. Deci

$$\mathcal{R}(\alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-\alpha)^m f(z)] \right\}_{z=\alpha} \tag{8}$$

sau sub o formă uneori mai comodă:

$$\mathcal{R}(\alpha) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to \alpha} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-\alpha)^m f(z)]. \tag{8'}$$

Este de observat că în (8) nu putem aplica regula de derivarea produsului $(z-\alpha)^m f(z)$ (regula lui Leibniz) pentru $z=\alpha$, fiindcă $f(z)$ nu este olomorfă în α.

Exemplul 1. *Pentru funcția* $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{(z-\alpha)^m}$ *cu* $\varphi(z)$ *olomorfă și diferită de zero în* $z=\alpha$, *avem după* (8), $\mathcal{R}(\alpha)=\dfrac{1}{(m-1)!}\varphi^{(m-1)}(\alpha)$.

d) În cazul unui pol simplu avem în particular:

$$\mathcal{R}(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)f(z) \tag{9}$$

e) Dacă $f(z)$ este olomorfă și diferită de zero în α, iar $g(z)$ are un pol simplu în α,

$$\mathcal{R}_{fg}(\alpha)=f(\alpha)\mathcal{R}_g(\alpha)\ ^{15}). \tag{10}$$

Căci

$$\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)fg=\lim_{z\to\alpha}f\cdot\lim_{z\to\alpha}(z-\alpha)g=f(\alpha)\mathcal{R}_g(\alpha).$$

f) Dacă $g(z)$ are un zero simplu în α,

$$\mathcal{R}_{1/g}(\alpha)=\frac{1}{g'(\alpha)}, \tag{11}$$

deoarece

$$\lim_{z\to\alpha}\frac{z-\alpha}{g(z)}=\lim_{z\to\alpha}\frac{1}{\dfrac{g(z)-g(\alpha)}{z-\alpha}}=\frac{1}{g'(\alpha)}.$$

Ținînd seamă de (10) urmează

$$\mathcal{R}_{f/g}(\alpha)=\frac{f(\alpha)}{g'(\alpha)}, \tag{12}$$

unde $f(z)$ este olomorfă iar $g(z)$ are un zero simplu în α.

Exemple, 2. $f=1/\sin z$ *are polii* $z=k\pi$ *și aplicînd* (11), *avem*

$$\mathcal{R}(k\pi)=\frac{1}{\cos k\pi}=(-1)^k.$$

3. $f(z)=\operatorname{cotg} z$ *are polii simpli* $z=k\pi$ *(care sînt zerouri simple ale lui* $\sin z$); *avem aplicînd* (12)

$$\mathcal{R}(k\pi)=\frac{\cos(k\pi)}{\cos(k\pi)}=1.$$

---

[15]) se aplică și cînd $\alpha=\infty$.

4. Metoda reziduurilor se bazează pe teorema următoare, care nu este decît o aplicație imediată a teoremei lui Cauchy:

Teorema reziduurilor. *Dacă funcția $f(z)$ are un număr finit de puncte singulare α_k într-un domeniu $\mathfrak{D}$ limitat de curba simplă, închisă și rectificabilă C, și este olomorfă pe această curbă, atunci*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathcal{R}(\alpha_k), \tag{13}$$

curba C fiind parcursă în sensul pozitiv față de domeniu, și suma din membrul al doilea întinzîndu-se și la punctul ∞ cînd acesta face parte din $\mathfrak{D}$.

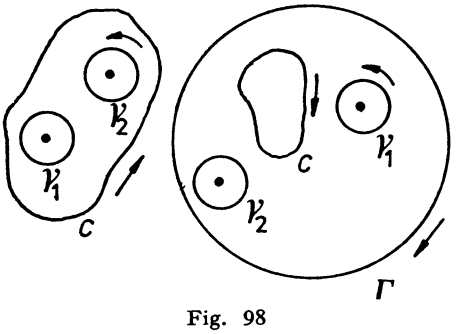

Fig. 98

Să scoatem din domeniul considerat $\mathfrak{D}$, cercuri γ_k de centre α_k, atît de mici încît ele să fie conținute în $\mathfrak{D}$ și să nu aibă puncte comune. Dacă D este domeniul rămas, $f(z)$ va fi olomorfă în $\bar{D}$. Domeniul $\mathfrak{D}$ fiind presupus mai întîi mărginit (interior curbei C), vom putea aplica teorema lui Cauchy pentru domenii multiplu complexe:

$$\int_C f\,dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f\,dz,$$

unde C este parcursă în sens direct față de $\mathfrak{D}$ iar γ_k în sens indirect față de $\mathfrak{D}$, deci direct față de α_k (vezi fig. 98). Avem deci, după (6) formula (13).

Dacă domeniul $\mathfrak{D}$ nu este mărginit, el conține punctul ∞ (acesta nu poate fi pe curba C, care este rectificabilă și deci mărginită. Teorema Cauchy nu poate fi aplicată domeniului D (pentru că ea presupune un domeniu mărginit). Să ducem însă un cerc Γ de centru O, care să cuprindă în interiorul său curba C și cercurile γ_k; curbele C, γ_k și Γ vor limita un domeniu mărginit în care $f(z)$ este olomorfă și vom avea:

$$\int_C f\,dz = \sum_k \int_{\gamma_k} f\,dz + \int_\Gamma f\,dz$$

dacă curba C și cercul Γ sînt parcurse în sens indirect (direct față de ∞ (vezi fig. 98)). Cum $f(z)$ este olomorfă în exteriorul cercului Γ, cu eventuala excepție a punctului ∞, $\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma f\,dz = \mathcal{R}(\infty)$ și astfel formula (13) rămîne valabilă, cu condiția de a lua în membrul al doilea și reziduul punctului ∞.

Observație. Teorema rămîne valabilă dacă frontiera C a domeniu lui $\mathfrak{D}$ se compune din mai multe curbe simple, închise și rectificabile.

Dacă $f(z)$ este o funcție întreagă, funcția $f(z)$ cotg z are aceiași poli la distanță finită, cu reziduul $f(k\pi)$; se aplică (10).

Exemplul **4.** *Dacă $f(z)$ este o funcție întreagă, C este o curbă care conține în interior numai punctele $z = 1, 2, \ldots, n$, atunci*

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_C f(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz.$$

Se aplică (13), (10) și exemplul 3.

Teorema 2. *Suma reziduurilor unei funcții uniforme cu un număr finit de singularități (în tot planul) este egală cu zero.*

Aceasta se obține aplicînd teorema precedentă exteriorului unei curbe aleasă astfel ca pe ea și în interiorul ei funcția să fie olomorfă.

Exemplul **5.** $\dfrac{e^{iz}}{e^{iz}-1}$ *are polii simpli* $2k\pi$ *cu* $R(2k\pi) = -i$.

În exemplele 2, 3, 5, ∞ este punct limită de poli; pentru un asemenea punct singular nu se definește reziduul.

Exemplul **6.** *Să considerăm funcția rațională* $f(z) = \varphi(z)/\psi(z)$. Vom aplica teorema precedentă funcției $\varphi(t)/(z-t)\psi(t)$, unde z este diferit de rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ ale lui ψ. Funcția are polii $t=z$ simplu și $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ de multiplicități $p_1, p_2, \ldots$ egale cu multiplicitățile lor ca zerouri ale lui ψ (dacă presupunem că φ și ψ sînt relativ primi). Avem $\mathcal{R}(z) = -\varphi(z)/\psi(z)$ (aplicăm (12)). Pentru a calcula $\mathcal{R}(\alpha_1)$ vom forma dezvoltarea

$$\frac{1}{z-t} = \frac{1}{z-\alpha_1-(t-\alpha_1)} = \frac{1}{z-\alpha_1} + \frac{t-\alpha_1}{(z-\alpha_1)^2} + \ldots,$$

$$f(t) = P_1(t-\alpha_1) + \frac{b_{1,1}}{t-\alpha_1} + \ldots + \frac{b_{1,p_1}}{(t-\alpha_1)^{p_1}}.$$

deci

$$\mathcal{R}(\alpha_1) = \frac{b_{1,1}}{z-\alpha_1} + \ldots + \frac{b_{1,p_1}}{(z-\alpha_1)^{p_1}},$$

În $t = \infty$ avem

$$-\frac{1}{t-z} = \frac{1}{t} + \frac{z}{t^2} + \ldots,$$

$$f(t) = P(1/t) + c_1 t + \ldots + c_q t^q \quad (q = m-n),$$

deci

$$\mathcal{R}(\infty) = c_1 z + \ldots + c_q z^q.$$

Astfel, teorema precedentă ne dă

$$\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = c_1 z + \ldots + c_q z^q + \frac{b_{1,1}}{z-\alpha_1} + \ldots + \frac{b_{1,p}}{(z-\alpha_1)^{p_1}} + \frac{b_{2,1}}{z-\alpha_2} + \ldots + \frac{b_{2,p_2}}{(z-\alpha_2)^{p_2}} + \ldots$$

Care este tocmai descompunerea funcției raționale în fracții simple.

Exemplul **7.** *În punctul* ∞ *funcțiile* e^z, sin z, cos z *au reziduul* $\mathcal{R}(\infty) = 0$. *Mai general o funcție întreagă are reziduul* $\mathcal{R}(\infty) = 0$. *Funcția* $1/z\,e^z$ *are reziduul* $\mathcal{R}(\infty) = -1$, *căci dezvoltările Laurent în acest punct sînt*

$$e^z = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}, \quad \frac{1}{z}e^z = \frac{1}{z} + 1 + \ldots$$

Funcția $e^{1/z} = \sum_0^\infty \dfrac{1}{n!\,z^n}$ are $\mathcal{R}(0) = 1$, $\mathcal{R}(\infty) = -1$.

Generalizare a teoriei reziduurilor. *Fie $f(z)$ olomorfă într-un domeniu $\mathfrak{D}$ de conexiune finită, cu excepția unui număr finit de puncte singulare α_k din $\mathfrak{D}$; C fiind o curbă închisă și rectificabilă (nu neapărat simplă) din $\mathfrak{D} - \sum_k \alpha_k$, avem*

$$(6') \qquad \int_C f(z)\,dz = \sum_k m_k \omega_k + 2\pi i \sum_k n_k \mathcal{R}(\alpha_k),$$

unde ω_k sînt modulii de periodicitate relativi la componentele fr $\mathfrak{D}$, *iar m_k și n_k reprezintă numărul rotațiilor curbei C în jurul acestor componente și a punctelor singulare.* (Punctul ∞ nu se consideră în acest enunț printre punctele α_k).

Aplicații la calculul integralelor

5. Teorema reziduurilor în condițiile precizate se aplică în mod direct la calculul integralelor pe curbe închise, reducîndu-l la un calcul de reziduuri.

Exemple **8.** $I = \int_C \frac{dz}{1+z^4}$, *$C$ fiind elipsa*

$$F(x, y) = x^2 - xy + y^2 + x + y = 0.$$

Integrandul are ca puncte singulare polii simpli

$$\alpha = \cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i \sin\frac{\pi + 2k\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\delta_1 + i\delta_2) \text{ unde } \delta_1 = \pm 1,\ \delta_2 = \pm 1;$$

pentru aceste puncte

$$F = 1 - \frac{\delta_1\delta_2}{2} + \frac{\delta_1 + \delta_2}{\sqrt{2}}$$

și avem $F < 0$ numai pentru $\delta_1 = \delta_2 = -1$. Astfel, aplicînd (12):

$$I = 2\pi i \mathcal{R}\left(-\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi i}{4\alpha^3} = -\frac{\pi i}{2}\alpha = \frac{\pi(i-1)}{2\sqrt{2}}.$$

9. $I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta$, *$f$ fiind o funcție rațională.*

Exprimînd $\cos\theta$, $\sin\theta$ prin exponențiala $z = e^{i\theta}$ (de unde $dz = iz\,d\theta$), obținem

$$I = \int_C \varphi(z)\,dz \qquad C \text{ cercul } |z| = 1$$

cu $\varphi(z)$ funcție rațională.

Aplicație

10. $I = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^n \cos n\theta}{a + b\cos\theta}\,d\theta$

n întreg, $a > b$ reali, $a > 0$ și $|b| < a$ (această restricție face integrandul mărginit).

Este avantajos să scriem

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{(1+\cos\theta)^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)}{a + b\cos\theta}\,d\theta;$$

integrala adăugată este nulă (cum se vede schimbînd θ în $2\pi - \theta$: $\int_0^{2\pi} = \int_{2\pi}^0 = -\int_0^{2\pi}$).

Avem deci

$$I = \frac{1}{2^{n-1}\mathrm{i}} \int_C \frac{(z+1)^{2n}\,\mathrm{d}z}{b(z^2+1)+2az} \qquad |z| = 1.$$

Integrandul are polul simplu $\alpha = \dfrac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ în cercul $|z| < 1$ (căci α' fiind celălalt pol, avem

$$|\alpha| = \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{|b|} < \frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{|b|} = |\alpha'|).$$

Urmează aplicînd (12):

$$I = \frac{\pi}{2^{n-2}} \cdot \frac{(\alpha+1)^{2n}}{2(b\alpha+a)} = \frac{\pi}{2^{n-1}\sqrt{a^2-b^2}} \left(\frac{b-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)^{2n}.$$

11. *Să considerăm o integrală de forma*

$$I = \int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\ \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

f funcție rațională.

Exprimînd cos θ, sin θ prin exponențiale și punînd $e^{\mathrm{i}\theta} = z$, $\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}z/\mathrm{i}z$, obținem

$$I = \int_C \varphi(z)\,\mathrm{d}z$$

C fiind cercul $|z| = 1$.

Aplicație: $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}$.

Obținem

$$I = \frac{2}{\mathrm{i}} \int_C \frac{\mathrm{d}z}{bz^2+2az+b}.$$

I există numai dacă a/b nu este real cu $|a/b| \leqslant 1$ (cînd integrandul nu este mărginit în intervalul $(0, 2\pi)$). Atunci $bz^2 + 2az + b = 0$ are două rădăcini:

$$\alpha = \frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b} \quad \text{și} \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{-a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

Este exclus ca $|\alpha| = 1$. Deci o rădăcină va fi în C; dacă aceasta este α (adică $|\alpha| < 1$), avem $\mathcal{R}(\alpha) = \dfrac{1}{2(b\alpha+a)} = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}$, deci $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$. Iar dacă $|\alpha| > 1$, vom avea $I = -\dfrac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$.

12. $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{a^2+\sin^2\theta}$, $a > 0$.

Avem

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{a\,\mathrm{d}\theta}{a^2+\sin^2\theta} = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{a-\mathrm{i}\sin\theta}{a^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{i}\sin\theta}{a^2+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta,$$

sau, ultima integrală fiind nulă,

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+\mathrm{i}\sin\theta} = \frac{1}{2\mathrm{i}}\int_C \frac{\mathrm{d}z}{-1+2az+z^2},$$

C fiind cercul $|z| = 1$ (vezi exemplul 11). Acest cerc conține un singur pol al integrandului: $\alpha = -a + \sqrt{a^2 + 1}$, cu reziduul $\mathcal{R}(\alpha) = \dfrac{1}{2(\alpha + a)} = \dfrac{1}{2\sqrt{a^2 + 1}}$. Astfel

$$I = \frac{\pi}{2\sqrt{a^2 + 1}}.$$

13. $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{(1 + 2\cos\theta)^n \cos n\theta}{1 - r - 2r\cos\theta}\, d\theta$, $-1 < r < 1/3$ *(restricția face ca integrandul să fie mărginit)*.

I este partea reală a integralei

$$J = \frac{1}{i}\int_C \frac{(1 + z + z^2)^n}{(1 - r)z - r(1 + z^2)}\, dz \quad \text{pe cercul} \quad |z| = 1$$

(J se obține din I înlocuind $\cos n\theta$ cu $e^{in\theta} = \cos n\theta + \sin n\theta$). Dacă $r \neq 0$, ecuația $(1 - r)z - r(1 + z^2) = 0$ are două rădăcini

$$\alpha = \frac{1 - r - \sqrt{(1 + r)(1 - 3r)}}{2r} \quad \text{și} \quad \frac{1}{\alpha}.$$

Deoarece $-1 < r < 1/3$, aceste rădăcini sînt reale și distincte. Una singură este în C (produsul lor fiind $= 1$), și anume α (pentru că are numărătorul pozitiv și mai mic decît al celeilalte). Avem

$$\mathcal{R}(\alpha) = \frac{(1 + \alpha + \alpha^2)^n}{1 - r - 2r\alpha}$$

unde $1 - r - 2r\alpha = \sqrt{1 - 2r - 3r^2}$ și din ecuația precedentă

$$1 + \alpha + \alpha^2 = 1 + \alpha + \frac{(1 - r)\alpha - r}{r} = \frac{\alpha}{r}.$$

Deci $\mathcal{R}(\alpha) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2r - 3r^2}}\left(\dfrac{\alpha}{r}\right)^n$. Astfel

$$J = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - 2r - 3r^2}}\left(\frac{1 - r - \sqrt{1 - 2r - 3r^2}}{2r^2}\right)^n = I.$$

Pentru $r = 0$ se găsește imediat $J = 2\pi = I$, care este valoarea limită a expresiei precedente.

6. Cînd avem de calculat o integrală pe un arc de curbă C_0 simplu și rectificabil, dar nu închis, putem încerca să formăm o curbă închisă $C_0 \cup C_1$ realizînd condițiile teoremei reziduurilor astfel ca integrala pe C, să se poată calcula ușor sau să aibă o relație simplă cu integrala căutată; în ultimul caz integrala cerută se va determina dintr-o ecuație.

Integrala propusă poate fi improprie, adică limita unei integrale propriu zise: $\displaystyle\int_{C_0} = \lim_{C' \to C_0} \int_{C'}$. Atunci și arcul adăugat va fi variabil și vom putea calcula integrala improprie dacă vom cunoaște limita $\displaystyle\int_{C_1}$ și dacă suma reziduurilor din domeniul $\mathcal{D}$ (variabil) are de asemenea o limită cunoscută; vom avea:

$$\int_{C_0} f\, dz = -\lim \int_{C_1} f\, dz + 2\pi i \lim \sum \mathcal{R}(\alpha_k).$$

În cazul cel mai simplu, punctele singulare α_k rămîn într-un domeniu mărginit și curba $C = C_0 \cup C_1$ le va putea închide pe toate în tot cursul variației sale; atunci C va varia continuu și $\sum \mathcal{R}(\alpha_k)$ va rămîne constantă. Dacă însă există puncte singulare la distanță oricît de mare (de exemplu convergînd la ∞), curba C_1 va trebui să le evite, deci va varia discontinuu (de exemplu va depinde de un parametru n (ce ia valori întregi $n = 1, 2, \ldots$); atunci $\sum \mathcal{R}(\alpha_k)$ va fi suma parțială a unei serii, care va trebui să fie convergentă.

Aplicațiile de acest gen, cele mai frecvente, se referă la calculul integralelor improprii reale. Integrandul fiind $\varphi(x)$, se va considera o funcție $f(z)$ care să se reducă la $\varphi(x)$ pe axa reală, sau care să aibă partea reală ori cea imaginară egală cu $\varphi(x)$ pe axa reală (în care caz se vor obține două integrale reale). Curba C_0' va consta dintr-un segment de pe axa reală, care este făcut să tindă către intervalul de integrare C_0; curba C_1 va fi formată de obicei din segmente de dreaptă sau arce de cerc și va trebui să satisfacă condițiile de mai sus. De exemplu în cazul unei integrale $\int_0^a \varphi(x)dx$, improprie în $x=0$, se poate lua un contur de integrare de forma următoare:

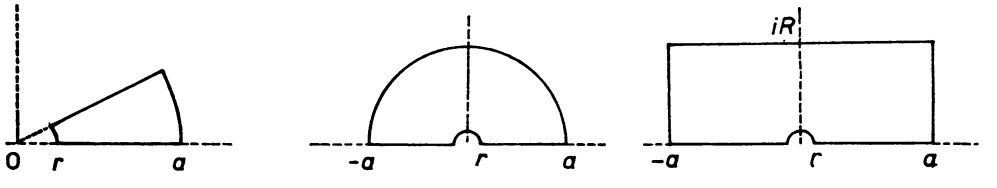

Fig. 99

unde $r \to 0$ și $R \to \infty$ (vezi fig. 99). Pentru ca metoda să reușească va trebui să putem calcula, sau să putem exprima cu ajutorul integralei propuse, integralele referitoare la partea C_1 a conturului, respectiv limitele acestor integrale.

În cazul unei integrale $\int_0^\infty \varphi(x)\, dx$, improprie la ambele limite, vom lua un contur de forma precedentă, unde vom face $r \to 0$ și $a \to \infty$. Dacă integrala nu este improprie în $x = 0$ nu va fi nevoie să excludem puntul $z = 0$ din contur, decît dacă el este singular pentru funcția $f(z)$ aleasă (vezi fig. 100).

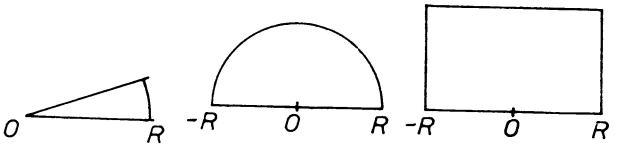

Fig. 100

Tot aceste contururi convin și pentru o integrală $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx$, improprie la ambele limite; în acest caz metoda ne dă limita integralei $\int_{-R}^{R} \varphi(x)\, dx$, deci nu ne asigură că integrala improprie există (în acest scop trebuie să existe limita $\int_{-R'}^{R} \varphi\, dx$ cînd $R \to \infty$ și $R' \to \infty$ independent); existența ei va trebui stabilită direct.

Exemplul **14.**

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} \pi x}\, dx \quad (a \text{ real}).$$

Vom lua $f(z) = \dfrac{\cos az}{\operatorname{ch} \pi z}$. Această funcție are polii simpli $z = (2k+1)\dfrac{i}{2}$. Pentru a evita considerarea unei serii de reziduuri (care de altfel este divergentă), vom alege conturul din figura 101, unde $R \to \infty$.

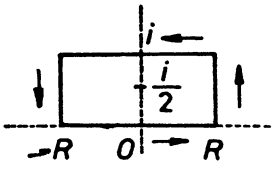

Fig. 101

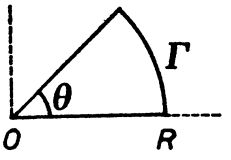

Fig. 102

Pe latura $z = R + iy \quad (0 \leqslant y \leqslant 1)$

$$\left| i\int_0^1 \frac{\cos a(R+iy)}{\operatorname{ch} \pi(R+iy)}\, dy \right| = \left| \int_0^1 \frac{e^{ia(R+iy)} + e^{-ia(R+iy)}}{e^{\pi(R+iy)} + e^{-\pi(R+iy)}}\, dy \right| < \frac{\int_0^1 (e^{-ay} + e^{ay})\, dy}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}} \to 0.$$

(S-a întrebuințat teorema 7 din § 73). La fel pe latura $z = -R + iy \quad (0 \leqslant y \leqslant 1)$. Rămîne

$$2\int_0^R \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} \pi x}\, dx + \int_0^R \left[-\frac{\cos a(i+x)}{\operatorname{ch} \pi(i+x)} - \frac{\cos a(i-x)}{\operatorname{ch} \pi(i-x)} \right] dx \to 2\pi i R\left(\frac{i}{2}\right).$$

Observînd formulele

$$\operatorname{ch} \pi(x \pm i) = -\operatorname{ch} \pi x, \quad \cos a(x \pm i) = \cos ax \operatorname{ch} a \mp \sin ax \operatorname{sh} a,$$

obținem

$$2(1 + \operatorname{ch} a)\int_0^R \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} \pi x}\, dx \to 2\pi i\, R\left(\frac{i}{2}\right).$$

În sfîrșit

$$\mathcal{R}\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\cos \dfrac{ai}{2}}{\pi \operatorname{sh} \dfrac{\pi i}{2}} = \frac{\operatorname{ch} \dfrac{a}{2}}{\pi i \operatorname{sh} \dfrac{\pi}{2}} = \frac{\operatorname{ch} \dfrac{a}{2}}{\pi i}.$$

Așadar

$$I = \frac{1}{2 \operatorname{ch} \dfrac{a}{2}}.$$

15. *Să se calculeze*

$$I_1 = \int_0^{\infty} e^{-x^2 \cos 2\theta} \cos (x^2 \sin 2\theta)\, dx$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2 \cos 2\theta} \sin (x^2 \sin 2\theta)\, dx \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{4}.$$

Se observă că integranzii din I_1 și $-I_2$ sînt partea reală și cea imaginară a funcției e^{-z^2}, pe semidreapta $z = x(\cos \theta + i \sin \theta)$ $(0 \leqslant x < \infty)$. Această funcție fiind olomorfă în tot planul la distanță finită, vom folosi conturul din figura 102, cu $R \to \infty$.

Pe arcul de cerc $z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \theta)$ avem (teorema 7 din § 73).

$$\left|\int_\Gamma e^{-z^2}\,dz\right| < R\int_0^\theta e^{-R^2\cos 2\varphi}\,d\varphi < R\int_0^\theta e^{-R^2\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)}\,d\varphi = \frac{1}{R}\left[e^{R^2\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-\frac{\pi}{4}R^2}\right] \to 0$$

$$\left(\text{deoarece } \theta \leqslant \frac{\pi}{4}\right).$$

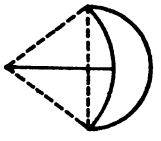

Fig. 103

Am aplicat inegalitatea

$$\sin\varphi > \frac{\varphi}{2} \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right),$$

care ne dă

$$\cos 2\varphi = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi\right) > \frac{\pi}{4} - \varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{4}\right).$$

Ea exprimă că aria sectorului de deschidere φ a cercului de rază 1 este mai mică decît aria paralelogramului construit pe razele ce limitează sectorul. O inegalitate mai precisă este

$$\sin\varphi > \frac{2}{\pi}\varphi \quad \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right).$$

Aceasta spune că lungimea de arc 2φ pe cercul de rază 1 este mai mică decît lungimea semicercului descris pe coarda acestui arc ca diametru (vezi figura 103).

Cunoscîndu-se $\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, avem

$$\int_0^\infty e^{-x^2\cos^2\theta}[\cos(x^2\sin 2\theta) - i\sin(x^2\sin 2\theta)]e^{i\theta}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

de unde, separînd realul de imaginar

$$I_1\cos\theta + I_2\sin\theta = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad I_1\sin\theta - I_2\cos\theta = 0,$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\theta, \quad I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sin\theta.$$

Pentru $\theta = \pi/4$ obținem integrala lui Fresnel:

$$\int_0^\infty \cos x^2\,dx = \int_0^\infty \sin x^2\,dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{4}.$$

7. Cu privire la limita unei integrale luată pe o curbă variabilă tinzînd către un punct sau îndepărtîndu-se la ∞, se pot formula unele criterii aplicabile în multe cazuri.

A. *Fie $C(R)$ un arc de cerc de centru O, deschidere constantă θ și rază R tinzînd la ∞ în mod continuu sau discontinuu; $f(z)$ o funcție olomorfă pe arcele $C(R)$. Dacă*

$$\lim_{R\to\infty} zf(z) = \lambda \text{ pe arcele } C(R),$$

atunci

$$\lim_{R\to\infty} \int_C f(z)\,dz = i\theta\lambda. \tag{13}$$

Prin ipoteză $|(zf)_C - \lambda| < \varepsilon/\theta$ pentru $R = |z| > \rho(\varepsilon)$.

Dacă pe arcul $C(R)$ avem $z = Re^{i\varphi}$ $(\theta_1 \leqslant \varphi \leqslant \theta_2)$ — unde $\theta_1 - \theta_2 = \theta$ — putem scrie

$$\left|\int_C f(z)\,dz - i\theta\lambda\right| = \left| i\int_{\theta_1}^{\theta_2} (zf-\lambda)_C\,d\varphi\right| < \theta\frac{\varepsilon}{\theta} = \varepsilon$$

pentru $R > \rho(\varepsilon)$, ceea ce demonstrează afirmația.

Observație. În cazul cînd $C(R)$ este un arc de curbă rectificabil oarecare, depinzînd de parametrul R și văzut din O sub unghiul constant θ, formula (13) subsistă cu condiția suplimentară: $|z| \geqslant R$ pe arcul $C(R)$. Într-adevăr vom avea $|zf(z) - \lambda| < \varepsilon/\theta$ pentru $|z| > \rho(\varepsilon)$ și z pe arcele $C(R)$, deci $|(zf)_C - \lambda| < \varepsilon/\theta$ pentru $R > \rho(\varepsilon)$, pe arcul $C(R)$.

Se mai poate vedea că, în cazul cînd $\lambda = 0$, este destul ca unghiul θ să fie mărginit (celelalte condiții fiind menținute).

În unele cazuri, în care extremitățile arcului de cerc $C(R)$ variază pe două semidrepte fixe $\arg z = \theta_1, \theta_2$, se poate întîmpla ca $\lim_{z\to\infty} zf(z)$ să nu existe decît dacă excludem din unghiul celor două semidrepte unul sau mai multe unghiuri arbitrar de mici în jurul unor direcții excepționale, pe care limita nu există. Așa este cazul funcției e^{iz}, cu direcțiile excepționale pe axa reală. Pentru asemenea cazuri avem criteriul următor:

B. *Fie $C(R)$ un arc de cerc de centru O, ale cărui extremități descriu laturile unui unghi de deschidere θ și a cărui rază $R \to \infty$, continuu sau discontinuu, $f(z)$ fiind olomorfă pe arcele $C(R)$.*
Dacă

1° $$\lim_{R\to\infty} zf(z) = \lambda \quad \text{pe arcele } C(R)$$

cu excepția unor unghiuri arbitrar de mici, în jurul unor direcții fixe, în număr finit, și

2° *există un $M > 0$ astfel că*

$$|zf(z)| \leqslant M \quad \text{pe arcele } C(R)$$

începînd de la un R suficient de mare, atunci este valabilă formula (13).

Evident este destul să considerăm cazul cînd în unghiul dat $\theta_1 \leqslant \varphi \leqslant \theta_2$ avem numai o direcție excepțională $\varphi = \theta_2$. Fiind dat $\varepsilon > 0$, fie $\eta = \dfrac{\varepsilon}{\theta + M + |\lambda|}$.

Condiția 1° este satisfăcută în unghiul $\theta_1 \leqslant \varphi \leqslant \theta_2 - \eta$ și vom avea

$$|(zf)_C - \lambda| < \eta \quad \text{pentru } R > \rho(\varepsilon).$$

Deci, ca mai sus,

$$\left|\int_C f(z)\,dz - i\theta\lambda\right| \leqslant \left|\int_{\theta_1}^{\theta_2-\eta} (zf-\lambda)_C\,d\varphi\right| + \left|\int_{\theta_2-\eta}^{\theta_2} (zf-\lambda)_C\,d\varphi\right| <$$

$$< \eta(\theta - \eta) + \eta(M + |\lambda|) < \eta(\theta + M + |\lambda|) = \varepsilon$$

pentru $R > \rho(\varepsilon)$, ceea ce demonstrează formula (13).

Pentru arce care tind spre un punct, avem criteriile următoare, care se demonstrează la fel:

A'. *Fie $C(r)$ un arc de cerc de centru α, deschidere constantă θ și rază r tinzînd la 0; $f(z)$ olomorfă pe arcele $C(r)$. Dacă*

$$\lim_{z\to\alpha} zf(z) = \lambda \quad \textit{pe arcele } C(r)$$

atunci

$$\lim_{r\to 0} \int_C f(z)\,dz = i\theta\lambda \tag{14}$$

B'. *Fie $C(r)$ un arc de centru α, ale cărui extremități descriu laturile unui unghi de deschidere θ și a cărui rază $r \to 0$; $f(z)$ olomorfă pe arcele $C(r)$. Dacă*

1° $$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lambda \quad \textit{pe arcele } C(r)$$

cu excepția unor unghiuri arbitrar de mici, în jurul unor direcții fixe, în număr finit, și

2° *există un $M > 0$ astfel că*

$$|zf(z)| \leqslant M \quad \textit{pe arcele } C(r)$$

începînd de la un r suficient de mic, atunci este valabilă formula (14).

Exemplul 16. $I = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$.

Integrandul este partea imaginară a funcției $\frac{e^{iz}}{z}$ pe axa reală. Luăm $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ și conturul alăturat (fig. 104), cu $R \to \infty$ (care evită polul $z = 0$). Alegerea lui $f(z)$ are avantajul că există $\lim_{R\to\infty} zf(z)$ pe arcul Γ, pe cînd această limită n-ar exista pentru funcția $\frac{\sin z}{z}$; apoi alegerea conturului are avantajul că ne va da încă o integrală reală. Pe arcul γ parcurs în sens indirect $zf(z) \to 1$, deci $\int_\gamma zf(z)\,dz \to -i\frac{\pi}{2}$ (criteriul **A'**). Pe arcul Γ, $zf(z) \to 0$ cu excepția direcției $\varphi = 0$, dar $|zf(z)| = |e^{iz}| = e^{-y} \leqslant 1$ în tot cvadrantul I; deci $\int_\Gamma zf(z)\,dz \to 0$ (criteriul **B**). Cum nu avem reziduuri, rămîne

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}i,$$

de unde

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\cos x - e^{-x}}{x}\,dx = 0.$$

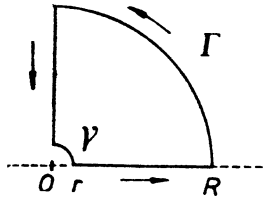

Fig. 104

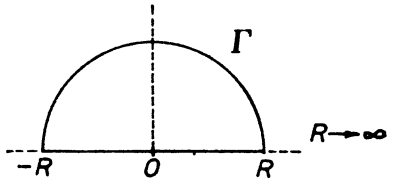

Fig. 105

7 a. Sînt cazuri în care criteriile de mai sus nu duc la rezultat şi este necesară o aproximare directă a modulului integralei; aşa am făcut în exemplele 14, 15. Iată încă unul:

Exemplul **16a.** *Fie $f(z)$ o funcţie uniformă în semiplanul superior închis, avînd un număr finit de singularităţi, dar olomorfă pe axa reală, şi astfel că $f(z) \to 0$ pentru $z \to \infty$ în acel semiplan. Atunci*

$$\int_0^\infty [e^{aiz} f(x) + e^{-aix} f(-x)]\,dx = 2\pi i \sum_k \mathcal{R}_g(z_k) \quad (a > 0),$$

unde $\sum$ este suma reziduurilor funcţiei $g(z) = e^{aiz} f(z)$ în punctele singulare z_k din semiplanul superior (Markuşevici, „Teoria funcţiilor analitice." (p. 313).

Vom considera funcţia $e^{aiz} f(z)$ şi conturul din fig. 105. Vom arăta că $\int_\Gamma \to 0$. Într-adevăr:

$$\left| \int_\Gamma e^{aiz} f(z)\,dz \right| \leqslant \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} \, |f(Re^{i\varphi})| \, R\,d\varphi$$

(aplicînd teorema 7 din § 73).

Prin ipoteză $\max\limits_\Gamma |f(z)| = \mathcal{M}(R) \to 0$, deci

$$\left| \int_\Gamma e^{aiz} f(z)\,dz \right| < \mathcal{M}(R) \int_0^\pi Re^{-aR \sin \varphi}\,d\varphi = 2\mathcal{M}(R) \int_0^{\pi/2} Re^{-aR \sin \varphi}\,d\varphi <$$

$$< 2\mathcal{M}(R) \int_0^{\pi/2} Re^{-\frac{a}{4} R\varphi}\,d\varphi = \frac{4}{a} \mathcal{M}(R) \left(1 - e^{-\frac{a}{4}\pi R}\right) \to 0.$$

De aici deducem formula enunţată. Se va observa că criteriile A sau B nu ar fi dus la rezultat: $ze^{aiz} f(z) \to 0$ cu excepţia unor unghiuri în jurul axei reale, dar nu se poate afirma că această funcţie este mărginită în tot semiplanul superior.

Se vede la fel că formula stabilită este valabilă şi în cazul cînd $f(z)$ are un pol simplu în 0 (celelalte condiţii fiind menţinute). Dacă luăm în $\sum$ jumătatea reziduului acestui pol, vom modifica atunci conturul de mai sus excluzînd polul O cu ajutorul unui semicerc γ de centru O şi rază r, pe cercul γ vom avea

$$\lim_{r \to 0} ze^{aiz} f(z) = \lim_{r \to 0} zf(z) = \mathcal{R}(0),$$

de unde $\int_\gamma \to \pi i \mathcal{R}(0)$ şi trecînd acest termen în membrul II obţinem formula de demonstrat.

Ca aplicaţii avem: Dacă $f(z)$ este o funcţie pară,

$$\int_0^\infty f(x) \cos ax\,dx = \pi i \sum_k \mathcal{R}_g(z_k),$$

și dacă $f(z)$ este impară,

$$\int_0^\infty f(x) \sin ax \, dx = \pi \sum_k \mathcal{R}_g(z_k).$$

Astfel:

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}$$

(calculată de altfel în exemplul 16),

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + b^2} dx = \pi \frac{e^{-ab}}{2b}, \quad \int_0^\infty \frac{x \sin ax}{x^2 + b^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ab}.$$

8. Dacă $f(z)$ este o funcție multiformă, $\int_C f(z) \, dz$ se va referi la o determinare a funcției, fixată într-un punct inițial și urmărită prin continuitate de-a lungul curbei C, care nu trebuie să treacă prin vreun punct critic. În cazul cînd domeniul interior curbei C nu conține puncte critice, acea determinare va fi o funcție uniformă în $\overline{\mathcal{D}}$ (cum se va demonstra mai tîrziu — vezi teorema monodromiei) și teorema reziduurilor se va putea aplica.

Să presupunem însă că domeniul $\mathcal{D}$ conține un punct critic z_0 (fig. 106). Pentru a avea o determinare uniformă vom putea scoate din $\mathcal{D}$ un cerc γ de centru z_0 și o tăietură L unind un punct p de pe γ cu un punct q de pe C; în domeniul rămas D, determinarea fixată în punctul inițial q va fi uniformă (pentru că în D nu putem înconjura nici un punct critic). Să notăm cu $f(z)$ această determinare. Vom considera următorul drum de integrare, care este frontiera domeniului D, plecăm din q, pe curba C în sens direct, urmărind prin continuitate determinarea inițială a funcției $f(z)$; ne vom întoarce în q cu o nouă determinare $f_1(z)$ (pentru că am înconjurat punctul critic z); vom urmări apoi determinarea $f_1(x)$ de-a lungul tăieturii qp și mai departe de-a lungul cercului γ în sens indirect, și ne vom întoarce în p cu determinarea $f(z)$ (pentru că am înconjurat din nou punctul critic z_0, în sensul invers);

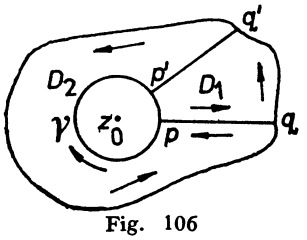

Fig. 106

în sfîrșit parcurgînd iarăși tăietura pq (în sensul invers) ne vom întoarce în q cu determinarea inițială. Pe drumul urmat, funcția astfel definită este uniformă, dacă facem distincție între marginea inferioară și cea superioară a tăieturii pq, pe care funcția ia valori în general deosebite, în același punct (după cum parcurgem tăietura în sensul qp — pe marginea inferioară, sau pq — pe marginea superioară).

Vom arăta că, deși conturul domeniului D nu este simplu, teorema reziduurilor i se poate aplica:

$$\int_C f \, dz + \int_{qp} f_1 \, dz - \int_\gamma f \, dz + \int_{pq} f \, dz = 2\pi i \sum \mathcal{R}(\alpha_k) \tag{15}$$

α_k fiind punctele singulare, în număr finit, ale determinării fixate pentru funcția $f(z)$ în D. Pentru aceasta vom face un raționament asemănător cu acela folosit la demonstrația teoremei lui Cauchy pentru domenii multiplu conexe.

Să ducem în D o a doua tăietură $p'q'$ între γ și C. Aceasta va împărți domeniul D în două domenii, D_1 și D_2, ale căror frontiere fiind curbe simple, le putem aplica teorema reziduurilor:

$$\int_{C_2} f\,dz + \int_{qp} f\,dz - \int_{\gamma_2} f\,dz + \int_{p'q'} f\,dz = 2\pi i \sum \mathcal{R}(\alpha_l),$$

$$\int_{C_1} f\,dz + \int_{q'p'} f\,dz - \int_{\gamma_1} f\,dz + \int_{pq} f\,dz = 2\pi i \sum \mathcal{R}(\alpha_m),$$

unde $C_1 \cup C_2 = C$, $\gamma_1 \cup \gamma_2 = \gamma$. Adunînd aceste formule se obține formula (15).

Fig. 107

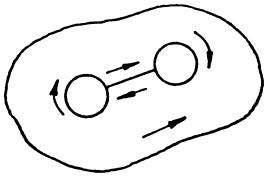

Fig. 108

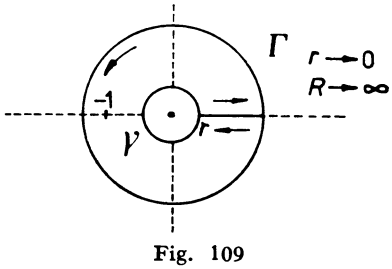

Fig. 109

În cazul cînd domeniul $\mathfrak{D}$ conține mai multe puncte critice, se vor scoate cercuri cu centrele în aceste puncte și se vor face tăieturi alese astfel ca în domeniul rămas să obținem o determinare uniformă a funcției $f(z)$. Este clar că formula (15) se poate extinde și la asemenea cazuri. Astfel, pentru două puncte critice putem forma conturul de integrare în modul arătat în figura 107. Iar dacă punctul ∞ nu este critic, putem lua și conturul din figura 108.

Exemple 17. $I = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}}{1+x}\,dx \quad (0 < a < 1)$.

Considerăm $\int_C \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z}$ pe conturul din figura 109. Fucția $z^{a-1} = e^{(a-1)\log z}$ are punctul critic $z = 0$, pentru care motiv am ales conturul precedent. Vom considera determinarea ei care corespunde la arg $z=0$ pe marginea superioară a tăieturii. Pe γ, $|z^{a-1}| = e^{(a-1)\log r} = r^{a-1}$ și pentru $r \to 0$, $|zf(z)| = \frac{r^a}{|1+z|} \to 0$ (deoarece $a > 0$); deci $\int_\gamma \to 0$. Pe Γ, $|zf(z)| = \frac{R}{|1+z|} R^{a-1} \to 0$ pentru $R \to \infty$ (deoarece $a < 1$), deci $\int_\Gamma \to 0$. În polul $z = -1$, aplicînd formula (12), avem de calculat valoarea determinării alese a lui z^{a-1} pentru $z = -1$. Ea corespunde la arg $z = \pi$, care dă pentru log z valoarea $i\pi$, deci

$$\mathcal{R}(-1) = e^{(a-1)\pi i} = -e^{a\pi i}.$$

În sfîrșit, observînd că pe marginea inferioară a tăieturii arg $z=2\pi$ și log $z=\log x+2\pi i$, obținem

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1} - x^{a-1}e^{2a\pi i}}{1+x}\,dx = -2\pi i\, e^{a\pi i}$$

sau

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x} = \frac{2\pi i\, e^{a\pi i}}{e^{2a\pi i} - 1} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

18. $I = \int_{-1}^{1} \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^{p}}{1+x^2}\,dx \quad (-1 < p < 2;\ p \neq 0,\ 1).$

Vom lua $f(z) = \frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^{p}}{1+z^2}$ și vom integra pe conturul din figura 110. Funcția avînd numai punctele critice $z = \pm 1$ (∞ nu este punct critic), acest contur permite separarea determinărilor lui $f(z)$ în interiorul său și chiar în tot planul, în afara tăieturii; vom

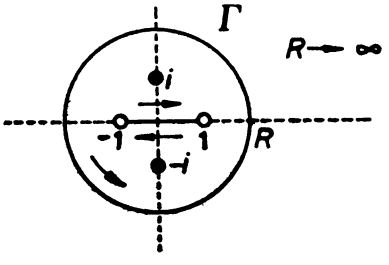

Fig. 110

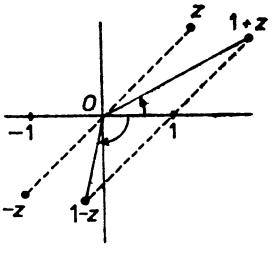

Fig. 111

alege pe aceea care este reală pe marginea superioară a tăieturii $(-1, +1)$. În acest scop vom considera pentru $(1+z)^{1-p}$ tăietura $(-1, +\infty)$ și vom face să varieze $\arg(1+z)$ de la 0 pe marginea superioară la 2π pe marginea inferioară; iar pentru $(1-z)^{p}$, tăietura $(+1, +\infty)$ și vom face să varieze $\arg(1-z)$ de la $-\pi$ pe marginea superioară la $+\pi$ pe marginea inferioară (figura 111). (În felul acesta vom avea $\arg f(z) = 0$ pe tăietura $(-1, +1)$.)

$f(z)$ are polii simpli $z = \pm i$. În $z = +i$, avem, după convenția făcută, $\arg(1+z) = \pi/4$, $\arg(1-z) = -\pi/4$, iar în $z = -i$ avem $\arg(1+z) = 7\pi/4$, $\arg(1-z) = \pi/4$. Deci

$$\mathcal{R}(+i) = \frac{1}{2i}\left(\sqrt{2}\right)^{1-p} e^{(1-p)\frac{\pi i}{4}} \left(\sqrt{2}\right)^{p} e^{-p\frac{\pi i}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2i}\, e^{\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p\pi}{2}\right)i},$$

$$\mathcal{R}(-i) = \frac{1}{-2i}\left(\sqrt{2}\right)^{1-p} e^{(1-p)\frac{7\pi i}{4}} \left(\sqrt{2}\right)^{p} e^{p\frac{\pi i}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2i}\, e^{-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2}p\right)i},$$

$$\mathcal{R}(+i) + \mathcal{R}(-i) = \frac{\sqrt{2}}{2i} e^{-p\pi i}\left[e^{\left(\frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}\right)i} - e^{-\left(\frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}\right)i} \right] = \sqrt{2}\, e^{-p\pi i} \sin\left(\frac{\pi}{4} + p\frac{\pi}{2}\right).$$

Apoi avem

$$\lim_{z \to -1} (z+1) f(z) = 0 \quad \text{deoarece} \quad |1+z|^{2-p} = r^{2-p} \to 0 \quad (p < 2);$$

$$\lim_{z \to 1} (z-1) f(z) = 0 \quad \text{deoarece} \quad |1-z|^{p+1} = r^{p+1} \to 0 \quad (p > -1).$$

Deci integralele pe cercurile de centre ± 1 tind la 0 cînd razele $r \to 0$.

În ceea ce privește integrala pe cercul Γ, vom observa că determinarea considerată a funcției $f(z)$, definită în tot planul la distanță finită, cu excepția tăieturii și cercurilor de centre ± 1, este olomorfă în afara cercului $|z| > 1$. Modulul funcției $zf(z)$

$$\left| \frac{z^2}{1+z^2} \left(\frac{1}{z} + 1 \right)^{1-p} \left(\frac{1}{z} - 1 \right)^{p} \right| \to 1 \text{ pentru } |z| \to \infty,$$

deci punctul ∞ este regulat (funcția fiind mărginită în vecinătatea sa) și prin urmare există $\lim_{z \to \infty} z f(z)$. Modulul acestei limite este 1, iar argumentul se obține luînd de exemplu $z = x > 1$ pe marginea superioară a axei reale: aici $\arg(1+z) = 0$, $\arg(1-z) = -\pi$, deci $\arg f(z) = -p\pi i$ și astfel

$$\lim_{z \to \infty} z f(z) = e^{-p\pi i},$$

și $\int_\Gamma \to 2\pi i e^{-p\pi i}$. Dacă notăm cu $f(x), f_1(x)$ expresiile lui $f(z)$ pe marginea superioară, respectiv inferioară a tăieturii $(-1, 1)$ și mai observăm că pe marginea inferioară a tăieturii $(-1, +1)$, $\arg(1+z) = 2\pi$, $\arg(1-z) = 0$, $\arg f(z) = 2(1-p)\pi$, atunci $f_1(x) = f(x)e^{2(1-p)\pi i}$, și deci avem

$$(1 - e^{-2p\pi i})I + 2\pi i\, e^{-p\pi i} = 2\pi i\sqrt{2}\, e^{-p\pi i} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p\pi}{2}\right),$$

de unde

$$L = \frac{2\sqrt{2}\pi i e^{-p\pi i}}{1 - e^{-2p\pi i}}\left[\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{p\pi}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\right] = \frac{\pi}{\sin p\pi}\left(\sin\frac{p\pi}{2} + \cos\frac{p\pi}{2} - 1\right).$$

Numerele lui Bernoulli. Să considerăm funcția $\dfrac{1}{e^z - 1}$. Ea are polii simpli $2k\pi i$ cu reziduul 1. Deci

$$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_0^\infty c_n z^n \quad \text{în} \quad 0 < |z| < 2\pi$$

și schimbînd z în $-z$;

$$\frac{1}{e^{-z} - 1} = -\frac{1}{z} + \sum_0^\infty (-1)^n c_n z^n.$$

Adunînd: $-1 = 2\sum_0^\infty c_{2n} z^{2n}$, de unde $c_0 = -\dfrac{1}{z}$, $c_{2n} = 0$ $(n > 0)$. Vom pune $c_{2n-1} = (-1)^{n-1}\dfrac{B_n}{(2n)!}$. Astfel

$$\frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!} z^{2n}.$$

B_n sînt numerele lui Bernoulli. Ele se pot calcula prin identificare:

$$z = \left(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \cdots\right)\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{B_1}{2}z^2 - \frac{B_2}{24}z^4 + \cdots\right),$$

$$0 = \left(\frac{B_1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6}\right)z^3 - \left(\frac{B_2}{24} - \frac{B_1}{12} + \frac{1}{48} - \frac{1}{120}\right)z^5 + \ldots,$$

de unde

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \ldots .$$

Avem pentru $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_m} \frac{dz}{z^{2n}(e^z - 1)} = \frac{(-1)^{n-1}B_n}{(2n)!} + \sum_{-m}^{+m}{}' \frac{1}{(2k\pi i)^{2n}},$$

C_m fiind un cerc de centru O și rază $\left(2m+\frac{1}{2}\right)\pi$ iar Σ' reprezintă suma din care lipsește termenul corespunzător lui $k=0$. [Într-adevăr reziduul în O este coeficientul lui $1/z$ în dezvoltarea funcției $\frac{1}{z^{2n}(e^z-1)}$.] Așadar, dacă

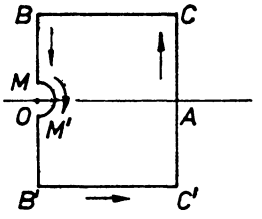

Fig. 112

observăm că integrala $\to 0$[16], avem

$$B_n=\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{k^{2n}}=2\frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}.$$

De exemplu pentru $n=1,2$ avem

$$\sum_1^\infty\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6},\quad \sum_1^\infty\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

Să considerăm formula de sumație:

$$S_n=\sum_1^n e^{-k\alpha}=\frac{1}{2i}\int_{C_n}\operatorname{cotg}\ \pi z\cdot e^{-\alpha z}\,dz\quad \alpha>0,$$

unde C_n este dreptunghiul $BB'C'C$ știrbit în O, cu laturile $x=0$, $x=a=n+\frac{1}{2}$, $y=\pm R$ (vezi fig. 112). Integrala pe semicerc $\to -1/2$ (căci $zf(z)\to 1/\pi$). Vom scrie

$$\frac{1}{2i}\operatorname{cotg}\ \pi z=-\frac{1}{2}-\frac{1}{e^{-2\pi iz}-1}\quad \text{pentru } y>0 \text{ și}$$

$$\frac{1}{2i}\operatorname{cotg}\ \pi z=\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{2\pi iz}-1}\quad \text{pentru } y<0.$$

Cînd semicercul $\to 0$, $-\int_{ACBM}\frac{1}{2}e^{-\alpha z}dz\to-\frac{1}{2}\int_{ACBO}e^{-\alpha z}\,dz$ și $\int_{M'B'C'A}\frac{1}{2}e^{-\alpha z}dz\to\frac{1}{2}\int_{OB'C'A}e^{-\alpha z}\,dz$. Căci de exemplu $\int_{MB}e^{-\alpha iy}\,dy$ are limită pentru că $|y^{1/2}e^{-\alpha iy}|=y^{1/2}\to 0$, în virtutea criteriului A de la integrale improprii, § 77. Așadar cum $e^{-\alpha z}$ este olomorfă, cele două integrale sînt egale cu

$$\frac{1}{2}\int_{OA}e^{-\alpha z}\,dz=\frac{1}{2}\int_0^{n+\frac{1}{2}}e^{-\alpha x}\,dx.$$

---

[16] $e^z\to\begin{cases}0 \text{ pentru } -\frac{3\pi}{2}+\varepsilon<\arg z<-\frac{\pi}{2}-\varepsilon\\ \infty \text{ pentru } -\frac{\pi}{2}+\varepsilon<\arg z<\frac{\pi}{2}-\varepsilon\end{cases}$, iar $\frac{1}{e^z-1}$ este mărginit pe cercurile C_n.

Tot așa integralele provenite din ceilalți termeni ai lui cotg πz. Făcînd ca semicercul $\to 0$ obținem:

$$S_n = \int_0^{n+\frac{1}{2}} e^{-\alpha x}\, dx - \frac{1}{2} + \int_0^R \left(\frac{e^{-i\alpha y}}{e^{2\pi y} - 1} - \frac{e^{i\alpha y}}{e^{2\pi y} - 1} \right) i\, dy - I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \int_0^R \left(\frac{e^{-\alpha(a+iy)}}{e^{-2\pi i(a+iy)} - 1} - \frac{e^{-\alpha(a-iy)}}{e^{2\pi i(a-iy)} - 1} \right) i\, dy = -2e^{-\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)} \int_0^R \frac{\sin \alpha y}{e^{2\pi y} + 1}\, dy \to 0,$$

$$a = n + \frac{1}{2},$$

$$I_2 = \int_0^{n+\frac{1}{2}} \left(\frac{e^{-\alpha(x+iR)}}{e^{-2\pi i(x+iR)} - 1} + \frac{e^{-\alpha(x-iR)}}{e^{2\pi i(x-iR)} - 1} \right) dx,$$

$$|I_2| < \frac{2}{e^{2\pi R} - 1} \int_0^{n+\frac{1}{2}} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{2}{\alpha(e^{2\pi R} - 1)} \left(1 - e^{-\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) \to 0,$$

$$\int_0^{n+\frac{1}{2}} e^{-\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right) \to \frac{1}{\alpha}.$$

Așadar

$$\sum_1^\infty e^{-k\alpha} = \frac{1}{e^\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{\sin \alpha y}{e^{2\pi y} - 1}\, dy.$$

Cum

$$\frac{1}{e^\alpha - 1} = \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} \alpha^{2n-1},$$

$$\frac{2\sin \alpha y}{e^{2\pi y} - 1} = \frac{2}{e^{2\pi y} - 1} \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{y^{2n-1}\alpha^{2n-1}}{(2n-1)!},$$

urmează

$$B_n = 4n \int_0^\infty \frac{y^{2n-1}\, dy}{e^{2\pi y} - 1}.$$

APLICAȚII LA DEZVOLTĂRI ÎN SERIE

9. Teorema reziduurilor are aplicații și la sumarea seriilor sau dezvoltarea în serie a funcțiilor uniforme. Principiul acestor aplicații este următorul: Fie $f(z)$ o funcție meromorfă ai cărei poli formează un șir infinit $\alpha_k \to \infty$; D_n un domeniu mărginit de o curbă rectificabilă C_n și care nu trece prin nici un pol α_k; $\sum_{k=1} \mathcal{R}(\alpha_k)$ suma reziduurilor lui $f(z)$ în polii α_k cuprinși în D_n. Avem

$$\int_{C_n} f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \mathcal{R}(\alpha_k).$$

Presupunem că pentru $n \to \infty$, C_n variază astfel că D_n tinde către un domeniu ce cuprinde toți polii α_k. Dacă, în aceste condiții integrala din membrul I are o limită finită, vom obține suma seriei de reziduuri $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}(\alpha_k)$, sumată după domeniile D_n. Astfel, dacă indicele k ia valorile 1, 2, ... și $|\alpha_k|$ sînt strict crescători: $|\alpha_1| < |\alpha_2| < \ldots$, luînd curbele C_n astfel ca între două curbe consecutive să se afle un singur pol, vom obține suma seriei convergente $\sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{R}(\alpha_k)$. La fel, dacă $|\alpha_k|$ și $|\alpha_{-k}|$ sînt crescători, vom putea obține suma seriei convergente $\mathcal{R}(\alpha_0) + \sum_{1}^{\infty} [\mathcal{R}(\alpha_k) + \mathcal{R}(\alpha_{-k})]$, adică vom avea

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}(\alpha_k) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k \to \infty} \int_{C_k} f(z)\, dz. \tag{16}$$

De exemplu, dacă $\alpha_k = k$, vom lua pentru C_n cercul de centru O și rază $n + \frac{1}{2}$.

Invers, dacă seria reziduurilor este convergentă (și o putem suma), vom obține limita integralei din membrul al doilea și vom putea calcula în unele cazuri integrale improprii reale. Vom urma aici prima cale, care ne va conduce la dezvoltări în serie a unor funcții meromorfe cu poli simpli.

Fie $f(z)$ meromorfă, cu polii simpli $\alpha_k \to \infty$ și $g(z)$ o funcție uniformă cu un număr finit de puncte singulare ζ_h, diferite de α_k. Presupunem că C_n cu $n > n_0$ conține punctele ζ_h în interior. Avem pentru funcția $f(z)\, g(z)$:

$$\mathcal{R}_{fg}(\alpha_k) = g(\alpha_k)\, \mathcal{R}_f(\alpha_k)$$

și formula (16) devine

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{R}_f(\alpha_k) g(\alpha_k) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{k \to \infty} \int_{C_k} f(z) g(z)\, dz - \sum_{h} \mathcal{R}_{fg}(\zeta_h). \tag{17}$$

Ultima sumă este nulă dacă $g(z)$ este funcție întreagă.

Ca aplicație, să luăm $f(z) = \operatorname{cotg} \pi z$, deci $\alpha_k = k$, $\mathcal{R}_f(\alpha_k) = \frac{1}{\pi}$; avem pentru o funcție meromorfă $g(z)$

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} g(k) = \frac{1}{2i} \lim_{k \to \infty} \int_{C_k} g(z) \operatorname{cotg} \pi z\, dz - \pi \sum_{h} \mathcal{R}_{fg}(\zeta_h), \tag{18}$$

dacă limita există. Această formulă de altfel rezultă din formula de sumație finită

$$\sum_{k} g(k) = \frac{1}{2i} \int_{C} g(z) \operatorname{cotg} \pi z\, dz - \pi \sum_{h}' \mathcal{R}_{fg}(\zeta_h)$$

unde $\sum_{k}, \sum_{h}'$ se referă la punctele $z = k$, respectiv $z = \zeta_h$, din interiorul lui C.

La formule analoage dă loc orice funcție $f(z)$ care are polii simpli $z = k$, cu reziduul $\mathcal{R}(k) = \text{const.}$ (independent de k). Astfel de funcții sînt cele de forma $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\operatorname{tg} \pi z}$, unde $\varphi(z)$ are perioada 1 și este întreagă, sau de forma

$f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{e^{2\pi i z} - 1}$, sau $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{1 - e^{-2\pi i z}}$. Atunci $\mathcal{R}(k)$ are respectiv valoarea $\dfrac{1}{\pi}\varphi(0)$, $\dfrac{1}{2\pi i}\varphi(0)$, $\dfrac{1}{2\pi i}\varphi(0)$.

Un alt tip de formule se obține pentru $f(z) = \dfrac{1}{\sin \pi z}$, $\alpha_k = k$, $\mathcal{R}_f(\alpha_k) = (-1)^k \dfrac{1}{\pi}$; vom avea atunci în aceleași condiții

$$(19) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k g(k) = \frac{1}{2i} \lim_{k\to\infty} \int_{C_k} \frac{g(z)}{\sin \pi z}\, dz - \pi \sum_k \mathcal{R}_{fg}(\zeta_k).$$

Formule analoage cu aceasta se vor obține luînd $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\sin \pi z}$ cu $\varphi(z)$ funcție întreagă de perioadă 1; aici $\mathcal{R}(k) = \dfrac{(-1)^k}{\pi}\varphi(0)$. Funcția $\varphi(z)$ poate fi utilizată pentru a face ca limita integralei să existe.

Alte formule se vor obține luînd $f(z) = \operatorname{cth} \pi z$, $\alpha_k = i k$, $\mathcal{R}_f(\alpha_k) = \dfrac{1}{\pi}$:

$$(20) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} g(i k) = \frac{1}{2i} \lim_{k\to\infty} \int_{C_k} g(z) \operatorname{cth} \pi z\, dz - \pi \sum_k \mathcal{R}_{fg}(\zeta_k),$$

sau mai general $f(z) = \varphi(z) \operatorname{cth} \pi z$, $\dfrac{\varphi(z)}{e^{2\pi z} - 1}$, $\dfrac{\varphi(z)}{1 - e^{-2\pi z}}$, cu $\varphi(z)$ funcție întreagă de perioadă i.

În sfîrșit luînd $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} \pi z}$, $\alpha_k = i k$, $\mathcal{R}_f(\alpha_k) = \dfrac{(-1)^k}{\pi}$, obținem

$$(20') \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k g(i k) = \frac{i}{2i} \lim_{k\to\infty} \int_{C_k} \frac{g(z)}{\operatorname{sh} \pi z}\, dz - \pi \sum_k \mathcal{R}_{fg}(\zeta_k)$$

și o formulă analoagă pentru $f(z) = \dfrac{\varphi(z)}{\operatorname{sh} \pi z}$ cu $\varphi(z)$ funcție întreagă de perioadă i.

Exemplul 19. *Să considerăm integralele*:

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\cos az}{z^{2q} \sin \pi z}\, dz \quad (-\pi \leqslant a \leqslant \pi) \quad q \text{ întreg} \geqslant 1,$$

$$I'_n = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_n} \frac{\sin az}{z^{2q+1} \sin \pi z}\, dz \quad (-\pi < a < \pi) \quad q \text{ întreg} \geqslant 0, \text{ pe, cercul } |z| = \left(n + \frac{1}{2}\right).$$

Vom arăta mai întîi că $I_n \to 0$ și $I'_n \to 0$ pentru $n \to \infty$. Dacă q e întreg și > 0, pentru aceasta va fi destul să demonstrăm că funcțiile $\dfrac{\cos az}{\sin \pi z}$ și $\dfrac{\sin az}{\sin \pi z}$ sînt mărginite în tot planul, din care am scos cercurile $|z - k| < \delta < \dfrac{1}{2}$ în jurul polilor acestor funcții. (Căci atunci vom avea $zf(z) \to 0$ pe cercurile C_n.) În acest scop observăm că în semiplanul $y > y_0 > 0$ avem

$$\left|\frac{\cos az}{\sin \pi z}\right| = \left|\frac{e^{iaz} + e^{-iaz}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| \leqslant \frac{e^{ay} + e^{-ay}}{e^{\pi y} - e^{-\pi y}} = e^{(-\pi \pm a)y} \frac{1 + e^{\mp 2ay}}{1 - e^{-}} \quad \frac{2}{1 - e^{-2\pi y_0}}$$

cu semnul $\pm$ după cum $a \gtrless 0$; deci această funcție este mărginită în semiplanul $y > y_0$ și tot așa în $y < -y_0$ (cum se vede schimbînd pe z în $\bar{z}$). În banda $-y_0 \leqslant y \leqslant y_0$, funcția $\cos az$ este mărginită pentru că este întreagă și are perioada $\frac{2\pi}{a}$ (dacă $a = 0$, caz evident); într-adevăr, valorile ei în această bandă sînt acelea evaluate în dreptunghiul închis $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $-y_0 \leqslant y \leqslant y_0$, unde funcția fiind olomorfă este mărginită. La fel funcția $\frac{1}{\sin \pi z}$, dacă scoatem din banda considerată cercurile de mai sus. Cu aceasta am demonstrat că $\frac{\cos az}{\sin \pi z}$ este mărginită în tot planul minus acele cercuri. Pentru $\frac{\sin az}{\sin \pi z}$ se va raționa la fel. În sfîrșit, pentru a dovedi că $I'_n \to 0$ și în cazul $q = 0$, vom putea aplica criteriul B, arătînd că $z \frac{\sin az}{\sin \pi z} \to 0$ pentru $z \to \infty$, în tot planul minus unghiurile $-\varepsilon < \theta < \varepsilon, \pi - \varepsilon < \theta < \pi + \varepsilon$.
Într-adevăr, aceasta se vede scriind pentru semiplanul superior

$$z \frac{\sin az}{\sin \pi z} = z e^{i(\pi - a)z} \frac{e^{2iaz} - 1}{e^{2\pi i z} - 1} \to 0$$

(avînd în vedere că, în acest semiplan $z e^{imz} \to 0$ cînd $m > 0$); și pentru semiplanul inferior, schimbînd z în $\bar{z}$.

În interiorul cercului C_n integranzii au polii: $z = 0$ de ordin $2q + 1$ și $z = \pm k$ ($k = 1,2, \ldots$) simpli. Pentru aceștia avem imediat

$$\mathcal{R}(\pm k) = (-1)^k \frac{\cos ak}{\pi k^{2q}}, \quad \text{respectiv } (-1)^k \frac{\sin ak}{\pi k^{2q+1}}.$$

Vom calcula pe $\mathcal{R}(0)$ din dezvoltarea Laurent. Mai întîi, spre a obține dezvoltarea lui $\frac{1}{\sin \pi z}$, plecăm de la formula cunoscută

$$\pi z \operatorname{ctg} \pi z = -\sum_0^\infty \frac{B_n}{(2n)!} (2\pi z)^{2n} \qquad (|z| < 1) \tag{21}$$

unde $B_0 = -1$) și folosim identitatea

$$\frac{1}{\sin \pi z} = \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{2} - \operatorname{ctg} \pi z.$$

Obținem astfel

$$\frac{z}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi} \sum_0^\infty \frac{2^{2h} - 2}{(2h)!} B_h (\pi z)^{2h} \qquad (|z| < 1).$$

Avem acum

$$\frac{\cos az}{z^{2q} \sin \pi z} = \frac{1}{\pi z^{2q+1}} \sum_0^\infty \frac{2^{2h} - 2}{(2h)!} B_h (\pi z)^{2h} \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(az)^{2k}}{(2k)!}$$

$$\frac{\sin az}{z^{2q+1} \sin \pi z} = \frac{a}{\pi z^{2q+1}} \sum_0^\infty \frac{2^{2h} - 2}{(2h)!} B_h (\pi z)^{2h} \sum_0^\infty (-1)^k \frac{(az)^{2k}}{(2k+1)!} \qquad (0 < |z| < 1)$$

și luînd coeficientul lui $\frac{1}{z}$:

$$\mathcal{R}(0) = \frac{1}{\pi} \sum_{h+k=q} (-1)^k \frac{2^{2h} - 2}{(2h)!\,(2k)!} \pi^{2h} a^{2k} B_h,$$

respectiv

$$\mathcal{R}(0) = \frac{a}{\pi} \sum_{h+k=q} (-1)^k \frac{2^{2h} - 2}{(2h)!\,(2k+1)!} \pi^{2h} a^{2k} B_h.$$

Avînd în vedere toate acestea obținem formulele de sumație:

$$(22)\qquad \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{\cos an}{n^{2q}} = \frac{1}{2}\sum_{h+k=q}(-1)^k\frac{2^{2h}-2}{(2h)!\,(2k)!}\pi^{2h}a^{2k}B_h \begin{pmatrix} -\pi \leqslant a \leqslant \pi \\ q \text{ întreg} \geqslant 1\end{pmatrix}.$$

$$(23)\qquad \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{\sin an}{n^{2q+1}} = \frac{a}{2}\sum_{h+k=q}(-1)^k\frac{2^{2h}-2}{(2h)!\,(2k+1)}\pi^{2h}a^{2k}B_h \begin{pmatrix} -\pi < a < \pi \\ q \text{ întreg} \geqslant 0\end{pmatrix}.$$

Exceptînd seria a doua pentru $q = 0$, aceste serii au termenii mai mici în valoare absolută, decît aceia a unei serii $\sum \frac{1}{n^p}$ $(p > 1)$, deci sînt uniform convergente în raport cu a. Astfel ele se pot deduce una din alta prin derivare sau integrare în raport cu a.

În particular, luînd $a = \pi$ și calculînd direct $\mathcal{R}(0)$ din dezvoltarea (21), găsim:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^{2q}} = \frac{(2\pi)^{2q}}{2(2q)!}B_q.$$

Comparînd acestea cu formula (22) pentru $a = \pi$ s-ar deduce formula de recurență pentru numerele lui Bernoulli.

Apoi luînd $a = 0$ în (22) avem

$$\sum_0^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2q}} = \frac{2^{2q-1}-1}{(2q)!}\pi^{2q}B_q.$$

Din aceste două formule se deduce adunîndu-le

$$\sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^{2q}} = \frac{2^{2q}-1}{2(2q)!}\pi^{2q}B_q.$$

Pentru $q = 1, 2$ formula (22) ne dă $\left(B_1 = \frac{1}{6},\ B_2 = \frac{1}{30}\right)$:

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{\cos an}{n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{a^2}{4} \qquad (-\pi \leqslant a \leqslant \pi),$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{\cos an}{n^4} = \frac{1}{48}\left(\frac{7}{15}\pi^4 - 2\pi^2a^2 + a^4\right).$$

Pentru $q = 0, 1$, formula (23) ne dă

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{\sin an}{n} = \frac{a}{2} \qquad (-\pi < a < \pi),$$

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{\sin an}{n^3} = \frac{a}{12}(\pi^2 - a^2).$$

Din (22) și (23) se deduce, schimbînd a în $\pi - a$:

$$\sum_1^\infty \frac{\cos an}{n^{2q}} = \sum_{h+k=q}(-1)^{k-1}\frac{2^{2h-1}-1}{(2h)!\,(2k)!}\pi^{2h}(\pi-a)^{2k}B_h \quad (0 \leqslant a \leqslant 2\pi \ q \text{ întreg} > 0),$$

$$\sum_1^\infty \frac{\sin an}{n^{2q+1}} = \sum_{h+k=q}(-1)^{k-1}\frac{2^{2h-1}-1}{(2h)!\,(2k+1)}\pi^{2h}(\pi-a)^{2k+1}B_h \quad (0 < a < 2\pi \ q \text{ întreg} > 0),$$

și în particular

$$\sum_1^\infty \frac{\cos an}{n^2} = \frac{(\pi-a)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \qquad \sum_1^\infty \frac{\sin an}{n} = \frac{\pi-a}{2},$$

$$\sum_1^\infty \frac{\cos an}{n^4} = \frac{-1}{48}\left[(\pi-a)^4 - 2\pi^2(\pi-a)^2 + \frac{7}{15}\pi^4\right],$$

$$\sum_1^\infty \frac{\sin an}{n^3} = \frac{(\pi-a)(2\pi-a)a}{12}.$$

10. Altă aplicație importantă a teoriei reziduurilor se referă la dezvoltarea funcțiilor meromorfe în serie de funcții raționale. Ne vom ocupa de cazul (cel mai frecvent) al unei funcții $f(z)$ avînd un șir infinit de poli *simpli* α_k, ce converg la ∞. Curbele C_n fiind alese ca la 9, să considerăm integrala de tip Cauchy

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} = \Sigma_n,$$

unde z este un punct diferit de polii α_k. Suma de reziduuri Σ_n se întinde la polii integrandului: $\zeta = z$, cu reziduul $f(z)$ (punctul z este interior lui C_n dacă n este destul de mare) și $\zeta = \alpha_k$ interiori curbei C_n, cu reziduurile

$$\mathcal{R}(\alpha_k) = \frac{\mathcal{R}_f(\alpha_k)}{\alpha_k - z}.$$

Avem deci

$$f(z) = \Sigma_n' \frac{\mathcal{R}_f(\alpha_k)}{z - \alpha_k} + \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}, \tag{24}$$

Σ_n' reprezentînd suma întinsă la polii α_k interiori curbei C_n.

Dacă integrala din membrul al doilea are o limită λ, constantă pentru $n \to \infty$, vom obține o dezvoltare a funcției meromorfe $f(z)$ în serie de funcții raționale

$$f(z) = \sum_0^\infty \varphi_n(z) + \lambda, \tag{25}$$

unde $\varphi_n(z) = \Sigma_n - \Sigma_{n-1}$ și $\varphi_0(z) = \Sigma_0$, care se mai poate scrie și

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathcal{R}_f(\alpha_k)}{z - \alpha_k} + \frac{1}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int_{C_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (z \neq \alpha_k). \tag{26}$$

Să aplicăm integralei precedente criteriile **A** sau **B**, presupunînd că C_n sînt cercuri de centru O și rază $R_n \to \infty$. Cum $\dfrac{\zeta}{\zeta - z} \to 1$ pentru $\zeta \to \infty$ și deci este mărginit pentru n destul de mare, criteriile **A** și **B** vor fi aplicabile dacă funcția $f(z)$ satisface condițiile lor: $f(z) \to \lambda$ (finit) pe cercurile C_n (criteriul **A**) sau numai cu excepția unui număr finit de direcții, dar cu condiția suplimentară $f(z)$ mărginit pe cercurile C_n pentru n destul de mare (criteriul **B**). În aceste cazuri

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \to \lambda.$$

Vom arăta că în aceste cazuri seria (26) este uniform convergentă în orice domeniu mărginit $\overline{\Delta}$, din care s-au scos discuri $|z - \alpha_k| < \delta$ (arbitrar de mici) în jurul polilor α_k conținuți în domeniul Δ sau, seria $\sum_{-\infty}^{+\infty *} \dfrac{\mathcal{R}_f(\alpha_k)}{z - \alpha_k}$ este uniform convergentă în Δ, unde prin $\sum_{-\infty}^{+\infty *}$ am notat seria ce conține numai termenii ce corespund la polii α_k ce nu sînt conținuți în $\overline{\Delta}$.

Într-adevăr, să considerăm restul seriei, care, cum se vede din (24) și (25), este

$$\rho_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \lambda,$$

și fie $\bar{\Delta}$ conținut în discul de rază $\frac{1}{2}\ R_n$ pentru $n > n_0$ (vezi fig. 113). Putem scrie (z fiind interior lui C_n)

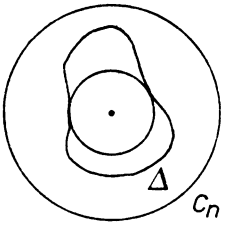

Fig. 113

$$\rho_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_n} \frac{f(\zeta) - \lambda}{\zeta - z}\,d\zeta \quad (n > n_0)$$

În cazul **A**, avem $|f(\zeta) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{2}$ pe cercurile C_n, pentru $n > n_1 > n_0$. Atunci pentru orice $z \in \bar{\Delta}$

$$|\zeta - z| > \frac{R_n}{2}$$

și prin urmare

$$|\rho_n(z)| < \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi R_n \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{2}{R_n} = \varepsilon \quad \text{pentru } n > n_1,$$

adică $\rho_n \to 0$ uniform în Δ.

În cazul **B**, avem $|f(z)| < M$ (fix) (pe cercurile C_n) dacă luăm n_0 destul de mare. Fie η suma unor unghiuri arbitrar de mici, în jurul direcțiilor excepționale, și C_n'' reuniunea arcelor lui C_n cuprinse în aceste unghiuri; C_n' reuniunea celorlalte arce. Avem $|f(\zeta) - \lambda| < \frac{\varepsilon}{4}$ pe arcele C_n', pentru $n > n_1 > n_0$ și $|f(\zeta) - \lambda| \leqslant M + |\lambda|$ pe arcele C_n''; n_1 depinzînd de ε și η (dar nu de z). Deci

$$|\rho_n| \leqq \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n'} \frac{f(\zeta) - \lambda}{\zeta - z}\,d\zeta\right| + \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_n''} \frac{f(\zeta) - \lambda}{\zeta - z}\,d\zeta\right|$$

$$< \frac{1}{2\pi}(2\pi - \eta) R_n \frac{\varepsilon}{4}\frac{2}{R_n} + \frac{1}{2\pi}\eta\, R_n(M + |\lambda|)\frac{2}{R_n} < \frac{\varepsilon}{2} + (M + |\lambda|)\eta \quad (n > n_1).$$

Luînd $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2(M + |\lambda|)}$, vom avea $|\rho_n| < \varepsilon$ pentru $n > n_1$, n_1 depinzînd numai de ε.

Evident criteriul **B** se aplică și atunci cînd $f(z)$ are limite diferite în mai multe unghiuri avînd suma 2π. Dacă de exemplu $f(z)$ are limitele λ_1, λ_2 în semiplanul superior respectiv inferior — cu excepția anumitor direcții — în formula (25) vom avea $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$. Este apoi evident de asemenea, că demonstrația precedentă, privitoare la convergența uniformă a seriei (25), în aceste condiții, rămîne valabilă (demonstrația făcîndu-se separat pentru unghiurile în care avem limite diferite).

Exemple. **20.** *Să considerăm funcțiile*

$$f(z) = \frac{\cos az}{\sin \pi z} \quad (-\pi \leqslant a \leqslant \pi)$$

$$f(z) = \frac{\sin az}{\sin \pi z} \quad (-\pi < a < \pi).$$

Ele satisfac condițiile criteriului **B** pentru cercurile $|z| = n + \frac{1}{2}$. Într-adevăr la exemplul 19 am văzut că ele sînt mărginite pe aceste cercuri. De asemenea, am văzut că pentru $z \to \infty$, în tot planul minus două unghiuri arbitrar de mici în jurul axei reale $\frac{\sin az}{\sin \pi z} \to 0$ și se poate deduce la fel că $\frac{\cos az}{\sin \pi z} \to 0$ pentru $-\pi < a < \pi$. Cînd $a = \pi$, prima funcție devine $\operatorname{ctg} \pi z$, și în acest caz știm că $\operatorname{cotg} \pi z \to \mp i$, după cum $z \to \infty$ într-un unghi $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$ sau într-un unghi $\pi + \varepsilon < \theta < 2\pi - \varepsilon$. Deci în toate cazurile integrala din (24) $\to 0$ (în ultimul limita ei este $\lambda = -i + i = 0$).

Prima funcție are polii simpli $z = k$ (întreg oarecare) cu $\mathcal{R}(k) = (-1)^k \frac{\cos ak}{\pi}$, iar a doua, polii simpli $z = k$ (întreg $\neq 0$) cu $\mathcal{R}(k) = (-1)^k \frac{\sin ak}{\pi}$.

Aplicînd formula (26) va trebui să sumăm împreună termenii de indicii n și $-n$; avem astfel dezvoltările:

$$(28) \qquad \pi \frac{\cos az}{\sin \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos na}{z - n} = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2z \cos na}{z^2 - n^2} \qquad (-\pi \leqslant a \leqslant \pi),$$

$$(29) \qquad \pi \frac{\sin az}{\sin \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin na}{z - n} = \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n \sin na}{z^2 - n^2} \qquad (-\pi < a < \pi)$$

valabile pentru orice z care nu este întreg și încă pentru $z = 0$ în cazul formulei (29). Pentru $a = \pi$ formula (28) devine

$$(30) \qquad \pi \operatorname{ctg} \pi z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - n} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{z}{z^2 - n^2}.$$

Iar pentru $a = 0$:

$$(31) \qquad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z - n} = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Toate aceste serii sînt uniform convergente în orice domeniu închis din care s-au scos discuri $|z - k| < \delta$ arbitrar de mici în jurul polilor k conținuți în domeniul respectiv.

Punînd $a = \frac{\pi}{2}$ și schimbînd z cu $2z$ în formula (29), obținem

$$(32) \qquad \frac{\pi}{\cos \pi z} = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{1}{2z - 2k - 1} = 4 \sum_{0}^{\infty} \frac{(2k + 1)(-1)^{k+1}}{4z^2 - (2k + 1)^2}$$

(unde membrul al treilea se poate obține din al doilea grupînd termenii cu k și $(-k - 1)$; această dezvoltare se poate deduce și din aceea a lui $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ înlocuind pe z cu $\frac{1}{2} - z$.

Ele pot fi prin urmare derivate sau integrate termen cu termen. Astfel să integrăm seria $\operatorname{ctg} \pi z$, aplicînd teorema 1 din § 78, privitoare la integrarea seriilor de funcții olomorfe. Pentru a putea lua 0 ca limită inferioară a integralelor, scriem seria sub forma

$$\pi \operatorname{ctg} \pi z - \frac{1}{z} = \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}.$$

Seria din membrul al doilea este uniform convergentă în vecinătatea lui $z = 0$ și prin urmare (termenii ei fiind olomorfi acolo) primul membru este de asemenea olomorf în $z = 0$. În orice domeniu închis $\overline{\Delta}$ care exclude cercuri cu centrele în punctele $z = \pm k$ $(k > 0)$ seria este uniform convergentă și putem scrie integrînd de la 0 la z pe un drum în Δ:

$$\log \frac{\sin \pi z}{\pi z} = \sum_1^\infty \log \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

luînd determinările logaritmilor care sînt nule în $z = 0$. După teorema citată, aceasta devine o serie uniform convergentă în orice domeniu închis mărginit, dacă excludem termenii referitori la punctele $z = \pm k$ din acel domeniu. Deci putem scrie

$$\sin \pi z = \pi z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right),$$

produsul infinit fiind uniform convergent în aceleași condiții.

21. *Condiții asemănătoare pot fi aplicate funcțiilor*

$$f(z) = \frac{\sin az}{\cos \pi z} \quad (-\pi \leqslant a \leqslant \pi),$$

$$f(z) = \frac{\cos az}{\cos \pi z} \quad (-\pi < a < \pi).$$

Se vede la fel că ele satisfac condițiile criteriului **B**, astfel, pentru $-\pi < a < \pi$, $\dfrac{\sin az}{\cos \pi z}$, $\dfrac{\cos az}{\cos \pi z} \to 0$ în unghiurile $\varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon$ și $\pi + \varepsilon < \theta < 2\pi - \varepsilon$, iar

$$\operatorname{tg} z \to \begin{cases} +\,\mathrm{i} \text{ în } \varepsilon < \theta < \pi - \varepsilon, \\ -\,\mathrm{i} \text{ în } \pi + \varepsilon < \theta < 2\pi - \varepsilon. \end{cases}$$

De asemenea, cele două funcții sînt mărginite în tot planul minus cercurile de centre $\dfrac{2k+1}{2}$ și rază r arbitrar de mică. Ele au polii $z = k + \dfrac{1}{2}$, cu reziduurile

$$\mathcal{R}\left(k + \frac{1}{2}\right) = \frac{(-1)^{k-1}}{\pi} \sin \frac{2k+1}{2} a, \text{ respectiv } \frac{(-1)^{k-1}}{\pi} \cos \frac{2k+1}{2} a.$$

Se obțin la fel dezvoltările:

$$\pi \frac{\sin az}{\cos \pi z} = \sum_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{2z \sin \dfrac{2n+1}{2} a}{z^2 - \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2} \quad (-\pi \leqslant a \leqslant \pi),$$

$$\pi \frac{\cos az}{\cos \pi z} = \sum_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{(2n+1) \cos \dfrac{2n+1}{2} a}{z^2 - \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2} \quad (-\pi < a < \pi),$$

și în particular, luînd $a = \pi$ în cea dintîi, $a = 0$ în a doua:

$$\pi \operatorname{tg} \pi z = -\sum_0^\infty \frac{2z}{z^2 - \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2},$$

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_0^\infty (-1)^{n+1} \frac{2n+1}{z^2 - \left(\dfrac{2n+1}{2}\right)^2}.$$

Toate aceste dezvoltări sînt valabile pentru $z \neq k + \frac{1}{2}$ (k întreg oarecare) și uniform convergente în orice domeniu închis mărginit dacă se lasă la o parte termenii cu poli în acel domeniu. Din dezvoltarea lui $\operatorname{tg} \pi z$ se deduce prin integrare dezvoltarea

$$\cos \pi z = \prod_0^\infty \left(1 - \frac{4z^2}{(2n+1)^2}\right),$$

uniform convergentă în aceleași condiții.

Pentru o funcție $g(z)$ cu un număr finit de puncte singulare $\zeta_h = k + 1/2$ și care verifică criteriul **A** sau **B**, vom avea, conform formulei (17),

$$(33) \qquad -\pi < \alpha < \pi \begin{cases} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k g\left(\frac{2k+1}{2}\right) \sin \frac{2k+1}{2}\alpha = \pi \sum_h \mathcal{R}_F(\zeta_h), \\ \qquad\qquad F = \frac{\sin \alpha z}{\cos \pi z} g(z), \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k g\left(\frac{2k+1}{2}\right) \cos \frac{2k+1}{2}\alpha = \pi \sum_h \mathcal{R}_F(\zeta_h), \\ \qquad\qquad F = \frac{\cos \alpha z}{\cos \pi z} g(z), \\ \Sigma_k g\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \pi \sum_h \mathcal{R}_F(\zeta_n), \qquad F = \operatorname{tg} \pi z \; g(z). \end{cases}$$

Pentru o funcție meromorfă $g(z)$, care are poli $\zeta_h \neq k$ și $z\,g(z)$ satisface condițiile criteriului **A** sau **B**

$$(-\pi < \alpha < \pi) \begin{cases} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k g(k) \cos k\alpha = -\pi \sum_h \mathcal{R}_F(\zeta_h), \quad F = \frac{\cos \alpha z}{\sin \pi z} g(z), \\ \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k g(k) \sin k\alpha = -\pi \sum_h \mathcal{R}_F(\zeta_h), \quad F = \frac{\sin \alpha z}{\sin \pi z} g(z). \end{cases}$$

(În această formulă $z = 0$ nu este pol al lui $f(z)$, deci poate fi un ζ_h.)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} g(k) = -\pi \sum_h \mathcal{R}_F(\zeta_h), \quad F = \operatorname{cotg} \pi z \; g(z).$$

(Această formulă rezultă din prima pentru $\alpha = \pi$.)

Într-adevăr, dacă $z\,g(z)$ satisface criteriile **A** sau **B**, le satisface și $z\,F(z)$, cu $\lim z\,F(z) = 0$. În primele două este suficient ca $|z\,g(z)|$ să fie uniform mărginit pe cercurile C_k, ceea ce se va întîmpla dacă $z\,g(z)$ este mărginit în tot planul minus cercuri arbitrar de mici cu centrele în punctele singulare ζ_h. În formula a treia vom observa că integrala din (17) fiind descompusă în părțile relative la semiplanele superior și inferior, vom avea ca limită a ei $i(-\pi i + \pi i) = 0$.

Luînd, în prima formulă (32), $g(z) = \frac{1}{z^{2q}}$ (q întreg > 0) obținem, observînd că F are în O un pol de ordin $2q - 1$,

$$(34) \qquad \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{2k+1}{2}\alpha}{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{2q}} = \pi \mathcal{R}$$

sau (grupînd termenii cu k și $-k-1$):

$$(-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi) \sum_0^\infty (-1)^k \frac{\sin \frac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^{2q}} = \frac{\pi}{2^{2q+1}} \mathcal{R},$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{(2q-2)!} \lim_{z \to 0} \frac{d^{2q-2}}{dz^{2q-2}} \left(\frac{\sin \alpha z}{z \cos \pi z} \right).$$

Pentru $q = 1, 2, 3$ vom calcula pe $\mathcal{R}$ din dezvoltarea lui Laurent a funcției $F(z) = \frac{1}{z^{2q}} - \frac{\sin \alpha z}{\cos \pi z}$ în jurul lui O:

$$F(z) = \frac{\alpha}{z^{2q-1}} \left(1 - \frac{\alpha^2 z^2}{6} + \frac{\alpha^4 z^4}{120} + \ldots\right) \left[1 + \frac{\pi^2 z^2}{2} + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{24}\right) \pi^4 z^4 + \ldots\right].$$

Găsim:

$$\sum_0^\infty (-1)^k \frac{\sin \frac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{8} \alpha,$$

$$\sum_0^\infty (-1)^k \frac{\sin \frac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^4} = \frac{\pi\alpha}{64} \left(\pi^2 - \frac{\alpha^2}{3}\right),$$

$$\sum_0^\infty (-1)^k \frac{\sin \frac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^6} = \frac{\pi\alpha}{15360} (5\pi^2 - \alpha^2)^2,$$

Pentru $\alpha = \pi$

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^{2q}} = \frac{\pi}{2^{2q+1}} \mathcal{R},$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{(2q-2)!} \lim_{z \to 0} = \frac{d^{2q-2}}{d z^{2q-2}} \left(\frac{1}{z} \operatorname{tg} \pi z \right),$$

și în particular

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}, \quad \sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}, \sum_0^\infty \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

Formula a doua din (33) ne dă pentru $g = \frac{1}{z^{2q+1}}$ (q întreg $\geqslant 0$)

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\cos \frac{2k+1}{2}\alpha}{\left(\frac{2k+1}{2}\right)^{2q+1}} = \pi \mathcal{R}$$

sau (grupînd termenii cu k şi $-k-1$):

$$(-\pi<\alpha<\pi)\quad \sum_{0}^{+\infty}(-1)^k\frac{\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^{2q+1}}=\frac{\pi}{2^{2q+2}}\mathcal{R},$$

(36)

$$\mathcal{R}=\frac{1}{(2q)!}\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}^{2q}}{\mathrm{d}\,z^{2q}}\left(\frac{\cos\alpha z}{\cos\pi z}\right)$$

care se poate obţine şi derivînd formula (34) în raport cu α cînd $q>1$.

În particular ($q=0,1,2$):

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{2k+1}=\frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^3}=\frac{\pi}{32}(\pi^2-\alpha^2),$$

$$\sum_{0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^5}=\frac{\pi}{1536}(5\pi^4-6\pi^2\alpha^2+\alpha^4)=\frac{\pi}{1536}(\alpha^2-\pi^2)(\alpha^2-5\pi^2).$$

Înlocuind α cu $\pi-\alpha$ în (35) şi (36), obţinem

$$(0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi)\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^{2q}}=\frac{\pi}{2^{2q+1}}\mathcal{R},$$

$$\mathcal{R}=\frac{1}{(2q-2)!}\lim\frac{\mathrm{d}^{2q-2}}{\mathrm{d}z^{2q-2}}\left(\frac{\sin(\pi-\alpha)z}{z\cos\pi z}\right).$$

$$(0<\alpha<2\pi)\sum_{0}^{\infty}\frac{\sin\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^{2q+1}}=\frac{\pi}{2^{2q+2}}\mathcal{R},$$

$$\mathcal{R}=\frac{1}{(2q)!}\lim\frac{\mathrm{d}^{2q}}{\mathrm{d}z^{2q}}\left(\frac{\cos(\pi-\alpha)z}{\cos\pi z}\right).$$

şi în particular

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^2}=\frac{\pi}{8}(\pi-\alpha),\quad\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^4}=\frac{\pi}{192}(\pi-\alpha)(2\pi^2+\pi^2\alpha-\alpha^2),$$

$$\sum_{0}^{\infty}\frac{\cos\dfrac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^6}=\frac{\pi(\pi-\alpha)}{15360}(4\pi^2+2\alpha\pi-\alpha^2)^2,$$

$$\sum_0^\infty \frac{\sin\frac{2k+1}{2}\alpha}{2k+1} = \frac{\pi}{4}, \sum_0^\infty \frac{\sin\frac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^3} = \frac{\pi}{32}\alpha(2\pi-\alpha),$$

$$\sum_0^\infty \frac{\sin\frac{2k+1}{2}\alpha}{(2k+1)^5} = \frac{\pi}{1536}\alpha(2\pi-\alpha)(4\pi^2+2\pi\alpha-\alpha^2).$$

Cum funcţiile $\frac{\sin \alpha z}{\cos \pi z}$, $\frac{\cos \alpha z}{\cos \pi z}$, $\operatorname{tg} z$ satisfac condiţiile criteriului **B** (ultima în semiplanele pozitive şi negative), avem aplicînd (26), (vezi exemplul 21),

$$(-\pi < \alpha < \pi) \quad \pi\frac{\cos \alpha z}{\cos \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}\cos\frac{2k+1}{2}\alpha}{z-\frac{2k+1}{2}} =$$

$$= 4\sum_0^\infty (-1)^{k+1}\frac{(2k+1)\cos\frac{2k+1}{2}\alpha}{4z^2-(2k+1)^2},$$

$$\pi \operatorname{tg} \pi z = -\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-\frac{2k+1}{2}} = -8\sum_0^\infty \frac{z}{4z^2-(2k+1)^2},$$

$$\pi\frac{\sin \alpha z}{\cos \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{k-1}\frac{\sin\frac{2k+1}{2}\alpha}{z-\frac{2k+1}{2}} = 8\sum_0^\infty (-1)^{k+1}\frac{z\sin\frac{2k+1}{2}\alpha}{4z^2-(2k+1)^2},$$

$$\frac{\pi}{\cos \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-\frac{2k+1}{2}} = 4\sum_0^\infty (-1)^{k+1}\frac{2k+1}{4z^2-(2k+1)^2},$$

$$\frac{\pi^2}{\cos^2 \pi z}\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(z-\frac{2k+1}{2}\right)^2} = 8\sum_0^\infty \frac{(2k+1)^2+4z^2}{[4z^2-(2k+1)^2]^2},$$

Toate aceste dezvoltări converg uniform în orice domeniu mărginit care lasă în exterior punctele $\frac{2k+1}{2}$.

Scriind dezvoltarea lui $-\pi \operatorname{tg} \pi z$,

$$\frac{d}{dz}\log \cos \pi z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dz}\log\left(1-\frac{2z}{2k+1}\right)$$

cu determinările logaritmilor alese astfel ca să se anuleze pentru $z = 0$, avem integrînd de la 0 la z

$$\log \cos \pi z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \log\left(1 - \frac{2z}{2k+1}\right),$$

serie uniform convergentă în aceleaşi condiţii. Urmează

$$\cos \pi z = \prod_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{2z}{2k+1}\right) = \prod_{0}^{\infty}\left(1 - \frac{4z^2}{(2k+1)^2}\right)$$

produsul fiind uniform convergent în aceleaşi condiţii.

Schimbînd z în iz formulele precedente devin

$$\pi \frac{\operatorname{sh} \alpha z}{\operatorname{ch} \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\sin \frac{2k+1}{2}\alpha}{z + i\frac{2k+1}{2}} = 8\sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{z \sin \frac{2k+1}{2}\alpha}{4z^2 + (2k+1)^2},$$

$$\pi \operatorname{tgh} \pi z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z + i\frac{2k+1}{2}} = 8\sum_{0}^{\infty} \frac{z}{4z^2 + (2k+1)^2},$$

$$\pi \frac{\operatorname{ch} \alpha z}{\operatorname{ch} \pi z} = i\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\cos \frac{2k+1}{2}\alpha}{z + i\frac{2k+1}{2}} = 4\sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{(2k+1)\cos \frac{2k+1}{2}\alpha}{4z^2 + (2k+1)^2},$$

$$\frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi z} = -i\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z + i\frac{2k+1}{2}} = 4\sum_{0}^{\infty} (-1)^k \frac{2k+1}{4z^2 + (2k+1)^2},$$

$$\frac{\pi^2}{\operatorname{ch}^2 \pi z} = -\prod_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(z + i\frac{2k+1}{2}\right)^2} = 8\sum_{0}^{\infty} \frac{(2k+1)^2 - 4z^2}{[4z^2 + (2k+1)^2]^2},$$

$$\operatorname{ch} \pi z = \prod_{-\infty}^{+\infty}\left(1 - \frac{2iz}{2k+1}\right) = \prod_{0}^{\infty}\left(1 + \frac{4z^2}{(2k+1)^2}\right).$$

Aceste dezvoltări converg uniform în orice domeniu mărginit care lasă în exterior punctele $\frac{2k+1}{2}i$.

În sfîrşit, în cazul mai general în care luăm în (16) funcţia $\frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}} = F(t)$, $z \neq \alpha_k$, observînd că

$$R_F(\alpha_k) = \frac{(-1)^{n+1} R_f(\alpha_k)}{(z - \alpha_k)^{n+1}}, \quad R_F(z) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z),$$

găsim

$$f^{(n)}(z) = (-1)^n n! \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{R_f(\alpha_k)}{(z-\alpha_k)^{n+1}} + \frac{n!}{2\pi i} \lim_{k\to\infty} \int_{C_k} \frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-z)^{n+1}} \quad (z \neq \alpha_k).$$

Exemple. **22.**

$$\sum_{k=n}^{p} f(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \pi \operatorname{cotg}(\pi z) f(z)\,\mathrm{d}z - \Sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_C 2\pi i \frac{f(z)\mathrm{d}z}{e^{2\pi i z}-1} -$$

$$-\Sigma = \frac{1}{2\pi i}\int_C 2\pi i \frac{f(z)\,\mathrm{d}z}{1-e^{-2\pi i z}} - \Sigma,$$

$$\sum_{n}^{p} (-1)^k f(k) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \pi \frac{f(z)\mathrm{d}z}{\sin \pi z} - \Sigma$$

unde C este o curbă închizînd punctele $z = n, \ldots p$ și Σ suma reziduurilor integrandului în interiorul ei, în polii (presupuși diferiți de $z = k$) ai funcției meromorfe $f(z)$. (A se vedea alineatul 9., în special (18), (19)).

23. *Fie C o curbă simplă închisă rectificabilă, care înconjură punctele $-ni, \ldots, mi$; $f(z)$ o funcție uniformă avînd în interiorul lui C un număr finit de puncte singulare, diferite de precedentele ki $(k \neq 0)$. Avem*

$$\Sigma (-1)^k f(ki) \sin k\alpha = \pi i \Sigma - \frac{1}{2}\int_C \frac{\operatorname{sh} \alpha z}{\operatorname{sh} \pi z} f(z)\,\mathrm{d}z \qquad (-\pi < \alpha < \pi)$$

unde suma din membrul I este întinsă la punctele ki interioare lui C iar Σ este suma reziduurilor integrandului în punctele singulare ale lui $f(z)$ din interiorul lui C.

Într-adevăr, pentru un pol $z = ki$ $(k \neq 0$, reziduul integrandului este

$$\frac{1}{\pi}\frac{\operatorname{sh} k\alpha\, i}{\operatorname{ch} k\pi\, i} f(ki) = \frac{i}{\pi}\frac{\sin k\alpha}{\cos k\pi} f(ki) = (-1)^k \frac{i}{\pi} \sin(k\alpha) f(ki).$$

24. *Dacă $|zf(z)|$ este mărginit în exteriorul cercurilor de centre $z = ki$ $(k \neq 0)$ și de rază $< \frac{1}{2}$, dacă $-\pi < \alpha < \pi$ și punctele singulare ale lui $f(z)$ formează un șir a_n cu $|a_n| \leqslant |a_{n+1}|$, $(n = 0, 1 \ldots)$ și $a_n \neq ki$ pentru $k \neq 0$, șirul fiind finit sau convergent la ∞, avem*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(in) \sin n\alpha = \pi i \Sigma \mathcal{R}(a_n)$$

$\mathcal{R}(a_n)$ fiind reziduul integrandului în a_n. (Cînd una din sume este convergentă.)

Luăm în exemplul 23, $C = C_n$ cercuri de rază $n + \varepsilon < R_n < n - \varepsilon + 1$ și centru O, care să nu treacă prin nici un a_n. Integrandul $F(z)$ satisface condițiile $|zF(z)|$ mărginit uniform pe C_n și $zF(z) \to 0$ uniform pe C_n, în sectoarele $-\pi + \eta < \arg z < \pi - \eta$. Deci integrala $\to 0$.

25. *Aplicații.* $f(z) = \dfrac{1}{z^{2q+1}}$, *$q$ întreg* $\geqslant 0$.

Aici $f(in) = +i(-1)^{q+1}\dfrac{1}{n^{2q+1}}$; $\mathcal{R}(O)$ este reziduul lui $\dfrac{\operatorname{sh} \alpha z}{z^{2q+1} \operatorname{sh} \pi z}$ în $z = O$, adică

$$\mathcal{R}(O) = \frac{1}{(2q)!} \lim \frac{\mathrm{d}^{2q}}{\mathrm{d}z^{2q}} \left(\frac{\operatorname{sh} \alpha z}{\operatorname{sh} \pi z}\right)_{z \to O}.$$

Avem astfel formula:

$$\sum_{1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sin n\alpha}{n^{2q+1}} = (-1)^q \frac{\pi}{2} \mathcal{R}(O) \qquad -\pi < \alpha < \pi.$$

Pentru $q = 0$, $\mathcal{R}(O) = \dfrac{\alpha}{\pi}$ și deci

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\sin n\alpha}{n} = \frac{\alpha}{2}. \tag{37}$$

Pentru $q = 1$,

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha z}{\operatorname{sh} \pi z} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{1 + \frac{1}{6}\alpha^2 z^2 + \dots}{1 + \frac{1}{6}\pi^2 z^2 + \dots} = \frac{\alpha}{\pi}\left(1 + \frac{\alpha^2 - \pi^2}{6} z^2 + \dots\right),$$

deci

$$\mathcal{R}(O) = \frac{\alpha(\alpha^2 - \pi^2)}{6\pi}$$

și

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\sin n\alpha}{n^3} = \frac{\alpha(\pi^2 - \alpha^2)}{12}.$$

De aici prin derivare (seria este absolut și uniform convergentă)

$$\sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{\cos n\alpha}{n^2} = \alpha \frac{\pi^2}{12} - \frac{\alpha^2}{4}.$$

Înlocuind α cu $\pi - \alpha$, deci pentru $0 < \alpha < 2\pi$, avem

$$(0 < \alpha < 2\pi) \quad \sum_1^\infty \frac{\sin n\alpha}{n} = \frac{\pi - \alpha}{2},$$

$$\sum_1^\infty \frac{\sin n\alpha}{n^3} = \frac{(\pi - \alpha)(2\pi - \alpha)\alpha}{12}, \quad \sum_1^\infty \frac{\cos n\alpha}{n^2} = \frac{(\pi - \alpha)^2}{4} - \frac{\pi^2}{12} \quad (\pi - \alpha)$$

și schimbînd α cu $-\alpha$ avem formule variabile pentru $-2\pi < \alpha < 0$.

26. *Să luăm, în exemplul* 23, $f(z) = \dfrac{1}{z - \zeta}$; $\zeta \neq ki$ $(k \neq 0)$.

$|zf(z)|$ este mărginit în tot planul cu excepția unui cerc $|z - \zeta| < \varepsilon$. Luînd cercuri C_n ca în exemplul 24 (dar nu prin ζ), integrala $\to 0$ și avem

$$\Sigma = \frac{\operatorname{sh} \alpha\zeta}{\operatorname{sh} \pi\zeta}.$$

Deci

$$\pi i \frac{\operatorname{sh} \alpha\zeta}{\operatorname{sh} \pi\zeta} = -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin n\alpha}{\zeta - ni}$$

sau

$$\frac{\operatorname{sh} \alpha z}{\operatorname{sh} \pi z} = \frac{2}{\pi} \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{n \sin n\alpha}{z^2 + n^2} \quad (-\pi < \alpha < \pi)$$

dezvoltare uniform convergentă în tot planul cu excepția unor cercuri de centrare $z = ki$ $(k \neq 0)$ și rază $< \dfrac{1}{2}$.

Pentru $z = 0$ obținem formula (37) de la exemplul 25.

Pentru $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ obținem

$$\frac{1}{\operatorname{ch} \frac{\pi}{2} z} = \frac{4}{\pi} \sum_1^\infty \frac{(2n - 1)(-1)^{n-1}}{z^2 + (2n - 1)^2},$$

sau $$\frac{1}{\operatorname{ch}\pi z}=\frac{4}{\pi}\sum_{1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{4z^2+(2n-1)^2}.$$

27. $\displaystyle\int_C \frac{(1-x^2-y^2)y\,dx+(1+x^2+y^2)x\,dy}{1+2x^2-2y^2+(x^2+y^2)^2}$, *C fiind elipsa de focare* $z=\pm i$.

Integrala poate fi scrisă

$$\frac{1}{2i}\int_C \frac{z\,dz-\bar{z}\,d\bar{z}+z\bar{z}(\bar{z}\,dz-z\,d\bar{z})}{1+z^2+\bar{z}^2+z^2\bar{z}^2}=\frac{1}{2i}\int_C \frac{(1+\bar{z}^2)z\,dz-(1+z^2)\bar{z}\,d\bar{z}}{(1+z^2)(1+\bar{z}^2)}=\operatorname{Im}\int_C \frac{z\,dz}{1+z^2}=2\pi.$$

Focarele sînt polii integrandului şi $\mathcal{R}(i)=\mathcal{R}(-i)=\frac{1}{2}$.

28. $\displaystyle I=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^{n+1}}\begin{pmatrix}n\geqslant 0\\ \text{întreg}\end{pmatrix}$.

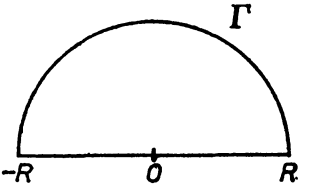

Fig. 114

Această integrală improprie există. Pentru a o calcula considerăm $J=\int_C \frac{dz}{(1+z^2)^{n+1}}$, C format din segmentul $-R\leqslant x\leqslant R$ şi semicercul Γ cu acest diametru în semiplanul pozitiv (fig. 114). Singurul pol interior de ordin $n+1$, este $+i$ (R fiind presupus >1).

$$\mathcal{R}(+i)=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{(z+i)^{n+1}}\right]_{z=i}=(-1)\frac{n(n+1)\dots(2n)}{n!(2i)^{2n+1}}=\frac{1}{2i}\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}.$$

Deci $J=\dfrac{\pi(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$. Cum $z\dfrac{1}{(1+z^2)^{n+1}}\to 0$ pentru $z\to\infty$, avem (aplicînd criteriul A): $\int_\Gamma\to 0$ şi rămîne $I=\dfrac{\pi(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$.

29. $\displaystyle I=\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^2+x^4}\,dx$ (m *întreg*)

Considerăm $\displaystyle\int_C \frac{e^{imz}\,dz}{1+z^2+z^4}=J$, pe conturul precedent. Cum $(1+z^2+z^4)(1-z^2)=1-z^6$, ecuaţia $1+z^2+z^4=0$ are rădăcinile

$$\alpha=e^{\frac{i\pi}{3}}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2},\quad \alpha^2=e^{\frac{2i\pi}{3}}=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2},$$

$$\alpha^4=e^{\frac{4i\pi}{3}}=-\alpha\qquad \alpha^5=e^{\frac{5i\pi}{3}}=-\alpha^2.$$

Primele două sînt în C şi ne dau poli simpli ai integrandului, cu reziduurile

$$\mathcal{R}(\alpha)=\frac{e^{im\alpha}}{4\alpha^3+2\alpha}=\frac{e^{im\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{1}{i\sqrt{3}}\frac{e^{\frac{m}{2}(-\sqrt{3}+i)}}{2e^{\frac{i\pi}{3}}},$$

$$\mathcal{R}(\alpha^2)=\frac{e^{im\alpha^2}}{4\alpha^6+2\alpha^2}=\frac{e^{im\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}}{3+i\sqrt{3}}=\frac{-1}{i\sqrt{3}}\frac{e^{\frac{m}{2}(-\sqrt{3}-i)}}{2e^{\frac{2i\pi}{3}}}$$

($\alpha^3 = -1$, $\alpha^6 = 1$). Deci

$$J = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-m\frac{\sqrt{3}}{2}} e^{-\frac{i\pi}{2}} \left(e^{i\left(\frac{m}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} - e^{-i\left(\frac{m}{2}+\frac{\pi}{6}\right)} \right) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} e^{-m\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin\left(\frac{m}{2}+\frac{\pi}{6}\right).$$

Funcția e^{iz} este mărginită în semiplanul superior (căci $|e^{iz}| = e^{-y} \leqslant 1$ pentru $y \geqslant 0$). În orice unghi din acest semiplan, cu laturi diferite de axa reală, $e^{iz} \to 0$ pentru $z \to \infty$ (căci $|e^{iz}| = e^{-R\sin\theta} < e^{-R\sin\theta_0} \to 0$ pentru $|z| = R \to \infty$). Astfel $z \frac{e^{iz}}{1+z^2+z^4} \to 0$ într-un asemenea unghi, iar $\left| z \frac{e^{iz}}{1+z^2+z^4} \right|$ este mărginit în tot semiplanul superior, în exteriorul cercului unitate. Aplicînd criteriul **B** rezultă $\int_\Gamma \to 0$. Deci

$$I = \frac{\pi}{\sqrt{3}} e^{-m\frac{\sqrt{3}}{2}} \sin\left(\frac{m}{2}+\frac{\pi}{6}\right).$$

30. $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx \quad (0 < a < 1).$

Considerăm $J = \int_C \frac{e^{az}}{1+e^z} dz$ pe dreptunghiul din figura 115. Integrandul are în dreptunghi polul πi. $\mathcal{R}(\pi i) = -e^{i\pi a}$. Pe laturile $z = R + iy$, $z = -R' + iy$ $(0 \leqslant y \leqslant 2\pi)$ avem

$$\left| \frac{e^{az}}{1+e^z} \right| \leqslant \frac{e^{aR}}{e^R - 1} \to 0 \qquad (a < 1),$$

respectiv

$$\left| \frac{e^{az}}{1+e^z} \right| \leqslant \frac{e^{-aR'}}{1-e^{-R'}} \to 0 \qquad (a > 0).$$

Aceste laturi avînd lungime constantă, integrala corespunzătoare $\to 0$. Pe celelalte laturi $z = x$ respectiv $z = x + 2\pi i$, deci făcînd $R \to \infty$ și $R' \to \infty$ (unde am luat $R' \neq R$ pentru a face să rezulte existența integralei reale improprii),

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{a(x+2\pi i)}}{1+e^x} dx = -2\pi i e^{i\pi a}$$

sau

$$-\frac{1-e^{2i\pi a}}{2ie^{i\pi a}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \pi,$$

adică

$$I = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Punînd $x' = e^x$ mai putem scrie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x'^{a-1} dx'}{1+x'} = \frac{\pi}{\sin \pi a},$$

integrală calculată direct din exemplul 17.

31. $I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1} \log x}{1+x} \mathrm{d}x \quad (0 < a < 1).$

Se consideră $J = \int_C \frac{z^{a-1} \log z}{1+z}$ pe conturul din figura 116. Se vede la fel ca în exemplul 17 că $\int_\gamma \to 0$ și $\int_\Gamma \to 0$. $\mathcal{R}(-1) = -\mathrm{i}\pi\, \mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}$, se ajunge la

$$\int_0^{+\infty} [x^{a-1} \log x - x^{a-1} \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}} (\log x + 2\pi\mathrm{i})] \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = 2\pi^2 \mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}$$

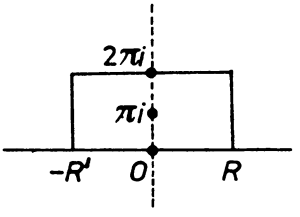

Fig. 115

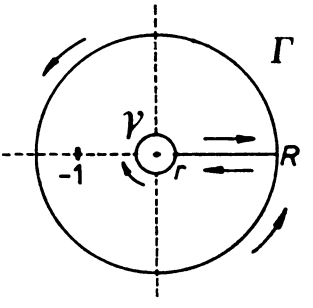

Fig. 116

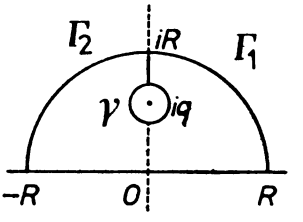

Fig. 117

sau utilizînd exemplul 17:

$$I_1(1 - \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}}) - 2\pi\mathrm{i}\, \mathrm{e}^{2a\pi\mathrm{i}} \frac{\pi}{\sin a\pi} = 2\pi^2 \mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}}$$

sau

$$-I_1 \sin^2 a\pi = \pi^2(\mathrm{e}^{a\pi\mathrm{i}} - \mathrm{i} \sin a\pi) = \pi^2 \cos a\pi,$$

deci

$$I_1 = -\pi^2 \frac{\cos a\pi}{\sin^2 a\pi}.$$

32. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bx}\, \mathrm{d}x}{(q + \mathrm{i}x)^a} \quad 0 < a < 1,\ b > 0,\ q \text{ real} > 0.$

Considerăm $\int_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{(q+\mathrm{i}z)^a} \mathrm{d}z$ pe conturul din figura 117. Am izolat punctul critic $\mathrm{i}q$ printr-un cerc γ de centru $\mathrm{i}q$ și rază r. Vom alege ca determinarea lui $(q + \mathrm{i}z)^a$ aceea pentru care $\arg(r + \mathrm{i}z) = 0$ pe marginea din dreapta tăieturii $(\mathrm{i}q, \mathrm{i}R)$. Deoarece $b > 0$, $\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz} \to 0$ pentru $R \to \infty$ în cele două cadrane ale semiplanului superior, din care am scos două unghiuri arbitrar de mici adiacente axei reale. $z f(z) \to 0$ în aceste unghiuri (vezi exemplul 29). Apoi $\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz} \leqslant 1$ în tot semiplanul superior. Deci $\int_{\Gamma_1} \to 0$, $\int_{\Gamma_2} \to 0$. (Căci $|z f(z)|$ este mărginit în acest semiplan, pentru $R > q + \varepsilon$, întrucît $\left|\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}bz}}{(q+\mathrm{i}z)^a}\right| \to 0$). De asemenea $(z - \mathrm{i}q) f(z) \to 0$ pentru $z \to \mathrm{i}q$ (pentru că $a < 1$), deci $\int_\gamma \to 0$ pentru $r \to 0$.

Pe axa imaginară avem $z = iy$ și pe marginea din dreapta a tăieturii, $q + iz = q - y$ și argumentul fiind luat $=0$) $(q+iz)^a = e^{a\log(q+iz)} = e^{a\log(q-y)} = (q-y)^a$. În urma circuitului $-\gamma$, $\arg(q + iz) = \arg i(z - iq)$ crește cu -2π, deci $(q + iz)^a$ se înmulțește cu $e^{-2\pi ai}$. Astfel, notînd cu $f(iy)$ restricția lui $f(z)$ pe marginea din stînga a tăieturii, avem

$$\int_{iR}^{i(q+r)} f\,dz + \int_{i(q+r)}^{iR} f_1 dz = -i(1 - e^{2\pi ai}) \int_{q+r}^{R} \frac{e^{-by}}{(q-y)^a}\,dy$$

$$= -\frac{e^{2\pi ai} - 1}{i} \int_{br}^{b(R-q)} e^{-bq} b^{a-1} e^{-x}\, x\,dx$$

făcînd schimbarea de variabilă $q - y = \frac{x}{b}$.

33. $I = \int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt[3]{3(x-1)(x^2-1)}}{(x+2)^3}\,dx.$

Considerăm $J = \int_C \frac{\sqrt[3]{3(z-1)(z^2-1)}}{(z+2)^3}\,dz$ pe conturul din figura 118 cu determinarea care este reală pe segmentul $(-1, +1)$, Această determinare poate fi separată în domeniul dintre Γ și tăietură. Deoarece $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$, $\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = 0$, $\lim_{z\to -1}(z+1)f(z) = 0$, avem $\int_\Gamma \to 0$ pentru $R \to \infty$ și $\int_\gamma \to 0$ $\int_{\gamma'} \to 0$ pentru $r \to 0$. Cum circuitul $-\gamma$ înmulțește pe $f(z)$, cu $e^{-\frac{4\pi}{3}i} = e^{\frac{2\pi}{3}i}$ (din cauza factorului $(z-1)^{\frac{2}{3}}$), avem

$$(1 - e^{\frac{2\pi i}{3}})\, I = 2\pi i\, \mathcal{R}(-2).$$

Spre a calcula pe $\mathcal{R}(-2)$ observăm că în -2 determinarea aleasă a radicalului este egală cu determinarea reală multiplicată cu $e^{\frac{\pi i}{3}}$, cum se vede mergînd de la 0 la -2 pe axa reală și pe un semicerc al cercului γ' (spre a evita punctul critic -1, unde determinările nu pot fi deosebite). Punînd $z + 2 = h$, avem în vecinătatea punctului -2:

$$f(z) = -\frac{3}{h^3}(1-h)^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{h}{3}\right)^{\frac{2}{3}} e^{\frac{\pi i}{3}}$$

$$= -\frac{3}{h^3}\left(1 - \frac{h}{3} - \frac{h^2}{9} + \ldots\right)\left(1 - \frac{2h}{9} - \frac{h^2}{81} + \ldots\ e\right)^{\frac{\pi i}{3}}$$

de unde $\mathcal{R}(-2) = \frac{4}{27} e^{\frac{\pi i}{3}}$ și

$$I = \frac{4\pi}{27} \frac{2i\, e^{\frac{\pi i}{3}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{3}}} = -\frac{4\pi}{27} \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = -\frac{8\pi}{27\sqrt{3}}.$$

34. $I = \int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} \pi x}\,dx \qquad -\pi < a < \pi.$

Integrala există. Vom considera:

$$J = \int_C \frac{e^{az}\,dz}{\operatorname{sh} \pi z}$$

pe conturul din figura 119. $f(z)$ are la distanță finită numai polii $z = ki$. Este destul să luăm $0 < a < \pi$, căci schimbînd a în $-a$ și z în $-z$ obținem $I(-a) = -I(a)$. Avem $\frac{z}{z \operatorname{sh} \pi z} =$

$= \frac{1}{\pi + \frac{\pi^3 z^2}{3!} + \ldots} \to \frac{1}{\pi}$ pentru $z \to 0$ și $\frac{z - i}{\operatorname{sh} \pi z} \to \frac{1}{\pi \operatorname{chi} \pi} = -\frac{1}{\pi}$ pentru $z \to i$. Deci

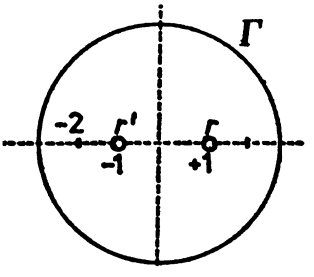

Fig. 118

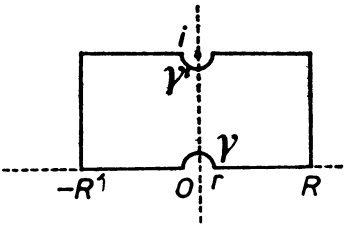

Fig. 119

$zf(z) \to \frac{1}{\pi}$ pentru $z \to 0$ și $\to -\frac{e^{ia}}{\pi}$ pentru $z \to i$, de unde (criteriul A'):

$$\int_{\to -\gamma} \to -i \text{ și } \int_{-\gamma'} \to +ie^{ia}, \text{ pentru } r \to 0.$$

Pentru $z = R + iy$ avem, cînd $m > 0$, $|e^{-mz}| = e^{-mR} \to 0$ pentru $R \to \infty$; iar pentru $z = -R' + iy$, $e^{mz} \to 0$ pentru $R' \to \infty$. Deci pe prima dreaptă, $f(z) = \frac{2e^{(a-\pi)z}}{1 - e^{-2\pi z}} \to 0$, iar pe a doua $f(z) \to 0$ pentru $R' \to \infty$. $\left(f(z) = \frac{2e^{(a+\pi)z}}{e^{2\pi z} - 1}\right)$. Astfel integralele pe segmentele (de lungime 1) paralele cu axa imaginară tind la 0.

Pe dreapta $z = x + i$ avem $f(z) = \frac{e^{a(x+1)}}{\operatorname{sh} \pi(x+i)} = -e^{ia} \frac{e^{ax}}{\operatorname{sh} \pi x}$.

În definitiv:

$$(1 + e^{ia}) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}\, dx}{\operatorname{sh} \pi x} + i(e^{ia} - 1) = 0,$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} dx}{\operatorname{sh} \pi x} = \operatorname{tg} \frac{a}{2}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-ax}\, dx}{\operatorname{sh} \pi x} = -\operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

sau

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{ch} ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = 0, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{sh} \pi x} dx = \operatorname{tg} \frac{a}{2}$$

și

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{a}{2}.$$

35. $I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}}$.

Considerăm

$$\int_C \frac{dz}{\sqrt[3]{1 - z^3}} = \int_\Gamma \frac{dz}{\sqrt[3]{1 - z^3}},$$

C fiind format din 3 laturi din figura 120 și un cerc de centru 0 și rază > 1. Funcția este olomorfă pe exteriorul lui Γ fiindcă ∞ nu este punct critic și $\dfrac{z}{\sqrt[3]{1-z^3}} \to -e^{-\frac{\pi i}{3}}$ cînd $\Gamma \to \infty$, dacă luăm determinarea radicalului care este reală pe partea inferioară a segmentului $(0,1)$,

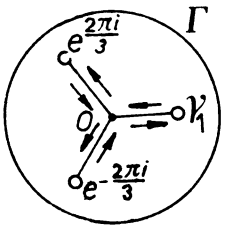

Fig. 120

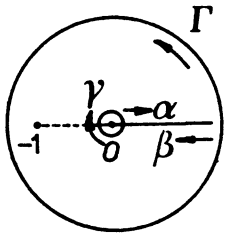

Fig. 121

(căci pe prelungirea acestuia, determinarea considerată este egală cu cea reală înmulțită cu $e^{\frac{\pi i}{3}}$); urmează $\int_\Gamma \to -2\pi i\, e^{-\frac{\pi i}{3}} = \int_C$. Apoi integralele pe cele 3 laturi sînt egale, căci de exemplu primul este transformat în al doilea prin substituția $z' = e^{\frac{2\pi i}{3}} z$, deci

$$e^{-\frac{2\pi i}{3}} \int_{C_2} \frac{dz'}{\sqrt[3]{1-z'^3}} = \int_{C_2} \frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}}\, dz'}{\sqrt[3]{1-z'^3}} = \int_{C_1} \frac{dz}{\sqrt[3]{1-z^3}}.$$

(Pe C_2 avem determinarea inițială înmulțită cu $e^{-\frac{2\pi i}{3}}$.)

În sfîrșit, cum $\int_{\gamma_1} \to 0$ (căci $\dfrac{z-1}{\sqrt[3]{1-z^3}} \to 0$),

$$\int_{C_1} \frac{dz}{\sqrt[3]{1-z^3}} = \left(1 - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^3}} = -\frac{2\pi i}{3} e^{-\frac{\pi i}{3}},$$

de unde

$$I = -\frac{\pi}{3} \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2\pi}{2\sqrt{3}}.$$

36. $$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^n}\, dx.$$

Dacă considerăm conturul C din figura 121 pentru $\int_C \dfrac{\log z\, dz}{(1+z)^n}$, integrala pe α ar tinde la I; iar integrala pe β la $-I - \int_0^\infty \dfrac{2\pi i}{(1+z)^n}\, dz$ și aplicînd teorema reziduurilor, I ar dispare din calcul. De aceea considerăm

$$J = \int_C \frac{(\log z)^2}{(1+z)^n}\, dz \qquad n > 1.$$

Avem

$$\lim_{|z| \to \infty} \frac{z\,(\log z)^2}{(1+z)^n} = \lim_{|z| \to \infty} \frac{(\log z)^2}{z^{n-1}\left(1+\frac{1}{z}\right)^n} = 0$$

observînd că $\log z = \log |z| + i\theta$, unde θ este mărginit pe Γ). Apoi $\lim_{z\to 0} \frac{z(\log z)^2}{(1+z)^n} = 0$ (analog). Pentru a calcula $\mathcal{R}(-1)$ punem $z + 1 = \zeta$, și avem pentru determinarea reală pe α, în vecinătatea lui $\zeta = 0$:

$$\frac{(\log z)^2}{(1+z)^n} = \frac{(\log(\zeta-1))^2}{\zeta^n} = \frac{1}{\zeta^n}\left(i\pi + \zeta + \frac{\zeta^2}{2} + \ldots + \frac{\zeta^{n-1}}{n-1} + \ldots\right)^2,$$

de unde pentru n impar,

$$\mathcal{R}(-1) = 2\left[\frac{i\pi}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{2(n-3)} + \ldots + \frac{4}{(n-1)^2}\right],$$

iar pentru n par

$$\mathcal{R}(-1) = 2\left[\frac{i\pi}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \frac{1}{2(n-3)} + \ldots + \frac{2}{n(n-2)}\right].$$

Așadar,

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{(1+x)^n}\,dx + \int_\infty^0 \frac{(\log x + 2\pi i)^2}{(1+x)^n}\,dx =$$

$$= \begin{cases} -4\pi i\left[\frac{i\pi}{n-1}\,\frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{4}{(n-1)^2}\right] & \text{pentru } n \text{ impar,} \\ -4\pi i\left[\frac{i\pi}{n-1}\,\frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{2}{n(n-2)}\right] & \text{pentru } n \text{ par,} \end{cases}$$

de unde

$$4\pi i\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^n}\,dx - 4\pi^2\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)^n} =$$

$$= \begin{cases} 4\pi i\left[\frac{\pi i}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{4}{(n-1)^2}\right] & \text{pentru } n \text{ impar,} \\ 4\pi i\left[\frac{\pi i}{n-1} + \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{2}{(n-1)^2}\right] & \text{pentru } n \text{ par.} \end{cases}$$

$$4\pi i\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{(1+x)^n} - \frac{4\pi^2}{n-1} =$$

$$\begin{cases} -\frac{4\pi^2}{n-1} + 4\pi i\left[\frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{4}{(n-1)^2}\right] & \text{pentru } n \text{ impar,} \\ -\frac{4\pi^2}{n-1} + 4\pi i\left[\frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{2}{n(n-2)}\right] & \text{pentru } n \text{ par,} \end{cases}$$

de unde

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{(1+x)^n}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{4}{(n-1)^2} & \text{pentru } n \text{ impar,} \\ \frac{1}{n-2} + \ldots + \frac{2}{n(n-2)^2} & \text{pentru } n \text{ par.} \end{cases}$$

37. *Schimbînd* z *cu* $\mathrm{i}z$ *în formulele* (28), (29), (30), (31) *şi* (32) *ale exemplului* 20, *avem*

$$(-\pi \leqslant \alpha \leqslant \pi) \quad \pi \frac{\operatorname{ch} \alpha z}{\operatorname{sh} \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^k \frac{\cos k\alpha}{z + \mathrm{i}k} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^k \frac{\cos k\alpha}{z^2 + k^2},$$

$$\pi \operatorname{cth} \pi z = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - \mathrm{i}k} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{z}{z^2 + k^2},$$

$$(-\pi < \alpha < \pi) \quad \pi \frac{\operatorname{sh} \alpha z}{\operatorname{sh} \pi z} = -\mathrm{i} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\alpha}{z - \mathrm{i}k} = 2 \sum_{1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{k \sin k\alpha}{z^2 + k^2},$$

$$\frac{\pi}{\operatorname{sh} \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{z - \mathrm{i}k} = \frac{1}{z} + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k z}{z^2 + k^2},$$

$$\frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi z} = 2 \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k \mathrm{i}}{2z - (2k+1)\mathrm{i}} = 4 \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k+1)}{4z^2 + (2k+1)^2}.$$

Primele dezvoltări sînt uniform convergente în orice domeniu mărginit, care lasă în exterior punctele $z = \mathrm{i}k$, *cu excepţia lui* $z = 0$ *în cazul formulei a treia. Aceasta ne dă pentru* $z = 0$, $\sum_{1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin k\alpha}{k} = \frac{\alpha}{2}$, *formulă stabilită pe altă cale mai sus (exemplul 19). Ultima dezvoltare este uniform convergentă în orice domeniu mărginit, care lasă în exterior punctele* $\frac{2k+1}{2}\mathrm{i}$.

38. *Să luăm în* (26) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{\alpha z}}{\mathrm{e}^z - 1}$, $0 < \alpha < 1$.

Avem $\alpha_k = 2k\pi\mathrm{i}, \mathcal{R}(\alpha_k) = \mathrm{e}^{2k\pi\alpha\mathrm{i}}$.

Pentru $z \to \infty$,

$$\mathrm{e}^{-mz} \to 0 \text{ în } -\frac{\pi}{2} + \eta < \theta < \frac{\pi}{2} - \eta$$

$$\mathrm{e}^{mz} \to 0 \text{ în } \frac{\pi}{2} + \eta < \theta < \frac{3\pi}{2} - \eta \qquad m > 0.$$

Scriind

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{(\alpha-1)z}}{1 - \mathrm{e}^{-z}} \quad \text{în} \quad -\frac{\pi}{2} + \eta < \theta < \frac{\pi}{2} - \eta,$$

se vede că

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha z}}{\mathrm{e}^z - 1} \to 0$$

în unghiurile

$$-\frac{\pi}{2} + \eta < \theta < \frac{\pi}{2} - \eta,$$

$$\frac{\pi}{2} + \eta < \theta < \frac{3\pi}{2} - \eta.$$

Apoi $f(z)$ este mărginit în tot planul minus cercurile de centre $2k\pi\mathrm{i}$ şi rază r arbitrar de mică. Într-adevăr,

$$|\mathrm{e}^{-mz}| = \mathrm{e}^{-mx} < \mathrm{e}^{-ma} \quad \text{pentru } x > a > 0$$

$$|\mathrm{e}^{mz}| = \mathrm{e}^{mx} < \mathrm{e}^{-ma} \quad \text{pentru } x < -a \qquad m > 0.$$

Urmează

$$\left|\frac{e^{\alpha z}}{e^z-1}\right| = \left|\frac{e^{-(1-\alpha)z}}{1-e^{-z}}\right| < \frac{e^{-(1-\alpha)a}}{1-e^{-a}} \quad \text{pentru} \quad x > a,$$

$$\left|\frac{e^{\alpha z}}{e^z-1}\right| = \frac{e^{-\alpha a}}{1-e^{-a}} \quad \text{pentru } x < -a.$$

În banda $|x| < a$, $e^{\alpha z}$ având perioada $\frac{2\pi i}{\alpha}$ este mărginit. De asemenea $\frac{1}{e^z-1}$ în această bandă minus cercurile de rază r (funcția fiind olomorfă într-un dreptunghi $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant \pi$ din care s-a scos cercul $|z| < r$). Astfel funcția $\frac{e^{\alpha z}}{e^z-1}$ satisface condițiile criteriului **B**, și cum $\lim_{t\to\infty} \frac{t}{t-z}\cdot\frac{e^{\alpha t}}{e^t-1} = 0$ cu excepția unghiurilor de deschidere 2η în jurul axei imaginare, formula (26) ne dă

$$\frac{e^{\alpha z}}{e^z-1} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2k\pi\alpha i}}{z-2k\pi i} = \frac{1}{z} + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{z\cos 2k\pi\alpha - 2k\pi \sin 2k\pi\alpha}{z^2+4k^2\pi^2}, \qquad 0<\alpha<1$$

dezvoltare uniform convergentă în orice domeniu mărginit, care lasă în exterior punctele $2k\pi i$.

Pentru $\alpha = 0$ avem

$$\frac{1}{e^z-1} \to 0 \qquad -\frac{\pi}{2}+\eta < \theta < \frac{\pi}{2}-\eta,$$

$$\to -1 \qquad +\frac{\pi}{2}+\eta < \theta < \frac{3\pi}{2}-\eta$$

și se vede ca mai sus că funcția este mărginită în aceleași condiții. Aplicînd criteriul **B** celor două semiplane determinate de axa imaginară, găsim $\int_{C_n} \frac{f(t)\,dt}{t-z} \to -i\pi$. Deci

$$\frac{1}{e^z-1} = -\frac{1}{2} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z-2k\pi i} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{z} + 2\sum_{1}^{\infty} \frac{z}{z^2+4k^2\pi^2},$$

sau

$$\operatorname{cth}\frac{z}{2} = \frac{2}{z} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{z}{z^2+4k^2\pi^2},$$

formulă care coincide cu una de la exemplul 37.

Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ formula de mai sus se scrie

$$\frac{1}{\operatorname{sh}\frac{z}{2}} = \frac{2}{z} + 4\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^k z}{z^2+4k^2\pi^2}$$

care coincide de asemenea cu o formulă de la exemplul 37.

Schimbînd z cu iz, avem alte formule.

39. *Să se calculeze*

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{1-x}{x^2}}\,\frac{dx}{1+x}.$$

Funcția $f(z) = \sqrt[3]{\frac{1-z}{z^2}}\,\frac{1}{1+z}$ are punctele critice 0, 1, și polul -1. Sîntem conduși la

$$J = \int_C \sqrt[3]{\frac{1-z}{z^2}}\,\frac{dz}{1+z}$$

pe conturul din figura 122 și cu determinarea lui f care este reală pe marginea superioară a tăieturii $(0,1)$. Avem

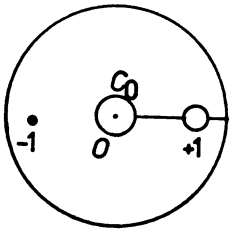

Fig. 122

$$zf \to 0, \quad zf \to 0, \quad (z-1)f \to 0,$$

$$z \to \infty \qquad z \to 0 \qquad z \to 1$$

$$\mathcal{R}(-1) = \sqrt[3]{2}\, e^{-\frac{2\pi j}{3}}$$

căci determinarea aleasă, prelungită pe semicercul superior al lui C_0 și segmentul $(0, -1)$, își mărește argumentul cu $-\frac{2\pi}{3}$ cînd z parcurge semicercul considerat și este reprezentată în vecinătatea lui -1 de $e^{+\frac{2\pi i}{3}} f$, f fiind determinarea reală (și pozitivă) de pe segmentul $(0, 1)$. Aplicînd teorema reziduurilor, obținem

$$I + e^{-\frac{\pi i}{3}} I_1 + I_1 + e^{-\frac{\pi i}{3}} I = 2\pi i \sqrt[3]{2}\, e^{-\frac{2\pi i}{3}}.$$

Într-adevăr, după ce am parcurs marginea superioară a segmentului $(0,1)$ și semicercul de centru $+1$ în sens indirect, $\arg f$ a crescut de la 0 la $-\frac{\pi}{3}$ și am obținut pe segmentul $(1, +\infty)$ o determinare reprezentată de $-e^{-\frac{\pi i}{3}} f$, unde f este determinarea reală (negativă) de pe acest segment. Astfel integrala de pe $(1, +\infty)$ este $e^{-\frac{\pi i}{3}} I_1$, unde

$$I_1 = \int_1^{+\infty} \sqrt[3]{\frac{x-1}{x^2}}\,\frac{dx}{1+x} > 0.$$

Parcurgînd apoi cercul mare, revenim pe segmentul $(1, +\infty)$ cu determinarea

$$+ e^{-\frac{2\pi i}{3}} e^{-\frac{\pi i}{3}} f = -f,$$

ceea ce dă I_1 pe segmentul $(1, +\infty)$. Semicercul interior de centru 1 dă o creștere de $-\frac{\pi}{3}$ argumentului, care este acum $-\pi - \frac{\pi}{3}$, deci determinarea obținută pe marginea inferioară a segmentului $(1, 0)$, va fi $-e^{-\frac{\pi i}{3}} f$, f fiind determinarea pozitivă pe acest segment; integrala corespunzătoare este deci $e^{-\frac{\pi i}{3}} I$.

Să observăm că punînd $x = \frac{1}{x'}$ în I_1, obținem

$$I_1 = -\int_1^0 \sqrt[3]{(1-x')x'}\ \frac{dx'}{x'(1+x')} = \int_0^1 \sqrt[3]{\frac{1-x'}{x'^2}}\ \frac{dx'}{1+x'} = I.$$

Deci

$$\left(1 + e^{-\frac{\pi i}{3}}\right) I = \pi i \sqrt[3]{2}\, e^{-\frac{2\pi i}{3}}$$

sau

$$I\,\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}} - e^{-\frac{2\pi i}{3}}}{2i} = \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{2},$$

$$I = \frac{\pi\sqrt[3]{2}}{2\sin\frac{2\pi}{3}} = \pi\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt{3}}.$$

Exerciții

Integrale

1. $\int_{C_1} y\,dx$, $\int_{C_2} e^x\,dy$

unde C_1 este semicercul $x^2 + y^2 = a^2$, $x > 0$ și C_2 curba $y = \sin x$ $(0 < x < \pi)$.

R. $-\frac{\pi}{2}a^2$, $-\frac{1}{2}(e^\pi + 1)$.

2. *Să se afle reziduurile funcției $w = \frac{(\log z)^2}{z^2+1}$ în $z = \pm i$, pentru determinarea principală a logaritmului,*

R. $\pm i\frac{\pi^2}{8}$.

3. *Reziduurile funcției* $w = \frac{z^n e^{\frac{1}{z}}}{1+z}$.

R. $\mathcal{R}(-1) = \frac{(-1)^n}{e}$,

$$\mathcal{R}(0) = (-1)^{n+1}\left(\frac{1}{e} - \sum_0^n (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}\right),$$

$$\mathcal{R}(\infty) = (-1)^n \sum_0^{n-2} (-1)^\nu \frac{1}{\nu!}.$$

4. $\int_0^\infty \frac{dx}{x[(\log x)^2 + \pi^2]} = 1.$

R. Considerăm

$$\int_C \frac{dz}{z\log z} = J$$

cu determinarea principala a lui $\log z$ și conturul C ca în figura 123. $\mathcal{R}(1) = 1$, $\lim_{z\to 0} z f(z) = 0$; $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$. Făcînd $r \to 0$, $\mathcal{R} \to \infty$, avem

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x(\log|x| + \pi i)} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x(\log|x| - \pi i)} = 2\pi i$$

sau

$$\int_{0}^{-\infty} \frac{2\pi i\, dx}{x[(\log|x|)^2 + \pi^2]} = 2\pi i \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{x[(\log x)^2 + \pi^2]} = 2\pi i.$$

5. $$\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{b^2}{x^2}\right) \frac{a\,dx}{x^2 + a^2} = 2\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{x}\right) \frac{x\,dx}{x^2 + a^2} = \pi \log\left(1 + \frac{b}{a}\right) \qquad (a, b > 0).$$

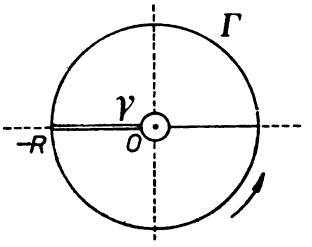

Fig. 123

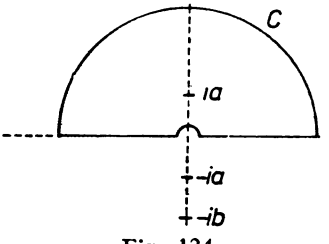

Fig. 124

R. Considerăm $J = \int_C \log\left(1 + \frac{bi}{z}\right) \frac{dz}{a - iz}$ și $J_1 = \int_C \log\left(1 + \frac{bi}{z}\right) \frac{dz}{a + iz}$ cu

$$\log\left(1 + \frac{bi}{z}\right) = \log(z + bi) - \log z$$

determinat astfel ca pentru $y = 0$,

$$\log\left(1 + \frac{bi}{x}\right) = \frac{1}{2} \log\left(1 + \frac{b^2}{x^2}\right) + i \operatorname{arc\,tg} \frac{b}{x}$$

cu determinarea principală a lui arc tg. Funcția $f(z)$ este olomorfă în interiorul curbei C, dată de figura 124. Pentru $f_1(z)$ avem polul ia cu reziduul

$$\mathcal{R}(ia) = -i \log\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Avem

$$J = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{bi}{x}\right) \frac{dx}{a - ix} + \int_0^\infty \log\left(1 - \frac{bi}{x}\right) \frac{dx}{a + ix} = 0$$

sau

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{b^2}{x^2}\right) \frac{a\,dx}{a^2 + x^2} - \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{x}\right) \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = 0$$

$$J_1 = \int_0^\infty \log\left(1 + \frac{bi}{x}\right) \frac{dx}{a + ix} + \int_0^\infty \log\left(1 - \frac{bi}{x}\right) \frac{dx}{a - ix} = 2\pi \log\left(1 + \frac{b}{a}\right)$$

sau

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{b^2}{x^2}\right) \frac{a\,dx}{a^2 + x^2} + \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{b}{x}\right) \frac{x\,dx}{a^2 + x^2} = \pi \log\left(1 + \frac{b}{a}\right),$$

de unde rezultă valorile date.

6. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos x + x\sin x}{x^2+a^2}\,dx = 2\pi e^{-a} \qquad (a>0).$

R. Integrala improprie există. Considerăm

$$\int_C \frac{e^{iz}}{z-ai}\,dz$$

cu $R\to\infty$, unde C este dat de figura 125. $\mathcal{R}(ai) = e^{-a}$; $\lim\limits_{z\to\infty} z f(z) = \lim\limits_{z\to\infty} e^{iz} = 0$, cu excepția unui unghi vecin cu axa reală, unde $z f(z)$ este mărginit. Așadar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x-ai}\,dx = 2\pi i\, e^{-a}$$

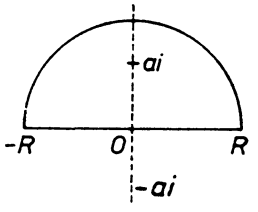

Fig. 125

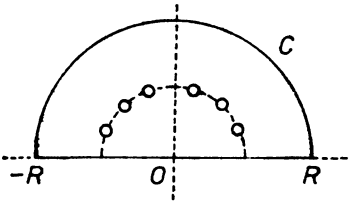

Fig. 126

sau

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\cos x - a\sin x}{x^2+a^2} + i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos x + x\sin x}{x^2+a^2} = 2\pi i\, e^{-a}.$$

(Pentru altă metodă de rezolvare a se vedea exemplul 16a.)

7. $\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{2n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi} \qquad (0<m<n, \text{ întregi}).$

R. Considerăm $\int_C \frac{z^{2m}\,dz}{z^{2n}+1}$ cu $R\to\infty$ și C dat de figura 126. Integrandul are în contur polii $z = e^{\frac{2k+1}{2n}\pi i}$ $(k=0,\ldots,n-1)$ cu reziduul $\mathcal{R}_k = \frac{1}{2n} e^{(2m-2n+1)\frac{2k+1}{2n}\pi i} =$

$= -\frac{1}{2n} e^{\frac{2m+1}{2n}(2k+1)\pi i}$ așa că

$$2\pi i\sum_0^{n-1}\mathcal{R}_k = -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i}\left(1 + e^{\frac{2m+1}{n}\pi i} + \ldots + e^{(n-1)\frac{2m+1}{n}\pi i}\right)$$

$$= -\frac{\pi i}{n} e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i}\,\frac{e^{(2m+1)\pi i}-1}{e^{\frac{2m+1}{n}\pi i}-1}$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{2\pi i}{e^{\frac{2m+1}{2n}\pi i} - e^{-\frac{2m+1}{2n}\pi i}} = \frac{\pi}{n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

Pe de altă parte

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0.$$

Deci

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = 2\int_0^{\infty} \frac{x^{2m}\,dx}{x^{2n}+1} = \frac{\pi}{n\sin\dfrac{2m+1}{2n}\pi}.$$

8. $$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\cos\dfrac{2a+1}{6}\pi}{\sin a\pi} \qquad (0<a<2),\ (a\neq 1).$$

$$\int_1^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sin\dfrac{2a+1}{3}\pi}{\sin a\pi}$$

R. Considerăm $\displaystyle\int_C \frac{z^{a-1}\,dz}{1+z+z^2}$ cu $\mathcal{R}\to\infty$, cu conturul C dat de figura 127 și cu determinarea lui $z^{a-1} = e^{(a-1)\log z}$ care este reală pe semiaxa pozitivă (deci arg z variază de a 0 la π). În contur avem polul $z_0 = \dfrac{1}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right) = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, cu reziduul

$$\mathcal{R}\left(e^{\frac{2\pi i}{3}}\right) = \frac{e^{(a-1)\frac{2\pi i}{3}}}{2e^{\frac{2\pi i}{3}}+1} = \frac{1}{i\sqrt{3}}\, e^{(a-1)\frac{2\pi i}{3}}.$$

$$\lim_{z\to 0} |z f(z)| = \lim_{z\to 0} |z^{a-2}| = \lim_{z\to 0} |z|^{a-2} = 0;$$

$$\lim_{z\to 0} |z f(z)| = \lim_{z\to 0} |z^{a}| = \lim_{z\to 0} |z|^{a} = 0.$$

Avem deci

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x+x^2} + \int_{-\infty}^{0} \frac{(-x)^{a-1}e^{(a-1)\pi i}\,dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, e^{(a-1)\frac{2\pi i}{3}},$$

sau schimbînd x în $-x$ în integrala a doua:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x+x^2} + e^{(a-1)\pi i}\int_0^{+\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\, e^{(a-1)\frac{2\pi i}{3}}. \tag{38}$$

Egalînd părțile reale și imaginare căpătăm, dacă $a\neq 1$:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1-x+x^2} = -\frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sin(a-1)\dfrac{2\pi}{3}}{\sin a\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sin\dfrac{2a+1}{3}\pi}{\sin a\pi},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}\,dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sin\dfrac{2a+1}{3}\pi}{\sin a\pi}\cos a\pi - \cos\frac{2a+1}{3}\pi\right) =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sin\dfrac{1-a}{3}\pi}{\sin a\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\cos\dfrac{2a+1}{6}\pi}{\sin a\pi}.$$

Pentru $a = 1$ expresiile precedente nu au sens; (38) se reduce la

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x+x^2} + \int_0^\infty \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

şi avem

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x+x^2} = \int_0^\infty \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)$$

şi deci

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}.$$

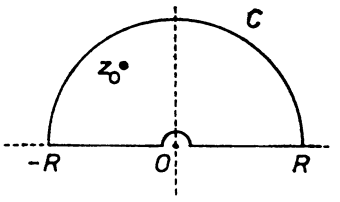

Fig. 127

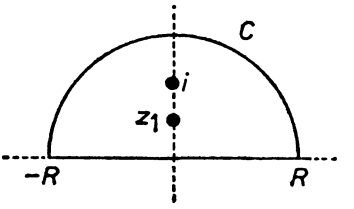

Fig. 128

9. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r \sin 2\theta}{1-2r\cos 2\theta + r^2}\,\theta\,d\theta = \begin{cases} \frac{\pi}{4}\log(1+r) & -1 < r < 1, \\ \frac{\pi}{4}\log\left(1+\frac{1}{r}\right) & r < -1 \text{ sau } r > 1. \end{cases}$$

R. Transformăm integrala intr-una cu limitele 0, $+\infty$ prin $x = \operatorname{tg}\theta$, ceea ce dă $\int_0^{+\infty} \frac{2rx}{(1+r)^2x^2+(1-r)^2} \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\,dx$. Sîntem astfel conduşi să considerăm

$$\int_C \frac{2rz}{(1+r)^2z^2+(1-r)^2} \frac{\log(1-iz)}{1+z^2}\,dz$$

$\left(\text{avînd în vedere } \operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}\right)$, unde C este dat de figura 128. Vom lua determinarea lui $\log(1-iz)$, care este reală pe semiaxa imaginară superioară.

Integrandul are polii:

$$z_0 = i \text{ cu reziduul } \frac{2ir}{-4r}\frac{\log 2}{2i} = -\frac{1}{4}\log 2,$$

$$z_1 = \pm i\,\frac{1-r}{1+r} \text{ cu reziduul}$$

$$\frac{\pm ir\frac{1-r}{1-r}\log\left(1\pm\frac{1-r}{1+r}\right)}{\pm i(1-r^2)\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2\right]} = \begin{cases} \frac{1}{4}\log\frac{2}{1+r}, \\ \frac{1}{4}\log\frac{2r}{1+r}. \end{cases}$$

Apoi

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \frac{2r}{(1+r)^2}\lim_{z\to\infty}\frac{\log(1-iz)}{1+z^2} = 0.$$

Așa dar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2rx}{(1+r)^2x^2+(1-r)^2} \frac{\log(1-ix)}{1+x^2}\,dx = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} i \log(1+r) \\ -\frac{\pi}{2} i \log\left(1+\frac{1}{r}\right) \end{cases} =$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{2rx}{(1+r)^2x^2+(1-r)^2} \frac{\log(1-ix)}{1+x^2}\,dx - \int_0^{\infty} \frac{2rx}{(1+r)^2x^2+(1-r)^2} \frac{\log(1+ix)}{1+x^2}\,dx =$$

$$= -2i\int_0^{\infty} \frac{2rx}{(1+r)^2x^2+(1-r)^2} \frac{\operatorname{arc\,tg}\, x}{1+x^2}\,dx,$$

de unde rezultatul afirmat.

10. *Pentru* $-1 < a < 1$,

$$\left.\begin{aligned} &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2\theta}{1-2r\cos 2\theta+r^2} (\operatorname{tg}\theta)^a\,d\theta \\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+r\cos 2\theta}{1+2r\cos 2\theta+r^2} (\operatorname{ctg}\theta)^a\,d\theta \end{aligned}\right\} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{4\cos\frac{a\pi}{2}}\left[1 \pm \left|\dfrac{1-r}{1+r}\right|^a\right], \\ cu + cînd - 1 < r < 1, \\ cu - cînd\ r < -1\ sau\ r > 1. \end{cases}$$

R. Punînd $x = \operatorname{tg}\theta$ în prima integrală și $x = \operatorname{cotg}\theta$ în a doua, ele devin

$$\int_0^{\infty} \frac{(1+r)x^2+(1-r)}{(1+r)^2x^2+(1-r)^2} \frac{x^a\,dx}{1+x^2}.$$

Sîntem conduși să considerăm

$$\int_C \frac{(1+r)z^2+(1-r)}{(1+r)^2z^2+(1-r)^2} \frac{z^a\,dz}{1+z^2},$$

cu C dat de figura 129.

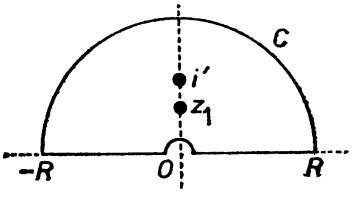

Fig. 129

Integrandul are în contur, polii:

$$z_0 = i, \text{ cu reziduul } \frac{-2r}{-4r} \frac{e^{a\frac{\pi}{2}i}}{2i} = -\frac{i}{4} e^{a\frac{\pi}{2}i},$$

$$z_1 = \pm i\frac{1-r}{1+r} \text{ cu reziduul}$$

$$\frac{1-r-\frac{(1-r)^2}{1+r}}{\pm 2i(1-r^2)} \frac{\left|\frac{1-r}{1+r}\right|^a e^{\frac{a\pi}{2}i}}{1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^2} = \pm \frac{1}{4i}\left|\frac{1-r}{1+r}\right|^a e^{\frac{a\pi}{2}i},$$

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \frac{1}{1+r} \lim_{z\to\infty} \frac{z^{a+1}}{1+z^2} = 0$$

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \frac{1}{1-r} \lim_{z\to 0} z^{a+1} = 0.$$

Deci

$$\int_0^\infty \frac{(1+r)x^2+(1-r)}{(1+r)x^2+(1-r)^2}\,\frac{x^a\,dx}{1+x^2} + e^{a\pi i}\int_{-\infty}^0 \frac{(1+r)x^2+(1-r)}{(1+r)x^2+(1-r)^2}\,\frac{(-x)^a\,dx}{1+x^2} =$$

$$= \left(1+e^{a\pi i}\right)\int_0^\infty \frac{(1+r)x^2+(1-r)}{(1+r)^2x^2+(1-r)^2}\,\frac{x^a\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\left[1 \pm \left|\frac{1-r}{1+r}\right|^a\right] e^{\frac{a\pi i}{2}},$$

de unde rezultatul anunțat.

Pentru $r = 0$ avem

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\,\theta)^a\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}\,\theta)^a\,d\theta = \frac{\pi}{2\cos\frac{a\pi}{2}} \qquad (-1<a<1).$$

Ceea ce se obține și pentru $r \to 1$.

11. *Pentru* $-2 < a < 2$ *și* r *real* $\neq -1$, $a \neq 0$.

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2\theta}{1-2r\cos 2\theta+r^2}\,(\operatorname{tg}\theta)^a\,d\theta\\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{r\sin 2\theta}{1+2r\cos 2\theta+r^2}\,(\operatorname{ctg}\,\theta)^a d\theta\end{aligned}\right\} = \frac{\pi}{4\sin\frac{a\pi}{2}}\left[1-\left|\frac{1-r}{1+r}\right|^a\right].$$

R. Se va considera $\int_C \frac{2rz}{(1+r)^2z^2+(1-r)^2}\,\frac{z^a\,dz}{1+z^2}$ și se va pune $x = \operatorname{tg}\,\theta$, respectiv $x = \operatorname{ctg}\,\theta$. În particular

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg}\,\theta)^{a-1}\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{ctg}\,\theta)^{a-1}\,d\theta = \frac{\pi}{2\sin\frac{a\pi}{2}},$$

formulă care se poate obține din cazul particular al exercițiului precedent dacă înlocuim pe a cu $a-1$.

12. $$\left.\begin{aligned}&\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-r\cos 2\theta}{1-2r\cos 2\theta+r^2}\log\cos\theta\,d\theta\\ &\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+r\cos 2\theta}{1+2r\cos 2\theta+r^2}\log\sin\theta\,d\theta\end{aligned}\right\} = \begin{cases}\frac{\pi}{4}\log\frac{1+r}{4} & -1<r<1,\\ \frac{\pi}{4}\log\frac{r}{1+r} & r<-1 \text{ sau } r>1.\end{cases}$$

R. Se consideră $\int_C \frac{(1+r)z^2+(1-r)}{(1+r)^2z^2+(1-r)^2}\,\frac{\log(1-iz)}{1+z^2}\,dz$,

apoi se pune $x = \operatorname{tg}\,\theta$, respectiv $x = \operatorname{cotg}\,\theta$.

În particular, pentru $r = 0$,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos\theta)\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\sin\theta)\,d\theta = -\frac{\pi}{2}\log 2.$$

13. *Să se calculeze pentru* $a > 0$, $l > 0$

$$I_1 = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-lx} \cos mx \, dx, \quad I_2 = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-lx} \sin mx \, dx.$$

R. Fie $\lambda = l + mi = re^{i\alpha}$; considerăm

$\int_C z^{a-1} e^{-z} \, dz$, cu C dat de figura 130 și cu determinarea principală a lui z^{a-1} corespunzătoare la $-\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}$.

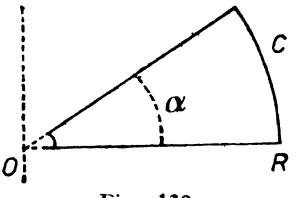

Fig. 130

$$\lim_{z\to\infty} |zf(z)| = \lim_{z\to\infty} |z^a e^{-z}| = \lim_{z\to\infty} R^a e^{-R\cos\theta} = 0,$$

căci $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $\quad (l > 0)$.

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = 0.$$

Pe latura a doua $z = t\lambda$ $\quad (0 < t < +\infty)$.
Avem deci

$$\int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} \, dx = \int_0^\infty e^{(a-1)[\log t + \log r + i\alpha]} e^{-t\lambda} re^{i\alpha} \, dt$$

sau

$$\Gamma(a) = r^a e^{a\alpha i} \int_0^\infty t^{a-1} e^{-lt} (\cos mt - i \sin mt) \, dt = 0$$

sau, punînd $t = x$

$$r^a(\cos a\alpha + i \sin a\alpha)(I_1 - i I_2) - \Gamma(a) = 0,$$

de unde

$$I_1 r^a \cos a\alpha + I_2 r^a \sin a\alpha - \Gamma(a) = 0,$$

$$I_1 r^a \sin a\alpha - I_2 r^a \cos a\alpha = 0,$$

$$I_1 = r^a \cos a\alpha \, \Gamma(a), \quad I_2 = r^a \sin a\alpha \, \Gamma(a).$$

14. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x+a} \, dx = \int_0^\infty \frac{xe^{-ax}}{1+x^2} \, dx$ $\quad (a > 0)$.

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x+a} \, dx = \int_0^\infty \frac{e^{-ax}}{1+x^2} \, dx$$

R. Considerăm $\int_C \frac{e^{iz}}{z+a} \, dz$ cu $R \to \infty$

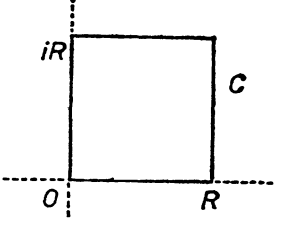

Fig. 131

și conturul C dat de figura 131.

$$\int_0^R \frac{e^{ix} \, dx}{x+a} + i\int_0^R \frac{e^{i(R+iy)}}{R+a+iy} \, dy - \int_0^R \frac{e^{i(iR+x)} \, dx}{x+a+iR} - i\int_0^R \frac{e^{-y} \, dy}{a+iy} = 0.$$

Avem

$$\left| \int_0^R \frac{e^{i(R+iy)} \, dy}{R+a+iy} \right| \leq \int_0^R \frac{e^{-y} \, dy}{R+a} = \frac{1-e^{-R}}{R+a} \to 0, \text{ deci integrala a doua} \to 0.$$

$$\left| \int_0^R \frac{e^{i(iR+x)} \, dx}{z+a+iR} \right| \leq R \frac{e^{-R}}{R} \to 0, \text{ deci integrala a treia} \to 0.$$

Rămîne

$$\int_0^\infty \frac{\cos x + \mathrm{i}\sin x}{x+a}\,\mathrm{d}x = \mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}(a-\mathrm{i}y)}{y^2+a^2}\,\mathrm{d}y$$

și punînd în integrala a doua $y = ax$ se obține rezultatul afirmat.

15. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

R. Considerăm $\displaystyle\int_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z$ cu $R \to \infty$, unde C este dat de figura 132. Pe arcul Γ

$$\left|\int_\Gamma \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{\sqrt{z}}\,\mathrm{d}z\right| < \frac{1}{\sqrt{R}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-R\sin\theta}\,\mathrm{d}\theta < \frac{1}{\sqrt{R}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{R\theta}{2}}\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{R\sqrt{R}}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R\pi}{4}}\right) \to 0.$$

(Criteriul relativ la $\lim z f(z)$ nu servește aici pentru că $z f(z)$ nu este mărginit pe axa reală.)

$$\lim_{z\to 0} |z f(z)| = \lim_{z\to 0} \sqrt{r}\,\mathrm{e}^{-r\sin\theta} = 0.$$

Așadar

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}}\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-y}}{\sqrt{y}}\,\mathrm{d}y = \int_0^\infty \frac{\cos x + \mathrm{i}\sin y}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x - \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\int_0^\infty 2\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = 0,$$

de unde rezultatul enunțat.

16. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 0.$

R. Considerăm $\displaystyle\int_C \frac{(\log z)^2}{1+z^2}\,\mathrm{d}z$ pentru $R \to \infty$, cu C din figura 133 și cu determinarea lui log z reală pe marginea superioară a tăieturii.

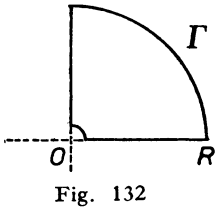

Fig. 132

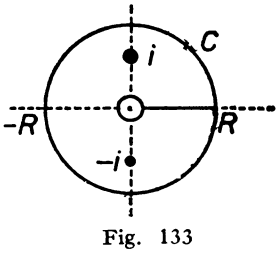

Fig. 133

$$\mathcal{R}(+\mathrm{i}) = \frac{\left(\frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right)^2}{2\mathrm{i}}, \quad \mathcal{R}(-\mathrm{i}) = \frac{\left(\frac{3\pi}{2}\mathrm{i}\right)^2}{-2\mathrm{i}},$$

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z}(\log z)^2 = 0, \quad \lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} z(\log z)^2 = 0.$$

$$\int_0^\infty \frac{(\log x)^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^\infty \frac{(\log x + 2\pi\mathrm{i})^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = 2\pi^3$$

sau

$$-4\pi\mathrm{i}\int_0^\infty \frac{\log x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + 4\pi^2[\operatorname{arc\,tg} x]_0^\infty = 2\pi^3.$$

17. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\log 2.$

R. Considerăm $\int_C \frac{\log(z+\mathrm{i})}{1+z^2}$ pentru $R \to \infty$, cu C dat de figura 134, cu determinarea lui arg $(z+\mathrm{i})$, care este egală cu $\frac{\pi}{2}$ pe semiaxa imaginară superioară.

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} \log(z+\mathrm{i}) = 0,$$

$$\mathcal{R}(\mathrm{i}) = \frac{\log 2 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}}{2\mathrm{i}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log(x+\mathrm{i})}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\left(\log 2 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right)$$

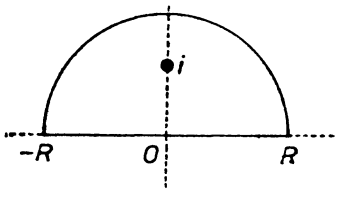

Fig. 134

sau

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log\sqrt{1+x^2} + \mathrm{i}\,\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\left(\log 2 + \frac{\pi}{2}\mathrm{i}\right)$$

sau

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{\mathrm{i}}{2}\left[\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x}\right)^2\right]_{-\infty}^{+\infty} = \pi\log 2 + \mathrm{i}\frac{\pi^2}{2}.$$

Observația 1). Ținînd seamă de exercițiul 16 avem și

$$\int_0^{\infty} \frac{\log\left(x+\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\log 2.$$

Observația 2) Punînd $x = \frac{-1}{2}\left(y - \frac{1}{y}\right)$ deducem

$$\int_0^1 \frac{\log\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{1}{4}\left(y+\frac{1}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{y^2}\right)\mathrm{d}y =$$

$$= 4\int_0^1 \frac{\log\left(y+\frac{1}{y}\right)}{1+y^2}\,\mathrm{d}y - 4\log 2\,[\operatorname{arc\,tg} y]_0^1 = \pi\log 2,$$

de unde

$$\int_0^1 \frac{\log\left(x+\frac{1}{x}\right)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\log 2.$$

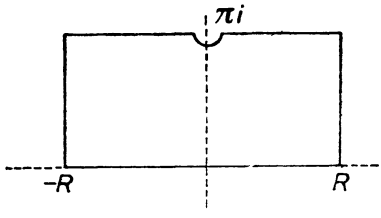

Fig. 135

18. $\int_0^{\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi^2}{4}.$

R. Cum integrandul are polii $z = k\pi\mathrm{i}$ $(k \neq 0)$, considerăm $\int_C \frac{z\,\mathrm{d}z}{\operatorname{sh} z}$ cu $R \to \infty$ și cu C dat de figura 135.

$$\lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)f(z)=-\pi i\quad\left(\lim_{z\to\pi i}\frac{z-\pi i}{\operatorname{sh} z}=-\lim_{z\to\pi i}\frac{z-\pi i}{\operatorname{sh}(z-\pi i)}=-1\right).$$

Integrandul fiind par, și $\operatorname{sh}(z+\pi i)=-\operatorname{sh} z$

$$2\int_0^R\frac{x\,dx}{\operatorname{sh} x}+i\int_0^\pi\frac{R+iy}{\operatorname{sh}(R+iy)}\,dy+\int_r^R\frac{x+\pi i}{\operatorname{sh} x}\,dx+$$

$$+\int_r^R\frac{x-\pi i}{\operatorname{sh} x}\,dx-i\int_0^\pi\frac{-R+iy}{\operatorname{sh}(-R+i)}\,dy+(-\pi i)(-\pi i)=0,$$

$\left|\int_0^\pi\frac{R+iy}{\operatorname{sh}(R+iy)}\,dy\right|<\frac{4Re^{-R}\pi}{1-e^{-2R}}\to 0$, deci integrala a doua și la fel ultima tind la zero.

Rămîne

$$4\int_0^\infty\frac{x\,dx}{\operatorname{sh} x}=\pi^2.$$

19. $I_1=\int_0^\infty\frac{\sin ax}{\operatorname{sh} x}\,dx=\frac{\pi}{2}\operatorname{th}\frac{a\pi}{2}$

$$I_2=\int_0^\infty\frac{x\cos ax}{\operatorname{sh} x}\,dx=\frac{\pi^2}{4\operatorname{ch}^2\frac{a\pi}{2}}\qquad (a\ \text{real}).$$

R. Exercițiul 18 este un caz particular ($a=0$ în integrala a doua). Întrebuințînd același contur, considerăm

$$\int_C\frac{ze^{iaz}}{\operatorname{sh} z}\,dz\quad\text{cu } R\to\infty,$$

$$\lim_{z\to\pi i}(z-\pi i)f(z)=-\pi i\,e^{-a\pi}.$$

Pe latura din dreapta, pentru $a\geqslant 0$,

$$\left|\int_0^\pi\frac{(R+iy)e^{ia(R+iy)}}{\operatorname{sh}(R+iy)}\,dy\right|<\frac{4R\int_0^\pi e^{-ay}e^{-R}\,dy}{1-e^{-2R}}<\frac{4\pi Re^{-R}}{1-e^{-2R}}\to 0,$$

iar pentru $a<0$, modulul aceleeași integrale este majorat de

$$\frac{4\pi Re^{-R}e^{-a\pi}}{1-e^{-2R}}\to 0.$$

Astfel integrala pe latura verticală $\to 0$. Deci

$$\int_0^\infty\frac{xe^{iax}}{\operatorname{sh} x}\,dx+\int_0^\infty\frac{(x+\pi i)e^{ia(x+\pi i)}}{\operatorname{sh} x}\,dx-\int_0^{-\infty}\frac{(x+\pi i)e^{ia(x+\pi i)}}{\operatorname{sh} x}\,dx+$$

$$+\int_{-\infty}^0\frac{xe^{iax}}{\operatorname{sh} x}\,dx-(\pi i)\left(-\pi i\,e^{-a\pi}\right)=0$$

sau

$$\int_0^\infty\frac{x(e^{iax}+e^{-iax})}{\operatorname{sh} x}\,dx+e^{-a\pi}\int_0^\infty\frac{x(e^{iax}+e^{-iax})+\pi i(e^{iax}-e^{-iax})}{\operatorname{sh} x}\,dx=\pi^2e^{-a\pi}$$

sau

$$(1+e^{-a\pi})I_2-\pi e^{-a\pi}I_1=\frac{1}{2}\pi^2e^{-a\pi}.$$

Considerînd acum $\int_C \frac{e^{iaz}}{\operatorname{sh} z}\,dz$, avem la fel

$\lim_{z\to 0} z f(z) = 1$, $\lim_{z\to \pi i} (z-\pi i) f(z) = -e^{-a\pi}$; integralele pe laturile verticale $\to 0$ și obținem

$$\int_0^\infty \frac{e^{iax}}{\operatorname{sh} x}\,dx + \int_0^\infty \frac{e^{ia(x+\pi i)}}{\operatorname{sh} z}\,dx - \int_0^{-\infty} \frac{e^{ia(x+\pi i)}}{\operatorname{sh} x}\,dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^0 \frac{e^{iax}}{\operatorname{sh} x}\,dx - \pi i - (\pi i)\left(-e^{-a\pi}\right) = 0$$

sau

$$\int_0^\infty \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{\operatorname{sh} x}\,dx + e^{-a\pi}\int_0^\infty \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{\operatorname{sh} x}\,dx = \pi i\left(1 - e^{-a\pi}\right),$$

adică

$$I_1 = \frac{\pi}{2}\,\frac{1 - e^{-a\pi}}{1 + e^{-a\pi}} = \frac{\pi}{2}\operatorname{th}\frac{a\pi}{2}.$$

Introducînd în rezultatul precedent vom obține I_2. Calculul se poate face deodată considerînd

$$\int_C \frac{(z+1)\,e^{iaz}}{\operatorname{sh} z}\,dz.$$

20. $$\int_0^\pi \frac{x \sin x\,dx}{1 - 2r\cos x + r^2} = \begin{cases} \frac{\pi}{r}\log(1+r) & 0 < r < 1, \\ \frac{\pi}{r}\log\left(1 + \frac{1}{r}\right) & r > 1. \end{cases}$$

R. $1 - 2r\cos z + r^2 = 0$ pentru $\cos z = \frac{1+r^2}{2r} = \frac{1 + e^{-2iz}}{2e^{-iz}}$ sau $r = e^{\pm iz}$.

$$\frac{2ix\sin x}{1 - 2r\cos x + r^2} = \frac{x(e^{ix} - e^{-ix})}{(r - e^{ix})(r - e^{-ix})} = \frac{x}{r - e^{ix}} - \frac{x}{r - e^{-ix}}.$$

Sîntem conduși să considerăm $\int_C \frac{z}{r - e^{-iz}}$ cu $R \to \infty$ și C dat de figura 136. Integrandul are polii $z = i\log r + 2k\pi$, din care numai $z_0 = i\log r$ este în contur dacă $r > 1$;

$$\mathcal{R}(z_0) = \frac{i\log r}{ir}.$$

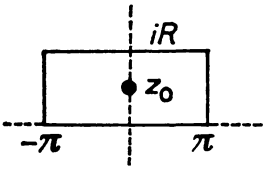

Fig. 136

Pe laturile din dreapta și stînga

$$i\int_0^\infty \frac{\pi + iy}{r + e^y}\,dy - i\int_0^\infty \frac{-\pi + iy}{r + e^y}\,dy = +\int_0^\infty \frac{2\pi i\,dy}{r + e^y} =$$

$$= 2\pi i\int_1^\infty \frac{dx}{x(r+x)} = \frac{2\pi i}{r}\left[\log\frac{x}{r+x}\right]_1^\infty = \frac{2\pi i}{r}\log(1+r).$$

Pe latura superioară

$$\left|\int_{-R}^{R} \frac{(x + iR)\,dx}{r - e^{-i(x+iR)}}\right| < \frac{2R\cdot R}{e^R - r} \to 0.$$

Rămîne

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x\,dx}{r - e^{-ix}} = \int_{0}^{\pi} \frac{x\,dx}{r - e^{-ix}} - \int_{0}^{\pi} \frac{x\,dx}{r - e^{ix}} =$$

$$= \int_{0}^{\pi} \frac{x(e^{-ix} - e^{ix})}{1 - 2r\cos x + r^2}\,dx = -2i\int_{0}^{\pi} \frac{x \sin x\,dx}{1 - 2r\cos x + r^2} =$$

$$= -\frac{2\pi i}{r}\log(1 + r) + \begin{cases} 0 & 0 < r < 1, \\ \dfrac{2\pi i}{r}\log r & r > 1. \end{cases}$$

Alt procedeu: transformăm integrala într-una cu laturile 0, ∞ prin $y = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$ (cf. exercițiul 8).

21. *Fie $P(z)$ și $Q(z)$ polinoame de grade m și n, unde $m \leqslant n - 2$ și $Q(z)$ nu are rădăcini nule sau pozitive.*

$$\int_{0}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = -\mathcal{R},$$

$\mathcal{R}$ fiind suma reziduurilor lui $P(z)\dfrac{\log z}{Q(z)}$ în zerourile lui $Q(z)$, $\log z$ avînd determinarea corespunzătoare la $0 < \arg z < 2\pi$.

R. Considerăm $\displaystyle\int_C P(z)\frac{\log z}{Q(z)}\,dz$ cu $R \to \infty$ și C dat de figura 137.

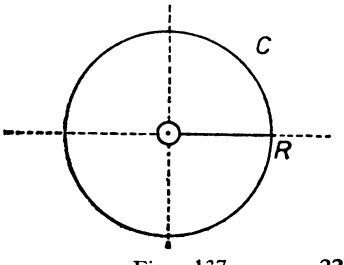

Fig. 137

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = \frac{p_0}{q_0}\lim_{z\to\infty}\frac{\log z}{z^{n-m-1}} = 0.$$

$$\int_{0}^{\infty} \frac{P(x)\log x}{Q(x)}\,dx - \int_{0}^{\infty} P(x)\frac{\log x + 2\pi i}{Q(x)}\,dx = 2\pi i\mathcal{R},$$

de unde afirmația.

22. $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{[1 - \cos(a\operatorname{tg}\theta)]\theta + \log(\cos\theta)\cdot\sin(a\operatorname{tg}\theta)}{\theta^2 + (\log\cos\theta)^2}\,\frac{d\theta}{\sin 2\theta} = \frac{\pi a}{2}$

$(a > 0)$.

R. Se va considera

$$\int_C \frac{1 - e^{iaz}}{z\log(1 - iz)}\,dz,$$

unde C este dat de figura 138.

23. $\displaystyle\int_{0}^{\infty} \frac{x^{-a}\,dx}{1 + 2x\cos\alpha + x^2} = \frac{\pi}{\sin a\pi}\,\frac{\sin a\alpha}{\sin\alpha}$ $\quad(-1 < a < 1,\ -\pi < \alpha < \pi)$.

R. Considerăm $\int_0^\infty \frac{z^{-a}\,dz}{1+2z\cos\alpha+z^2}$ cu C dat de figura 139, unde $R\to\infty$. Luînd în $z^{-a}=e^{-a\log z}$, $0<\arg z<2\pi$. Avem polii $z=-e^{\pm i\alpha}$. Pentru a avea $\arg z$ în intervalul $(0,2\pi)$ scriem $z=e^{(\pi\pm\alpha)i}$, cu reziduul

$$\frac{e^{-(\pi\pm\alpha)ai}}{2(\cos\alpha-e^{\pm i\alpha})};$$

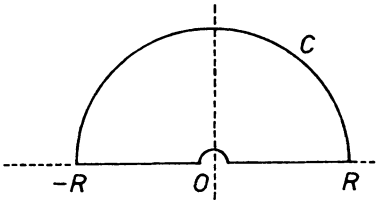

Fig. 138

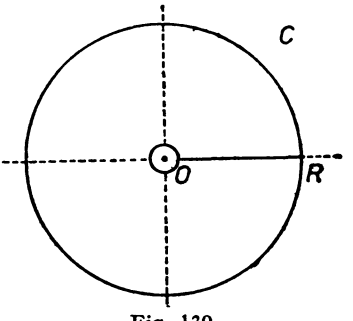

Fig. 139

$$\lim_{z\to\infty} z\,f(z)=\lim_{z\to\infty} z^{-1-a}=0,\ \lim_{z\to 0} z\,f(z)=\lim_{z\to 0} z^{1-a}=0.$$

$$\int_0^\infty \frac{x^{-a}\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}-\int_0^\infty \frac{e^{-2a\pi i}x^{-a}\,dx}{1+2x\cos\alpha+x^2}=\left(1-e^{-2a\pi i}\right)I=$$

$$=2\pi i\left(\frac{e^{-(\pi+\alpha)ai}}{e^{-i\alpha}-e^{i\alpha}}+\frac{e^{-(\pi-\alpha)ai}}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}\right)=2\pi i e^{-\pi ai}\,\frac{e^{a\alpha i}-e^{-a\alpha i}}{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}},$$

de unde rezultatul.

24. $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx=\frac{1}{4}\operatorname{cth}\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}$ (a *real* $\neq 0$).

R. Considerăm $\int_C \frac{\sin az}{e^{2\pi z}-1}\,dz$ cu $R\to\infty$ și C dat de figura 140. Integrandul avînd polii $z=ki$ este olomorf în interiorul conturului.

$$\lim_{z\to 0} zf(z)=0\left(\text{căci }\lim_{z\to 0}\frac{z}{e^{2\pi z}-1}=\frac{1}{2\pi}\right).$$

$$\lim_{z\to i}(z-i)f(z)=\sin(ai)\lim_{z\to i}\frac{z-i}{e^{2\pi(z-i)}-1}=-\frac{1}{2\pi i}\operatorname{sh} a.$$

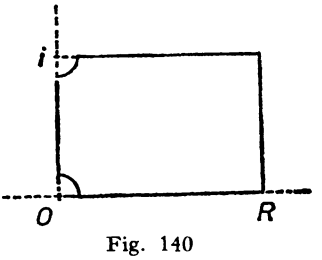

Fig. 140

Pe latura din dreapta

$$\left|\int_0^1 \frac{\sin a(R+iy)\,dy}{e^{2\pi(R+iy)}-1}\right|<\frac{1}{2}\,\frac{\int_0^1\left(e^{ay}+e^{-ay}\right)dy}{e^{2\pi R}-1}\to 0.$$

Pe latura din stînga

$$-i\int_0^1 \frac{\sin aiy}{e^{2\pi iy}-1}\,dy=\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} ay\,dy}{e^{\pi iy}2i\sin\pi y}=-\frac{i}{2}\int_0^1 \frac{\operatorname{sh} ay(\cos\pi y-i\sin\pi y)\,dy}{\sin\pi y}=$$

$$-\frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sh} ay\,dy-\frac{i}{2}\int_0^1 \operatorname{sh} ay\operatorname{ctg}\pi y\,dy=-\frac{1}{2a}(\operatorname{ch} a-1)-\frac{i}{2}\int_0^1 \operatorname{sh} ay\operatorname{ctg}\pi y\,dy.$$

Avem deci

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx - \int_0^\infty \frac{\sin a(x+i)}{e^{2\pi x}-1}\,dx = (1-\operatorname{ch} a)\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx - i\operatorname{sh} a\int_0^\infty \frac{\cos ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2a}(\operatorname{ch} a - 1) + \frac{i}{2}\int_0^1 \operatorname{sh} ay \operatorname{ctg} \pi y\,dy + \frac{\pi i}{2}\,\frac{i}{2\pi}\operatorname{sh} a.$$

De aici

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}-1}\,dx = -\frac{1}{2a} + \frac{1}{4}\,\frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a - 1} = -\frac{1}{2a} + \frac{1}{4}\operatorname{cth}\frac{a}{2},$$

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{e^{\pi x}-1}\,dx = \frac{-1}{2\operatorname{sh} a}\int_0^1 \operatorname{sh} ay \operatorname{ctg} \pi y\,dy \qquad (a \neq 0).$$

Observație. Punînd $x = \frac{b}{\pi}\,x'$ și $a = \frac{\pi}{b}\,a'$, apoi suprimînd accentele avem

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{e^{2bx}-1}\,dx = \frac{\pi}{4b}\operatorname{cth}\frac{a\pi}{2b} - \frac{1}{2a} \qquad (a \neq 0,\ b > 0);$$
reali

altă soluție în exercițiul 49.

25. $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc tg} x\,dx}{1 - 2x\sin\alpha + x^2} = -\frac{\pi(\alpha-\pi)}{2\cos\alpha} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

(cu determinarea principală a lui arc tg x*).*

R. Avînd în vedere $\operatorname{arc tg} z = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$, vom considera $\int_C \frac{\log(1-iz)\,dz}{1-2z\sin\alpha+z^2}$ cu $R\to\infty$ și luăm determinarea lui $\log(1-iz)$ care este reală pe semiaxa imaginară superioară. Conturul C este dat de figura 141.

În contur avem polul $z_0 = -ie^{i\alpha}$ cu reziduul

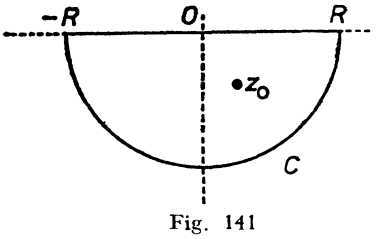

Fig. 141

$$\mathcal{R}(z_0) = \frac{\log(1-e^{i\alpha})}{-2(ie^{i\alpha}+\sin\alpha)} = \frac{i\log(1-e^{i\alpha})}{2\cos\alpha}.$$

Avem

$$1 - e^{i\alpha} = -e^{\frac{\alpha}{2}i}\left(e^{\frac{\alpha i}{2}} - e^{-\frac{\alpha i}{2}}\right) = -2ie^{\frac{\alpha i}{2}}\sin\frac{\alpha}{2},$$

deci

$$\mathcal{R}(z_0) = i\,\frac{\log\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) + i\,\frac{\alpha-\pi}{2}}{2\cos\alpha},$$

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}\log(1-iz) = 0, \text{ unde } f(z) = \frac{\log(1-iz)}{1-2z\sin\alpha+z^2}.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log\sqrt{1+x^2} - i\operatorname{arc tg} x}{1-2x\sin\alpha+x^2}\,dx = \pi\,\frac{\log\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right) + i\,\frac{\alpha-\pi}{2}}{\cos\alpha},$$

de unde

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{arc tg} x\,dx}{1-2x\sin\alpha+x^2} = -\frac{\pi(\alpha-\pi)}{2\cos\alpha},$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)\,dx}{1-2x\sin\alpha+x^2} = 2\pi\,\frac{\log\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha}.$$

26. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+ix)^m (b-ix)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a-ix)^m (b+ix)^n} = 2\pi(a+b)^{1-m-n} \frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+ix)^m (b+ix)^n} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a-ix)^m (b-ix)^n} = 0$$

cu $a, b > 0$, $0 < m, n < 1$, $m + n > 1$.

Să se deducă

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta)^{m+n-2} \cos(n-m)\,\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2^{m+n-1}} \frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}.$$

R. Se consideră $\int_C \frac{dz}{(a+iz)^m (b-iz)^n}$ (vezi fig. 142). Conturul nu conține punctul critic $z = ia$; $f(z)$ este olomorfă în interiorul conturului; determinarea ce vom fixa este aceea pentru care $(a+iz)^m$ este real în segmentul $(0, ia)$ și $(b-iz)^n$, de asemenea $\lim_{z\to\infty} z f(z) = 0$ (fiindcă $m + n > 1$); $\lim_{z\to ia} (z - ia) f(z) = 0$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+ix)^m (b-ix)^n} - ie^{-m\pi i} \int_a^{\infty} \frac{dy}{(y-a)^m (b+y)^n} + ie^{+m\pi i} \int_a^{\infty} \frac{dy}{(y-a)^m (b+y)^n} = 0$$

au

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(a+ix)^m (b-ix)^n} = 2 \sin m\pi \int_a^{\infty} - \frac{dy}{(y-a)^m (b+y)^n}.$$

Ultima integrală devine, făcînd substituția

$$y - a = \frac{x}{1-x}(a+b) \text{ sau } y = \frac{a+bx}{1-x},\quad y + b = \frac{a+b}{1-x}:$$

$$(a+b)^{1-m-n} \int_0^1 x^{-m}(1-x)^{m+n-2}\, dx = (a+b)^{1-m-n} \frac{\Gamma(1-m)\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(n)} =$$

$$= (a+b)^{1-m-n} \frac{\pi}{\sin m\pi} \frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}.$$

A doua integrală dată se deduce din prima schimbînd a cu b.

Pentru a patra integrală se întrebuințează conturul din figura 143, în care nu există nici un punct critic. Se vede imediat că ea este nulă. La fel a treia integrală.

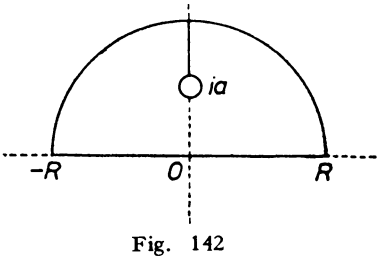

Fig. 142

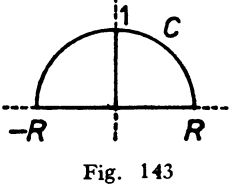

Fig. 143

Punînd $a = b = 1$, $x = \operatorname{tg}\theta$ și observînd că

$$\frac{1}{1+i\operatorname{tg}\theta} = \cos\theta(\cos\theta - i\sin\theta),\quad \frac{1}{1-i\operatorname{tg}\theta} = \cos\theta(\cos\theta + i\sin\theta),$$

$$\frac{1}{(1+i\operatorname{tg}\theta)^m (1-i\operatorname{tg}\theta)^n} = \cos^{m+n}\theta\,(\cos(n-m)\theta + i\sin(n-m)\theta),$$

integrala devine

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{m+n-2}\theta \cos(n-m)\theta \, d\theta = \frac{\pi}{2^{m+n-2}} \frac{\Gamma(m+n-1)}{\Gamma(m)\,\Gamma(n)},$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^{m+n-2}\theta \sin(n-m)\theta = 0.$$

27. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin m(x-a)}{x-a} \frac{\sin n(x-b)}{x-b} dx = \pi \frac{\sin n(a-b)}{a-b}$ $(m \geqslant n \geqslant 0$ a, b reali, $a \neq b)$.

R. Se consideră

$$\int_C \frac{e^{im(z-a)} \sin n(z-b)}{(z-a)(z-b)} dz,$$

unde curba C este dată de figura 144 integrandul este olomorf în $z = b$.

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{1}{z} e^{im(z-a)} \sin n(z-b).$$

Avem

$$\left| \frac{1}{z} e^{im(z-a)} \sin n(z-b) \right| \leqslant \frac{1}{2R} e^{-mR\sin\theta}(e^{-nR\sin\theta} + e^{nR\sin\theta}) \leqslant \frac{1}{R} \to 0$$

(pentru că $m \geqslant n$).

$$\lim_{z\to a} (z-a) f(z) = \lim_{z\to a} e^{im(z-a)} \frac{\sin n(z-b)}{z-b} = \frac{\sin n(a-b)}{a-b}.$$

Astfel

$$\int_{-\infty}^{a} \frac{e^{im(x-a)} \sin n(x-b)}{(x-a)(x-b)} dx + \int_{a}^{+\infty} \frac{e^{im(x-a)} \sin n(x-b)}{(x-a)(x-b)} dx =$$

$$= i\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin m(x-a) \sin n(x-b)}{(x-a)(x-b)} dx + P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos m(x-a) \sin n(x-b)}{(x-a)(x-b)} dx =$$

$$= \pi i \frac{\sin n(a-b)}{a-b},$$

unde P se numește partea principală a integralei respective (vezi exercițiul 42).

28. $\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{e^{2\pi x}+1} dx = \frac{1}{2a} - \frac{1}{4 \operatorname{sh} \frac{a}{2}}$ $(a$ *real* $\neq 0)$.

R. Se consideră $\int_C \frac{\sin az}{e^{2\pi z}+1}$ cu conturul dat de figura 145 și se rezolvă la fel cu exercițiul 24.

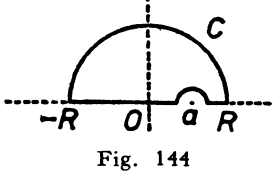

Fig. 144

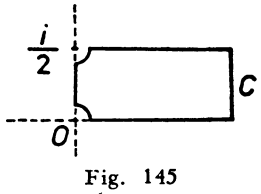

Fig. 145

29. $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2} = \begin{cases} \frac{2\pi}{1-r^2} & \text{pentru } (-1 < r < 1), \\ \frac{2\pi}{r^2-1} & \text{pentru } r < -1 \text{ sau } r > 1. \end{cases}$

R. Punînd $x = \operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ integrala devine

$$\int_0^{\infty} \frac{2\,dx}{(1+r)^2 x^2 + (1-r)^2} + \int_0^{\infty} \frac{2\,dx}{(1+r^2)(1+x^2) + 2r(1-x^2)}.$$

Se va calcula

$$2\int_C \frac{dz}{(1+r)^2 z^2 + (1-r)^2} \quad \text{și} \quad 2\int_C \frac{dz}{(1+r^2)(1+z^2) + 2r(1-z^2)},$$

unde C este dat de figura 146.

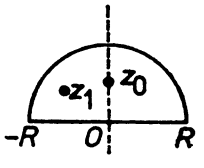

Fig. 146

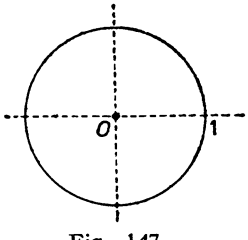

Fig. 147

O metodă mai rapidă este următoarea: facem transformarea $z = e^{i\theta}$, care duce segmentul $(0, 2\pi)$ în cercul $|z| = 1$ (vezi figura 147). Integrala devine

$$J = \int_C \frac{i\,dz}{r(z^2+1) - (1+r^2)z} = i\int_C \frac{dz}{r(z-r)\left(z - \dfrac{1}{r}\right)} =$$

$$= \frac{i}{r^2-1}\int_C \left(\frac{1}{z-r} - \frac{1}{z-\dfrac{1}{r}}\right) dz = \frac{i}{r^2-1}\left[\log\frac{z-r}{z-\dfrac{1}{r}}\right]_C.$$

Dacă $-1 < r < 1$, $\arg\left(\dfrac{z-r}{z-\dfrac{1}{r}}\right)$ crește cu 2π (punctul r fiind interior și $\dfrac{1}{r}$ exterior lui C). Deci

$$J = \frac{i}{r^2-1}\cdot 2\pi i = \frac{2\pi}{1-r^2}.$$

Dacă $r < -1$ sau $r > 1$, am avea $J = \dfrac{2\pi}{r^2-1}$.

30. $$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 - a e^{i\theta}} = \begin{cases} 2\pi & |a| < 1, \\ 0 & |a| > 1. \end{cases}$$

R. Ca la exercițiul 29.

31. $$I = \int_0^{\pi} \frac{\cos n\,\theta\,d\theta}{a - i\cos\theta} = \frac{\pi i^n}{\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2} - a}{b}\right)^n$$

$(a, b, > 0,\ n > 0$ întreg).

R. Pentru a transforma această integrală într-o integrală pe un cerc observăm că

$$\int_0^{\pi} = -\int_0^{-\pi} \text{ deci } \int_0^{\pi} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}.$$

Punînd acum $e^{i\theta} = z$ avem

$$I = \frac{1}{2}\int_C \frac{z^n + z^{-n}}{b(z^2+1) + 2\,ia\,z}\,dz \qquad C \text{ cercul } |z| = 1.$$

Dar

$$\int_C \frac{z^n\,dz}{b(z^2+1) + 2\,ia\,z} = \int_C \frac{z^{-n}\,dz}{b(z^2+1) + 2\,ia\,z},$$

cum se vede înlocuind z cu $1/z$ în una din integrale și observînd că sensul de parcurs se schimbă. Așadar

$$I = \int_C \frac{z^n\,dz}{b(z^2+1) + 2\,iaz}.$$

În interiorul cercului avem polul $z_0 = i\dfrac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}$ cu reziduul

$$\mathcal{R} = \frac{z_0^n}{2(bz_0 + ia)} = \frac{i^n}{2i\sqrt{a^2+b^2}}\left(\frac{-a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}\right)^n \text{ și } I = 2\pi i\,\mathcal{R}.$$

32. $I = \int_0^{\pi} e^{\cos\theta}\cos(\sin\theta - 2\theta)\,d\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

R. $I = \dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} = \dfrac{1}{4}\int_{-\pi}^{\pi} (e^{\cos\theta + i(\sin\theta - 2\theta)} + e^{\cos\theta - i(\sin\theta - 2\theta)})\,d\theta =$

$$= -\frac{i}{4}\int_C e^z z^{-3}\,dz - e^{\frac{1}{z}} z^3 d\,\frac{1}{z} = -\frac{i}{2}\int_C e^z z^{-3}\,dz,$$

C fiind cercul $|z| = 1$. Avem polul $z = 0$ cu reziduul $-\dfrac{i}{4}$ (cum rezultă din dezvoltarea lui e^z). Deci $I = 2\pi i\left(-\dfrac{i}{4}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

33. $\int_0^{\infty} \dfrac{1-\cos ax}{x\,\mathrm{sh}\,x}\,dx = \log \mathrm{ch}\,\dfrac{a\pi}{2}$.

R. Considerăm $\dfrac{1}{2}\int_C \dfrac{1-e^{aiz}}{z\,\mathrm{sh}\,z}\,dz$. Fie $a > 0$. În conturul C din figura 138 avem polii $z = k\pi i$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, cu reziduul total (pentru $R \to \infty$):

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_1^{\infty}(-1)^k \frac{1-e^{-a\pi k}}{k} = \frac{1}{2\pi i}[-\log 2 + \log(1+e^{-a\pi})] = \frac{1}{2\pi i}\log\frac{1+e^{-a\pi}}{2}.$$

Apoi

$$\lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1-e^{aiz}}{2\,\mathrm{sh}\,z} = -\frac{1}{2}ai,$$

$$|zf(z)| < \frac{1+e^{-aR\sin\theta}}{e^{R\cos\theta} - e^{-R\cos\theta}} < \frac{2}{e^{R\cos\theta_0} - e^{-R\cos\theta_0}} \to 0$$

pentru $0 \leqslant \theta < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$; la fel pentru $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta \leqslant \pi$. Pe de altă parte $|zf(z)|$ este mărginit în tot planul dacă scoatem cercuri arbitrar de mici, cu centrele în punctele $z = k\pi i$ (căci această proprietate o are $\frac{1}{\operatorname{sh} z}$). Deci integrala considerată $\to 0$ pe cercuri de rază $R = \frac{2k+1}{2}\pi$; ceea ce este deajuns, pentru că integrala dată există. Avem deci

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1 - e^{aix}}{x \operatorname{sh} x}\,dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1 - e^{-aix}}{x \operatorname{sh} x}\,dx + (-\pi i)\left(-\frac{1}{2}ai\right) = \log\frac{1 + e^{-a\pi}}{2}$$

sau

$$\int_0^\infty \frac{1 - \cos ax}{x \operatorname{sh} x}\,dx = \frac{a\pi}{2} + \log\frac{1 + e^{-a\pi}}{2} = \log\frac{1 + e^{-a\pi}}{2e^{-\frac{a\pi}{2}}} = \log \operatorname{ch}\frac{a\pi}{2}.$$

Pentru $a < 0$ am considera $\frac{1}{2}\int_C \frac{1 - e^{-aiz}}{z \operatorname{sh} z}\,dz$.

34. $\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)\frac{dx}{x} = \log 2.$

R. Considerăm $\int_C \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\operatorname{sh} z}\right)\frac{dz}{z}$ cu C dat de figura 143.

(Integrandul este olomorf în 0). Avem $|zf(z)| \to 0$ pentru $R \to \infty$ în orice unghi cu excepția unui unghi arbitrar de mic în jurul axei imaginare; $|zf(z)|$ este mărginit în tot planul cu excepția unor cercuri arbitrar de mici în jurul punctelor $z = k\pi i$ (aceste proprietăți avîndu-le funcțiile $\frac{1}{z}$ și $\frac{1}{\operatorname{sh} z}$). Deci $\int_C \to 0$ pe cercuri de raze $\frac{2k+1}{2}\pi$. Suma reziduurilor este ($\frac{1}{z}$ nu dă reziduuri) $-\frac{1}{\pi i}\sum(-1)^k\frac{1}{k} = \frac{1}{\pi i}\log 2$. Așadar integrandul fiind par

$$\int_{-\infty}^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)\frac{dx}{x} = 2\int_0^\infty \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sh} x}\right)\frac{dx}{x} = 2\log 2.$$

35. $\int_0^\infty \frac{x \sin ax}{(x^2+1)^3}\,dx = \frac{\pi}{16}(a^2 + a)e^{-a} \quad (a > 0).$

R. Considerăm $\int_C \frac{z\,e^{iaz}}{(z^2+1)^3}\,dz$, unde C este dat de figura 143 $\mathcal{R}(+i)$ se află din dezvoltarea taylorianăa a lui

$$f(z) = [i + (z - i)]e^{ia(z-i)-a}\cdot\frac{1}{(2i)^3}\left(1 + \frac{z-i}{2i}\right)^{-3}\frac{1}{(z-i)^3}$$

în jurul punctului i:

$$\frac{1}{(z-i)^3}[i + (z-i)]e^{-a}\left[1 + ia(z-i) - \frac{1}{2}a^2(z-i)^2 + \ldots\right] \times$$

$$\times \frac{i}{8}\left[1 - 3\frac{z-i}{2i} + 6\left(\frac{z-i}{2i}\right)^2 + \ldots\right],$$

de unde

$$\mathcal{R}(+\mathrm{i}) = \frac{\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-a}}{8}\left[\mathrm{i}\left(-\frac{6}{4}-\frac{3a}{2}-\frac{a^2}{2}\right)+\mathrm{i}a+\frac{3}{2}\mathrm{i}\right]$$

$$= \frac{1}{16}(a^2+a)\mathrm{e}^{-a}.$$

Apoi $\lim\limits_{z\to\infty} |\, z\, f(z)\,| = \lim\limits_{z\to\infty} \frac{1}{R^4}\,\mathrm{e}^{-aR\sin\theta} = 0.$

Deci

$$\int_0^\infty \frac{x\mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)^3} - \int_0^\infty \frac{x\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}}{(x^2+1)^3}\,\mathrm{d}x = \frac{2\pi\mathrm{i}}{16}(a^2+a)\mathrm{e}^{-a}$$

de unde rezultatul enunțat.

36. $\int_0^\infty \frac{\cos \pi x}{1-4x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$.

R. Considerăm $\int_C \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi z}\,\mathrm{d}z}{1-4z^2}$ cu $R\to\infty$ și C dat de figura 148.

$$\lim_{z\to\frac{1}{2}}\left(z-\frac{1}{2}\right)f(z) = \frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}}{-4} = -\frac{\mathrm{i}}{4},$$

$$\lim_{z\to-\frac{1}{2}}\left(z+\frac{1}{2}\right)f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}}{4} = -\frac{\mathrm{i}}{4}.$$

Deci

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi x}\,\mathrm{d}x}{1-4x^2} + \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi x}\,\mathrm{d}x}{1-4x^2} = 2\int_0^\infty \frac{\cos \pi x\,\mathrm{d}x}{1-4x^2} = 2\pi\mathrm{i}\left(-\frac{\mathrm{i}}{4}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

37. $I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin p\pi}(1+p-2^p) \quad (-1<p<2).$

R. Considerăm $\int_C \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z}\,\mathrm{d}z$ cu $R\to\infty$ integrandul poate fi separat în determinări uniforme în domeniul mărginit de conturul C din figura 149. (∞ nu este punct critic); vom lua pentru $z^{1-p}\cdot(1-z)^p$ determinarea reală pe marginea superioară a tăieturii: $x^{1-p}\cdot(1-x)^p$ $(0<x<1)$. În segmentul $(-R, 0)$ aceste determinări sînt $(-x)^{1-p}\,\mathrm{e}^{(1-p)\pi\mathrm{i}}\cdot(1-x)^p$. Deci

$$\mathcal{R}(-1) = 2^p\,\mathrm{e}^{(1-p)\pi\mathrm{i}} = -2^p\,\mathrm{e}^{-p\pi\mathrm{i}}.$$

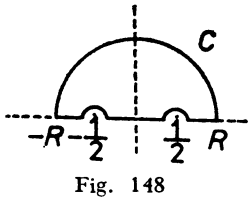

Fig. 148

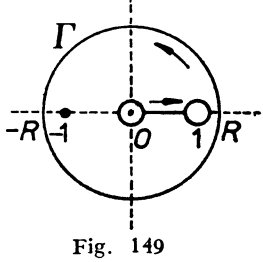

Fig. 149

Apoi

$$\lim_{z\to0} zf(z) = 0, \quad \lim_{z\to0}(z-1)\,f(z) = 0.$$

Pe cercul Γ criteriul relativ la $\lim_{z\to\infty} z f(z)$ nu se aplică, limita fiind ∞ $\left(= \lim_{z\to\infty} z\left(\frac{1}{z}-1\right)^p = \right.$ $\left. = \infty\right)$. Însă $\int_\Gamma = -2\pi i \mathcal{R}(\infty)$ (care se aplică ori de cîte ori ∞ este punct regulat sau singularitate izolată).

Avem la ∞:

$$f(z) = \frac{z}{1+z}\left(1-\frac{1}{z}\right)^p e^{-p\pi i} = e^{-p\pi i}\left(1-\frac{1}{z}+\cdots\right)\left(1-\frac{p}{z}+\cdots\right) =$$

$$= e^{-p\pi i}\left(1-\frac{p+1}{z}+\cdots\right),$$

cu determinarea principală a lui $\left(1-\frac{1}{z}\right)^p$. (Factorul exponențial este în orice caz de forma $e^{-(2k+1)p\pi i}$ cu k determinat; cum pentru $z=-R$ el se reduce la $e^{-p\pi i}$, $k=0$.) Deci $\mathcal{R}(\infty) =$ $= (p+1)\ e^{-p\pi i}$. Cum pe marginea inferioară a tăieturii

$$z^{1-p}(1-z)^p = x^{1-p}(1-x)^p\, e^{2(1-p)\pi i},$$

avem

$$(1-e^{-2p\pi i})I = -[2\pi i(p+1)e^{-p\pi i} + 2\pi i\ 2^p e^{(1-p)\pi i}],$$

$$I = -\frac{2\pi i e^{-p\pi i}}{1-e^{-2p\pi i}}(p+1-2^p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}(p+1-2^p).$$

38. $I = \int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}\left(2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{p\pi}{4}-1\right)$ $\qquad (-1<p<2).$

R. Considerăm $\int_C \frac{z^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}\,dz$ cu $R\to 1$, conturul de la exercițiul 37 și aceeași determinare a integrandului, care poate fi scris

$$f(z) = \frac{z}{1+z^2}\left(1-\frac{1}{z}\right)^p e^{-p\pi i}, \text{ cu determinarea principală a lui } \left(1-\frac{1}{z}\right)^p.$$

$$\mathcal{R}(i) = \frac{i}{2i}(1+i)^p e^{-p\pi i} = \frac{1}{2} z^{\frac{p}{2}} e^{\frac{p\pi}{4}i} e^{-p\pi i},$$

$$\mathcal{R}(-i) = \frac{-i}{-2i}(1-i)^p e^{-p\pi i} = \frac{1}{2} z^{\frac{p}{2}} e^{-\frac{p\pi}{4}i} e^{-p\pi i},$$

$$\mathcal{R}(i) + \mathcal{R}(-i) = 2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{p\pi}{4}\cdot e^{-p\pi i},$$

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = 0,\ \lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = 0,$$

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty}\left(1-\frac{1}{z}\right)^p e^{-p\pi i} = e^{-p\pi i}.$$

Așadar

$$(1-e^{-2p\pi i})I = 2\pi i\, e^{-p\pi i}\left(2^{\frac{p}{2}}\cos\frac{p\pi}{4}-1\right),$$

de unde rezultatul.

39. $I = \int_{-1}^{+1} \frac{(1+x)^{1-p}(1-x)^p}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}\left(\sin\frac{p\pi}{2} + \cos\frac{p\pi}{2} - 1\right)$ $(-1<p<2)$.

R. Considerăm $\int_C \frac{(1+z)^{1-p}(1-z)^p}{1+z^2}\,dz$, cu C dat de figura 150 și cu determinarea reală a integrandului pe marginea superioară a tăieturii. În acest scop vom duce pentru $(1+z)^{1-p}$ tăietura $(-1, +\infty)$ făcînd să varieze $\arg(1+z)$ de la 0 la 2π, iar pentru $(1-z)^p$ tăietura $(1, +\infty)$, făcînd să varieze $\arg(1-z)$ de la $-\pi$ la π. Astfel pentru $z = i$ aceste argumente sînt $\frac{\pi}{4}$ și $-\frac{\pi}{4}$, iar pentru $z = -i$, $\frac{7\pi}{4}$ și $\frac{\pi}{4}$. Deci

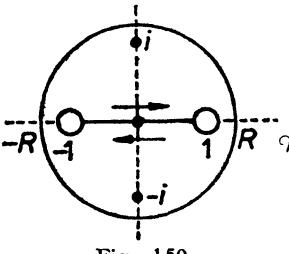

Fig. 150

$$\mathcal{R}(i) = \frac{1}{2i}\,2^{\frac{1-p}{2}}\,e^{(1-p)\frac{\pi i}{4}}\,2^{\frac{p}{2}}\,e^{-p\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{2i}\sqrt{2}\,e^{\left(\frac{\pi}{4}-p\frac{\pi}{2}\right)i},$$

$$\mathcal{R}(-i) = \frac{1}{-2i}\,2^{\frac{1-p}{2}}\,e^{(1-p)\frac{7\pi i}{4}}\,2^{\frac{p}{2}}\,e^{p\frac{\pi i}{4}} = -\frac{1}{2i}\sqrt{2}\,e^{-\left(\frac{\pi}{4}+3p\frac{\pi}{2}\right)i},$$

$$\mathcal{R}(i) + \mathcal{R}(-1) = \frac{1}{2i}\sqrt{2}\,e^{-p\pi i}\left(e^{\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p\pi}{2}\right)i} - e^{-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p\pi}{2}\right)i}\right) =$$

$$= \sqrt{2}\,e^{-p\pi i}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{p\pi}{2}\right) = e^{-p\pi i}\left(\sin\frac{p\pi}{2} + \cos\frac{p\pi}{2}\right).$$

$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty}\left(1+\frac{1}{z}\right)^{1-p}\left(\frac{1}{z}-1\right)^p = e^{-p\pi i}$, căci determinarea ei este de forma $e^{-(2k+1)p\pi}$ cu k fix (deoarece integrandul este uniform la ∞) și luînd $z = x > 1$, se vede că $k = 0$, deoarece argumentele factorilor sînt atunci 0 și $-\pi p$ pe marginea superioară a axei (sau $2\pi(1-p)$ și πp pe marginea inferioară).

$$\lim_{z\to -1}(z+1) f(z) = 0; \qquad \lim_{z\to 1}(z-1) f(z) = 0.$$

Cum pe marginea inferioară a segmentului $(-1, +1)$ factorii au argumentele $(1-p)2\pi$ și 0, urmează

$$(1 - e^{-2p\pi i})I + 2\pi i\, e^{-p\pi i} = 2\pi i\, e^{-p\pi i}\left(\sin\frac{p\pi}{2} + \cos\frac{p\pi}{2}\right),$$

$$I = \frac{\pi}{\sin p\pi}\left(\sin\frac{p\pi}{2} + \cos\frac{p\pi}{2} - 1\right).$$

40. $\int_0^1 \frac{x^{1-p}(1-x)^p}{(1+x)^3}\,dx = \frac{p(1-p)\pi}{8\sin p\pi}\,2^p \qquad -1 < p < 2.$

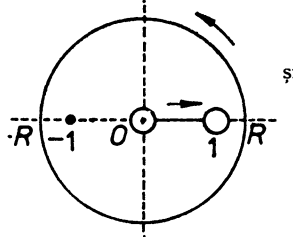

Fig. 151

R. Considerăm $\frac{z^{1-p}(1-z)^p}{(1+z)^3}\,dz$, cu C dat de figura 151 și cu determinarea reală pe marginea superioară a tăieturii.

$$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} z^{-1}\left(\frac{1}{z}-1\right)^p = \lim_{z\to\infty} z^{-1}\left(1-\frac{1}{z}\right)^p e^{-p\pi i} = 0,$$

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = 0, \quad \lim_{z\to 1}(z-1) f(z) = 0.$$

În $z = -1$, $(1+z)^3 f(z)$ are valoarea $2^p\, e^{(1-p)\pi i} = -2^p\, e^{-p\pi i}$. și deci punînd $z+1=\zeta$, avem

$$f(z) = \frac{-1}{\zeta^3}\,2^p\,e^{-p\pi i}(1-\zeta)^{1-p}\left(1-\frac{\zeta}{2}\right)^p$$

cu determinările principale ale lui $(1-\zeta)^{1-p}$ și $\left(1-\frac{\zeta}{2}\right)^{p}$; sau

$$f(z) = -\frac{1}{\zeta^3}\,2^p\,e^{-p\pi i}\left(1-\frac{1-p}{1}\,\zeta-\frac{p(1-p)}{2}\,\zeta^2+\ldots\right)\left(1-\frac{p}{2}\,\zeta+\frac{p(p-1)}{8}\,\zeta^2\ldots\right)$$

de unde

$$\mathcal{R}(-1) = -2^p\,e^{-p\pi i}\left(\frac{p(p-1)}{8}-\frac{p(p-1)}{2}+\frac{p(p-1)}{2}\right) = -2^p\,e^{-p\pi i}\,\frac{p(p-1)}{8}\,.$$

Avem deci

$$(1-e^{-2p\pi i})\,I = 2\pi i\,2^p\,\frac{p(1-p)}{8}\,e^{-p\pi i}\,.$$

$$I = \frac{\pi p(1-p)}{8\sin p\pi}\,2^p.$$

41. $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{1x^{1-p}(1-x)^p}{(a+x)^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}\left[p\left(\frac{1+a}{a}\right)^{p-1}+(1-p)\left(\frac{1+a}{a}\right)^{p}-1\right]\quad(-1<p<2).$

R. Ca în exercițiile precedente.

42. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sum_\nu a_\nu e^{\lambda_\nu x}\,dx}{1-e^x} = \pi\sum_\nu a_\nu\,\operatorname{ctg}\,\pi\lambda_\nu$

cu $\varepsilon<\lambda_\nu<1-\varepsilon$, $\displaystyle\sum_\nu a_\nu = 0$.

R. Punînd $e^x=\xi$,

$$I = \int_0^{\infty}\frac{\sum_\nu a_\nu\xi^{\lambda_\nu-1}\,d\xi}{1-\xi}\,.$$

Vom calcula

$$P\int_0^{\infty}\frac{\xi^{\lambda-1}\,d\xi}{1-\xi} = \lim_{r\to 0}\left\{\int_0^{1-r}+\int_{r+1}^{+\infty}\right\}\quad 0<\lambda<1.$$

Considerăm $\displaystyle\int_C\frac{z^{\lambda-1}\,dz}{1-z}$, cu C dat de figura 152.

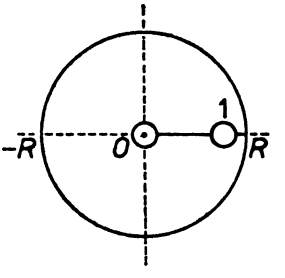

Fig. 152

$$\lim_{z\to\infty} z\,f(z) = -\lim_{z\to\infty} z^{\lambda-1} = 0\quad(\lambda-1<0),$$

$$\lim_{z\to 0} z\,f(z) = \lim_{z\to 0} z^{\lambda} = 0\quad(\lambda>0),$$

$$\lim_{z\to 1}(z-1)\,f(z) = \begin{cases}-1 & \text{pe marginea superioară a tăieturii,}\\ -e^{2i\pi\lambda} & \text{pe marginea inferioară a tăieturii·}\end{cases}$$

Pe marginea superioară a tăieturii integrandul fiind luat real, pe marginea inferioară are valoarea precedentă înmulțită cu $e^{2\pi i(\lambda-1)}$. Deci

$$(1-e^{2\pi i(\lambda-1)})\,P\int_0^{\infty}\frac{\xi^{\lambda-1}\,d\xi}{1-\xi}+(\pi i)(e^{2\pi i\lambda}+1)=0$$

sau

$$P\int_0^{\infty}\frac{\xi^{\lambda-1}\,d\xi}{1-\xi} = \pi\,\operatorname{cotg}\,\pi\lambda\quad 0<\lambda<1$$

sau

$$P\int_0^{\infty}\frac{e^{\lambda x}\,dx}{1-e^x} = \pi\,\operatorname{cotg}\,\pi\lambda.$$

Cînd $\sum_\nu a_\nu = 0$, funcția $g(z) = \dfrac{\sum a_\nu e^{\lambda_\nu z}}{1 - e^z}$ este olomorfă în $z = 0$ deoarece $zg(z)$ are limita $-\sum_\nu a_\nu = 0$ (pe marginea superioară); deci integrala improprie dată există și are valoarea $\pi \sum a_\nu \operatorname{cotg} \pi\lambda_\nu$.

43. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2}\,dx = \pi.$

R. Considerăm

$$\int_C \frac{\sqrt{z}\log z}{(1+z)^2}\,dz,$$

cu C dat de figura 153 și cu $0 < \arg z < 2\pi$.

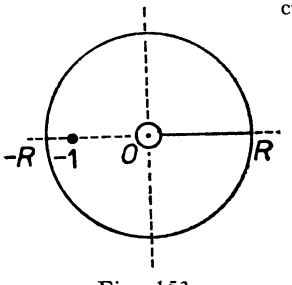

Fig. 153

$$\mathcal{R}(-1) = \left[\frac{d}{dz}\sqrt{z}\log z\right]_{z=-1} = \left[\frac{\log z}{2\sqrt{z}} + \frac{\sqrt{z}}{z}\right]_{z=-1}$$

$$= \frac{\pi i}{2e^{\frac{\pi}{2}i}} \quad e^{\frac{\pi}{2}i} = \frac{\pi}{2} - i,$$

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = 0, \quad \lim_{z\to\infty} z f(z) = \lim_{z\to\infty} \frac{\log z}{\sqrt{z}} = 0.$$

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x)^2}\,dx - \int_0^\infty \frac{-\sqrt{x}(\log x + 2\pi i)}{(1+x)^2}\,dx = 2\pi i\left(\frac{\pi}{2} - i\right),$$

de unde

$$2\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\log x}{(1+x^2)}\,dx = 2\pi, \quad 2\pi i\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\,dx}{(1+x)^2} = \pi^2 i.$$

44. $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt[3]{x(1-x^2)}} = \begin{cases} \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\,\dfrac{1.4.7\ \ldots\ (3n-2)}{3.6.9\ldots\ 3n} & n \geqslant 1, \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{3}}\ (n \text{ întreg}) & n = 0. \end{cases}$

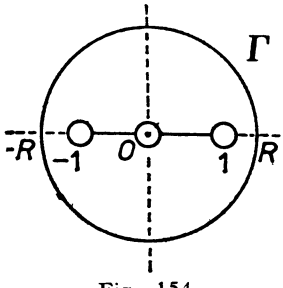

Fig. 154

R. Considerăm $\displaystyle\int_0^1 \frac{z^{2n}\,dz}{\sqrt{z(1-z^2)}}$, cu C dat de figura 154 și cu determinarea pozitivă pe marginea superioară a tăieturii $(0,1)$ care este uniformă în domeniu.

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = 0 \text{ (pe marginea superioară și inferioară)},$$

$$\lim_{z\to 1} (z-1) f(z) = 0, \quad \lim_{z\to -1} (z+1) f(z) = 0.$$

$\lim_{z\to\infty} z f(z) = \infty$; totuși $\int_\Gamma = -2\pi i \mathcal{R}(\infty)$, pentru că $f(z)$ este uniformă la ∞. În $z = \infty$ avem (cum se vede prelungind pe axa reală dincolo de $z = 1$)

$$f(z) = -e^{\frac{\pi i}{3}} z^{2n-1}\left(1 - \frac{1}{z^2}\right)^{-\frac{1}{3}}.$$

În dezvoltarea binomului termenul în $\frac{1}{z^{2n}}$ are coeficientul

$$\frac{(-1)^n}{n!}\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{3}-n+1\right)=\frac{1}{n!}\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{3n-2}{3}=\frac{1.4\ldots(3n-2)}{3.6\ldots 3n}$$

$(n>0)$.

Deci

$$\mathcal{R}(\infty)=-\frac{1.4\ldots(3n-2)}{3.6\ldots 3n}\,e^{\frac{\pi i}{3}} \qquad (n>0),$$

iar pentru $n=0$, $\mathcal{R}(\infty)=e^{\frac{\pi i}{3}}$.

Avem acum

$$2\pi i\mathcal{R}(\infty)=I-e^{\frac{2\pi i}{3}}I+e^{\frac{2\pi i}{3}+\frac{\pi i}{3}}\int_0^{-1}\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt[3]{(-x)(1-x^2)}}+e^{\frac{4\pi i}{3}+\frac{\pi i}{3}}\int_{-1}^{0}\frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt[3]{(-x)(1-x^2)}}$$

(Se observă că pe, marginea inferioară a tăieturii $(0,1)$, $\sqrt[3]{x(1-x^2)}$ devine $e^{-\frac{2\pi i}{3}}\sqrt[3]{x(1-x^2)}$; pe marginea inferioară a tăieturii $(-1,0)$, același radical devine $e^{-\frac{2\pi i}{3}-\frac{\pi i}{3}}\sqrt[3]{(-x)(1-x^2)}$ etc). Sau, schimbînd x în $-x$ în ultimele două integrale:

$$(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}+1+e^{-\frac{\pi i}{3}})I=2(1-e^{\frac{2\pi i}{3}})\,I=2\pi i\mathcal{R}(\infty),$$

de unde

$$I=-\frac{\pi e^{-\frac{\pi i}{3}}}{2\sin\frac{\pi}{3}}\mathcal{R}(\infty)=-\frac{\pi e^{-\frac{\pi i}{3}}}{\sqrt{3}}\mathcal{R}(\infty).$$

45. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,\frac{dx}{x^2+1}=\pi\,\frac{e^{2n}-1}{(e^2-1)\,e^{2n-1}}$ $\qquad (n \text{ întreg} > 0)$.

R. Considerăm $\displaystyle\int_C \frac{e^{2inz}-1}{\sin z}\,\frac{dz}{z^2+1}$, cu C dat de figura 155. S-a luat -1 la numărător pentru ca integrandul să fie olomorf pe contur (numărătorul avînd zerorile numitorului).

$$\mathcal{R}(i)=\frac{1}{2i}\,\frac{2i(e^{-2n}-1)}{e^{-1}-e},$$

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z}\,\frac{e^{2inz}-1}{\sin z}=0$$

căci $\left|\frac{1}{z}\,\frac{e^{2inz}-1}{\sin z}\right|<\frac{2}{R}\,\frac{e^{-2nR\sin\theta}+1}{e^{R\sin\theta}-e^{-R\sin\theta}}$,

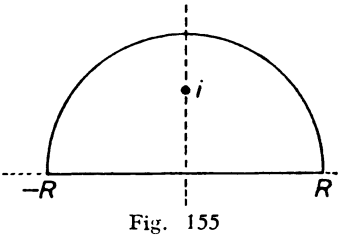

Fig. 155

$$\int_0^\infty \frac{e^{2inx}-1}{\sin x}\,\frac{dx}{x^2+1}-\int_0^\infty \frac{e^{-2inx}-1}{\sin x}\,\frac{dx}{x^2+1}=2i\int_0^\infty \frac{\sin 2nx}{\sin x}\,\frac{dx}{x^2+1}=2i\pi\,\frac{e^{-2n}-1}{e^{-1}-e}.$$

46. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{(x^4+3x^2+1)\cos x}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{3}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\cos\frac{1}{2}$,

$$\int_0^\infty \frac{x(x^2+1)\sin x}{(x^4+x^2+1)^2}\,dx=\frac{\pi}{6}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin\frac{1}{2}.$$

R. Considerăm $\int_C \frac{e^{iz}\,dz}{(z^2+z+1)^2}$, unde C este dat de figura 156 [observînd-se că $x^4+x^2+1=(x^2+x+1)(x^2-x+1)$].

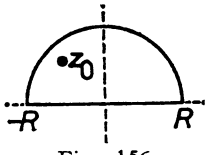

Fig. 156

$$\lim_{z\to\infty} zf(z)=\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^3}e^{iz}=0 \quad \text{căci} \quad \left|\frac{e^{iz}}{z^3}\right|<\frac{e^{-R\sin\theta}}{R^3}.$$

În contur avem polul $z_0=e^{2\pi i/3}=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

$$\mathcal{R}(z_0)=\left[\frac{d}{dz}\frac{e^{iz}}{\left(z+\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^2}\right]_{z=-\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}=i\frac{e^{\frac{-i-\sqrt{3}}{2}}}{(i\sqrt{3})^2}-\frac{2e^{\frac{-i-\sqrt{3}}{2}}}{(i\sqrt{3})^3}=$$

$$=-\frac{i}{3}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}-\frac{2i}{3\sqrt{3}}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}}=-\frac{i}{3}e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\left(\cos\frac{1}{2}-i\sin\frac{1}{2}\right),$$

$$\int_0^\infty\frac{e^{ix}\,dx}{(x^2+x+1)^2}+\int_0^\infty\frac{e^{-ix}\,dx}{(x^2-x+1)^2}=2\int_0^\infty\frac{(x^4+3x^2+1)\cos x-2ix(x^2+1)\sin x}{(x^4+x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2\pi}{3}\left(1+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\cos\frac{1}{2}-i\sin\frac{1}{2}\right)$$

de unde rezultatele.

47. $\int_0^\infty t^{z-1}e^{-it}\,dt=e^{-\frac{\pi i}{2}}\Gamma(z) \quad (0<\operatorname{Re} z<1).$

R. Se știe că $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt \quad (\operatorname{Re} z>0).$

Considerăm $\int_C \zeta^{z-1}e^{-\zeta}\,d\zeta$, cu C dat de figura 157 cu determinarea lui $\zeta^{z-1}=e^{(z-1)\log\zeta}$ definită prin $0<\arg\zeta<\frac{\pi}{2}$. Punem $z=x+iy$, $\zeta=re^{i\theta}=t+is$.

$$\lim_{\zeta\to 0}|\zeta f(\zeta)|=\lim_{r\to 0} r^x e^{-y\theta-r\cos\theta}=0 \quad (x>0).$$

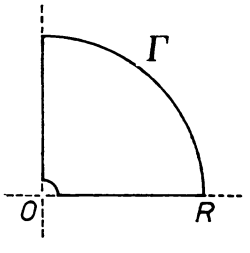

Fig. 157

Pe arcul Γ nu se poate folosi criteriul analog, fiindcă $\zeta f(\zeta)$ nu este mărginit în direcția axei imaginare. Dar

$$\left|\int_\Gamma\right|\leqslant\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{(x-1)\log R-y\theta-R\cos\theta}\,d\theta$$

$$\leqslant R^{x-1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-y\theta-\frac{1}{2}R\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}d\theta$$

$$=\frac{R^{x-1}}{\frac{R}{2}-y}\left(e^{-\frac{\pi}{2}y}-e^{-\frac{\pi}{4}R}\right)\to 0 \qquad (x<1).$$

S-a utilizat inegalitatea $\cos\theta\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\quad\left(0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

Avem deci

$$\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\,dt-ie^{(z-1)\frac{\pi i}{2}}\int_0^\infty s^{z-1}e^{-is}\,ds=0$$

sau

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{-it}\, dt = e^{-\frac{\pi i}{2} z}\, \Gamma(z).$$

La fel, considerînd conturul C din figura 158 se va obține

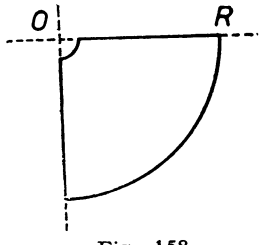

Fig. 158

$$\int_0^\infty t^{z-1} e^{it}\, dt = e^{\frac{\pi i}{2} z}\, \Gamma(z).$$

48. $$\int_0^\infty t^{z-1} \cos t\, dt = \Gamma(z) \cos \frac{\pi z}{2} \quad (0 < \operatorname{Re} z < 1),$$

$$\int_0^\infty t^{z-1} \sin t\, dt = \Gamma(z) \sin \frac{\pi z}{2} \quad (-1 < \operatorname{Re} z < 1).$$

R. Pentru $0 < \operatorname{Re} z < 1$ ambele formule rezultă din exercițiul 47. Pentru $-1 < \operatorname{Re} z < 0$, formula a doua se extinde prin prelungire analitică a ambilor membri; $\int_0^\infty t^{z-1} \sin t\, dt$ este, într-adevăr, olomorfă în banda $-1 < \operatorname{Re}(z) < 1$, pentru că

1° integrandul este finit și continuu ca funcție de t și z;

2° olomorf ca funcție de z pentru fiecare t;

3° integrala converge uniform la ambele limite (vezi cap. IV, § 77, teorema 26).

Pentru $0 < t < 1$, $-1 + \varepsilon < x < 1 - \varepsilon$,

$$|f| = |t^{z-1} \sin t| \leqslant t^x < t^{-1+\varepsilon} \qquad (|\sin t| < t)$$

și vom avea pentru $t \to 0$,

$$|t^\alpha f| < t^{-1+\varepsilon+\alpha} \to 0 \text{ uniform cu } 1 - \varepsilon < \alpha < 1,$$

adică integrala converge la limita inferioară 0 (vezi criteriul A, § 77, cap. IV).

Pentru $t > 1$,

$$|f| < t^{x-1} |\sin t| < t^{-\varepsilon} |\sin t|,$$

și

$$|t^\alpha f| < t^{x-\varepsilon} |\sin t|$$

și criteriul nu este aplicabil (pentru $\alpha > 1$, $\alpha - \varepsilon > 0$). Dar

$$\left| \int^{+\infty} t^{z-1} \sin dt \right| < \int^{+\infty} t^{-\varepsilon}\, dt,$$

ultima integrală fiind convergentă la limita superioară, în virtutea criteriului lui Dirichlet.

Formula a doua dă așa dar o reprezentare ca integrală a funcției $\Gamma(z)$ în banda $-1 < \operatorname{Re} z < 1$.

49. $$\int_0^\infty \frac{2 \sin ax\, dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{e^a - 1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{a} \quad (a > 0).$$

R. Considerăm $J = \int_C \frac{e^{aiz}\, dz}{e^{2\pi z} - 1}$. În conturul C dat de figura 159 avem polii $z = ki (k = 1, \ldots, n)$ cu reziduul total)

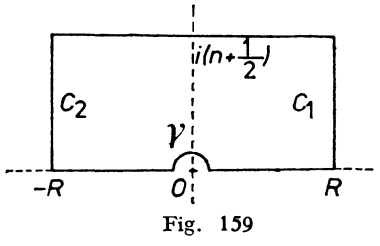

Fig. 159

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{e^{-ak}}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} e^{-a} \frac{e^{-na} - 1}{e^{-a} - 1} \to \frac{1}{2\pi(e^a - 1)}$$

pentru $n \to \infty$, iar $\lim_{z \to 0} zf(z) = 1/2\pi$.

Spre a obține integrala dată și pe jumătatea din stînga a conturului (unde x este schimbat în $-x$), vom folosi identitatea

$$\frac{1}{e^{2\pi x} - 1} + \frac{1}{e^{-2\pi x} - 1} = -1.$$

Vom scrie anume

$$J = \int_{C_1} \frac{e^{aiz}\,dz}{e^{2\pi z} - 1} - \int_{C_2} \frac{e^{aiz}\,dz}{e^{-2\pi z} - 1} - \int_{C_2} e^{aiz}\,dz - \frac{i}{2}.$$

În ultima integrală C_2 poate fi înlocuit cu segmentul $\left(0, \left(n + \frac{1}{2}\right)i\right)$ (integrandul fiind olomorf în dreptunghi):

$$J_0 = -\int_{C_2} e^{aiz}\,dz = i\int_0^{n+\frac{1}{2}} e^{-ay}dy = -\frac{i}{a}\left(e^{-a\left(n+\frac{1}{2}\right)} - 1\right) \to \frac{i}{a} \text{ pentru } n \to \infty.$$

Pe latura din dreapta

$$|J_1| = \left|\int_0^{n+\frac{1}{2}} \frac{e^{ai(R+iy)}\,dy}{e^{2\pi(R+iy)} - 1}\right| < \frac{1}{e^{2\pi R} - 1}\int_0^{n+\frac{1}{2}} e^{-ay}\,dy \to \frac{\frac{1}{a}}{e^{2\pi R} - 1} \text{ pentru } n \to \infty.$$

La fel pe latura din stînga, $|J_2| \to \frac{\frac{1}{a}}{(e^{2\pi R} - 1)}$ pentru $n \to \infty$. Rămîne, după ce am făcut $r \to 0$:

$$J = \int_0^R \left(\frac{e^{iax}}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{e^{-iax}}{e^{2\pi x} - 1}\right) dx + J_0 + J_1 + J_2 - \frac{i}{2}$$

$$- \int_0^R \left(\frac{e^{ia\left[x+\left(n+\frac{1}{2}\right)i\right]}}{e^{2\pi\left[x+\left(n+\frac{1}{2}\right)i\right]} - 1} - \frac{e^{ia\left[-x+\left(n+\frac{1}{2}\right)i\right]}}{e^{-2\pi\left[-x+\left(n+\frac{1}{2}\right)i\right]} - 1}\right) dx =$$

$$= 2i\int_0^R \frac{\sin ax}{e^{2\pi x} - 1}\,dx + e^{-a\left(n+\frac{1}{2}\right)}\int_0^R \frac{2i\sin ax}{e^{2\pi x} + 1}\,dx + J_0 + J_1 + J_2 - \frac{i}{2}.$$

Făcînd $n \to \infty$, apoi $R \to \infty$, obținem formula dată (vezi și exercițiile 24, 28).

49. a) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{B_n}{4n}$ (n *întreg* > 0),

b) $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n}\,dx}{\operatorname{sh}^2 x} = B_n\pi^{2n}$ (n *întreg* > 0).

R. În formula de la exercițiul 24 dezvoltăm în serie $\sin ax$. Integrandul se scrie $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\,\frac{(ax)^{2n-1}}{e^{2\pi x} - 1}$, serie uniform convergentă într-un interval $0 < r < x < R$, deoarece $\dfrac{1}{e^{2\pi x} - 1}$ este mărginit. În membrul al doilea avem pentru $0 < a < \pi$:

$$\frac{1}{e^a - 1} = \frac{1}{a} - \frac{1}{2} + \sum_1^\infty (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n)!}\,a^{2n-1}.$$

Identificînd se obține prima integrală. A doua se deduce integrînd prin părți cu privire la $x^{2n-1}\,dx$ și apoi înlocuind x cu $\dfrac{x}{\pi}$.

Exemple: $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\pi^2}{6}$, $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^4\,dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\pi^4}{30}$, ...

50. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}\,dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{2^{2n} - 1}{2n} B_n\pi^{2n}$

R. Se dezvoltă în serie, după puterile lui a, cei doi membri ai uneia din formulele de la exercițiul 19) și se identifică.

51. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_n$ (n *întreg* > 0).

R. Plecăm de la dezvoltarea care definește numerele lui Bernouli:

$$z \operatorname{cotg} z = 1 - \sum_{1}^{\infty} \frac{B_n}{(2n)!} (2z)^{2n}.$$

De aici se vede că $-\frac{2^{2n}}{(2n)!} B_n$ este reziduul în 0 al funcției $\frac{\operatorname{cotg} z}{z^{2n}}$. Considerăm acum $\int_{C_h} \frac{\operatorname{cotg} z}{z^{2n}} dz$, pe cercul $|z| = \left(h + \frac{1}{2}\right)$; în acesta avem, pe lîngă $z = 0$, polii $z = k\pi$ ($k = \pm 1, \ldots, \pm h$); reziduul în $z = k\pi$ este $\frac{1}{(\pi k)^{2n}}$. Astfel

$$\lim_{h \to \infty} \int_{C_h} \frac{\operatorname{ctg} z}{z^{2n}} = \frac{2}{\pi^{2n}} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} - \frac{2^{2n}}{(2n)!} B_n.$$

Cînd $h \to \infty$, integrala $\to 0$ (ctg z fiind mărginită în tot planul minus cercuri de centre $k\pi$ și rază arbitrar de mică). Obținem astfel formula dată.

52. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx = \frac{1}{2\operatorname{ch} \frac{a}{2}}$ (*a real diferit de* 0).

R. Considerăm $\int_C \frac{\cos az}{\operatorname{ch} \pi z} dz$. În conturul C dat de figura 160 avem polul $z = \frac{i}{2}$, cu

$$\mathcal{R}\left(\frac{i}{2}\right) = \frac{\cos \frac{ia}{2}}{\pi \operatorname{sh} \frac{i\pi}{2}} = \frac{1}{\pi i} \operatorname{ch} \frac{a}{2}.$$

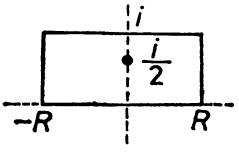

Fig. 160

Pe latura din dreapta

$$\left| \int_0^1 \frac{1 \cos a(R+iy)}{\operatorname{ch} \pi(R+iy)} dy \right| < \frac{\int_0^1 (e^{-ay} + e^{ay}) dy}{e^{\pi R} - e^{-\pi R}} \to 0.$$

La fel pe latura din stînga. Rămîne

$$2\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx + \int_0^{\infty} \left(\frac{\cos a(x+i)}{\operatorname{ch} \pi x} + \frac{\cos a(-x+i)}{\operatorname{ch} \pi x} \right) dx = 2(1 + \operatorname{ch} a) \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\operatorname{ch} \pi x} dx = 2\operatorname{ch} \frac{a}{2},$$

de unde rezultatul.

53. $\int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{\operatorname{ch} \pi x} = \frac{E_n}{2^{2n+1}}$ (n *întreg* $\geqslant 0$).

R. Amintim că E_n sînt numerele lui Euler caracterizate prin formula (39'), § 82. Dezvoltînd cei doi membri ai formulei de la exercițiul 52, avem

$$\int_0^{\infty} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{(ax)^{2n} dx}{(2n)! \operatorname{ch} \pi x} = \frac{1}{2} \sum_{0}^{\infty} (-1)^n \frac{E_n}{(2n)!} \left(\frac{n}{2}\right)^{2n} \quad (E_0 = 1),$$

de unde (seria din membrul I fiind uniform convergentă în orice interval $0 < x < R$),

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2n} dx}{\operatorname{ch} \pi x} = \frac{E_n}{2^{2n+1}}.$$

54. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)^{2n+1}} = \frac{E_n}{2(2n)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2n+1}$ (n *întreg* > 0).

R. Plecăm de la

$$\frac{1}{\cos z} \sum_{0}^{\infty} \frac{E_n}{(2n)!} z^{2n},$$

[formula (39), § 82], de unde se vede că $\frac{1}{z^{2n+1}\cos z}$ are în $z = 0$ reziduul $\frac{E_n}{(2n)!}$. Considerăm apoi $\int_{C_h} \frac{dz}{z^{2n+1}\cos z}$ pe cercul $|z| = h\pi$. În acesta se mai află polii $z = \pm\frac{2k-1}{2}\pi$ ($k = 1, \ldots, h$), care dau suma de reziduuri

$$2\sum_{1}^{h} \frac{(-1)^k}{\left(\frac{2k-1}{2}\pi\right)^{2n+1}}.$$

Integrala $\to 0$ ($1/\cos z$ fiind mărginit în tot planul, cu excepția cercurilor de centre $z = \pm\frac{2k-1}{2}\pi$ și rază arbitrar de mică). Deci

$$\frac{E_n}{(2n)!} + 2\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2n+1} \sum_{k}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^{2n+1}} = 0.$$

55. *Integrînd* $\frac{\pi}{2z\cos \pi z}$ *pe un contur convenabil, să se deducă:*

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + \frac{(-1)^n}{2}\left(\frac{E_0}{2n} - \frac{E_1}{(2n)^3} + \cdots + (-1)^k \frac{E_k}{(2n)^{2k+1}}\right) + (-1)^{n+1} R_k,$$

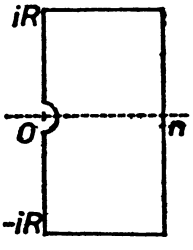

Fig. 161

unde

$$R_k = \frac{1}{2n^{2k+1}} \int_0^{\infty} \frac{y^{2k+2}\,dy}{(y^2+n^2)\operatorname{ch} \pi y} < \frac{E_{k+1}}{2(2n)^{2k+3}}.$$

Luînd $n = 5$, $k = 7$, *să se arate că*

$$3{,}1415924 < \pi < 3{,}1415928$$

(*Se dă*: $E_0 = E_1 = 1$, $E_2 = 5$, $E_3 = 61$, $E_4 = 1385$, $E_5 = 50521$, $E_6 = 2702765$, $E_7 = 199360981$, $E_8 = 19391512145$).

R. Se ia conturul din figura 161. În el sînt polii $z = \frac{2k-1}{2}$ ($k = 1, \ldots, n$) cu reziduurile $\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$; $\lim_{z\to 0} z f(z) = \frac{\pi}{2}$. Se ajunge la

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1} + (-1)^n \int_0^R \frac{n\,dy}{2(y^2+n^2)\operatorname{ch} \pi y}.$$

Scriind

$$\frac{n}{y^2+n^2} = \frac{1}{n}\,\frac{1}{1+\frac{y^2}{n^2}} = \frac{1}{n} - \frac{y^2}{n^3} + \ldots + (-1)^k \frac{y^{2k}}{n^{2k+1}} + (-1)^{k+1}\frac{y^{2k+2}}{n^{2k+1}(y^2+n^2)}$$

și ținînd seamă de exercițiul 53 și de faptul că $\frac{1}{y^2+n^2} \leqslant \frac{1}{n^2}$, se găsește relația cerută.

56. *Integrînd* $\dfrac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^2}$ *pe un contur convenabil, să se demonstreze:*

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots$$

$$= \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{n} + \frac{B_1}{n^3} - \frac{B_2}{n^5} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{n^{2k+1}} + r_k,$$

unde

$$r_k = (-1)^k \frac{4}{n^{2k+1}} \int_0^\infty \frac{y^{2k+1}}{(y^2+n^2)^2 (e^{2\pi y} - 1)} [ky^2 + (k+1)n^2] dy$$

şi

$$|r_k| < \frac{B_{k+1}}{n^{2k+3}} \qquad (n \text{ întreg} > 0).$$

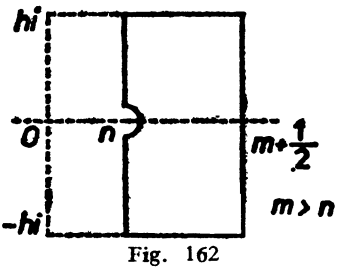

Fig. 162

R. Amintim că B_n sînt numerele lui Bernoulli caracterizate prin relaţia (32) de la § 82, Conturul va fi cel din figura 162, unde se va face $m \to \infty$ şi $h \to \infty$.

57. $\displaystyle\int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} = \gamma - \frac{1}{2},$

γ *fiind constanta lui Euler-Mascheroni. Să se deducă*

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{B_1}{2n^2} - \frac{B_2}{4n^4} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2kn^{2k}} + (-1)^k r_k,$$

unde

$$r_k = \int_0^\infty \frac{2y^{2k+1}}{(y^2+n^2)n^{2k}} \frac{dy}{e^{2\pi y} - 1} < \frac{B_{k+1}}{(2k+2)n^{2k+2}}.$$

Să se calculeze o valoare apropiată a lui γ *luînd* $n = 10$, $k = 2$.

R. Considerăm $J = \displaystyle\int_C \frac{1}{1 - iz} \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1}$. În conturul C dat de figura 163 avem polii simpli $z = ki$, $(k = 0, \ldots, n-1)$ cu reziduurile

$$\mathcal{R}_k = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{1+k}.$$

$$\sum_0^{n-1} 2\pi i \mathcal{R}_k = i\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right), \quad \lim_{z \to 0} zf(z) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}, \quad \lim_{z \to i(n-1)} f(z)[z - i(n-1)] = \frac{1}{2\pi n},$$

$$J_0 = \lim_{r_0 \to 0} \int_{\gamma_0} f(z)\, dz = \frac{i}{2}, \quad J_0' = \lim_{r_0' \to 0} \int_{\gamma_0'} f(z) dz = \frac{-i}{2n},$$

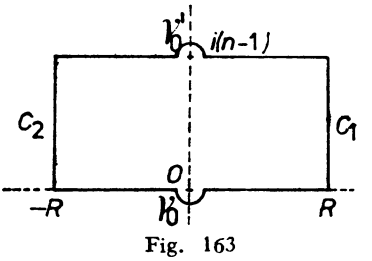

Fig. 163

unde prin r_0, r_0' am notat razele semicercurilor γ_0 şi γ_0' Ca la exerciţiul 49, aplicăm pe partea stîngă a conturului identitatea

$$\frac{1}{e^{2\pi z} - 1} + \frac{1}{e^{-2\pi z} - 1} = -1;$$

$$J = \int_{C_1} \frac{1}{1 - iz} \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1} - \int_{C_2} \frac{1}{1 - iz} \frac{dz}{e^{-2\pi z} - 1} - \int_{C_2} \frac{dz}{1 - iz},$$

$$J_3 = -\int_{C_2} \frac{dz}{1 - iz} = i \int_0^{n-1} \frac{dy}{1+y} = i \log n.$$

Pe latura din dreapta și din stînga

$$|J_1| = \left| \int_0^{n-1} \frac{1}{1 - i(R + iy)} \frac{dy}{e^{2\pi(R+iy)} - 1} \right| < \int_0^{n-1} \frac{dy}{1+y} \cdot \frac{1}{e^{2\pi R} - 1} = \frac{\log n}{e^{2\pi R} - 1},$$

$$|J_2| = \left| \int_0^{n-1} \frac{1}{1 - i(-R + iy)} \frac{dy}{e^{-2\pi(-R+iy)} - 1} \right| < \frac{\log n}{e^{2\pi R} - 1}.$$

Rămîne

$$\int_0^R \frac{1}{1 - ix} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} - \int_0^R \frac{1}{1 + ix} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} - \int_0^R \left\{ \frac{1}{1 - i[x + i(n-1)]} \frac{1}{e^{2\pi(x+i(n-1))} - 1} \right.$$

$$\left. - \frac{1}{1 - i[-x + i(n-1)]} \frac{1}{e^{-2\pi(-x+i(n-1))} - 1} \right\} dx + J_0 + J_0' + J_1 + J_2 + J_3 =$$

$$= \int_0^R \frac{2ix}{1 + x^2} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} + \int_0^R \frac{2ix}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} + J_0 + J_0' + J_1 + J_2 + J_3 =$$

$$= i\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right).$$

Făcînd $R \to \infty$,

$$\int_0^\infty \frac{2x}{1 + x^2} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} + \int_0^\infty \frac{2x}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} = \tag{39}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}.$$

Avem de altfel, observînd că $e^{2\pi x} - 1 > 2\pi x$

$$\int_0^\infty \frac{2x}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} < \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{n^2 + x^2} = \frac{1}{\pi n} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{n},$$

deci această integrală $\to 0$ pentru $n \to \infty$. Obținem astfel

$$\int_0^\infty \frac{2x}{1 + x^2} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} = \gamma - \frac{1}{2}.$$

Înlocuind acum această integrală în (39), avem

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n - \frac{1}{2n} + \int_0^\infty \frac{2x}{n^2 + x^2} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1}.$$

Putem scrie

$$\frac{1}{n^2 + x^2} = \frac{1}{n^2}\left[1 - \frac{x^2}{n^2} + \ldots + (-1)^{k-1}\left(\frac{x}{n}\right)^{2(k-1)} + (-1)^k \left(\frac{x}{n}\right)^{2k} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^2}}\right],$$

deci

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n - \frac{1}{2n} -$$

$$- \int_0^\infty \left[\frac{1}{n^2} - \frac{x^2}{n^4} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-2}}{n^{2k}} + (-1)^k \frac{x^{2k}}{n^{2k}(n^2 + x^2)}\right] \frac{2x\,dx}{e^{2\pi x} - 1}$$

și aplicînd exercițiul 49 a)

$$\gamma = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \log n - \frac{1}{2n} + \frac{B_1}{2n^2} - \frac{B_2}{4n^4} + \ldots + (-1)^{k-1} \frac{B_k}{2kn^{2k}} + (-1)^k r_k$$

cu

$$r_k = \int_0^\infty \frac{2x^{2k+1}\,dx}{n^{2k}(n^2+x^2)(e^{2\pi x}-1)} < \frac{1}{n^{2k+2}}\int_0^\infty \frac{2x^{2k+1}\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{B_{k+1}}{(2k+2)n^{2k+2}}.$$

În cazul numeric propus, $B_1 = \frac{1}{6}$, $B_2 = \frac{1}{30}$, $B_3 = \frac{1}{42}$; $r_3 < \frac{1}{6\cdot 42\cdot 10^6} < 4\cdot 10^{-9}$.
Vom avea astfel o aproximație a lui γ cu 8 sau 9 zecimale exacte (în minus).
Efectiv

$$\gamma = \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{20}$$

$$+\frac{1}{1\,200}-\frac{1}{1\,200\,000}-\log 10+r_2$$

$$=2+\frac{27-2}{40}+\frac{16}{63}+\frac{1}{1\,200}-\frac{1}{1\,200\,000}-\log 10+r_2,$$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 0{,}625 \\ 0{,}2539682380 \\ 0{,}0008333333 \\ -\ 0{,}0000008333 \\ -\ 2{,}3025850929 \\ \hline 0{,}5772156451 \end{array}$$

Observație. Expresiile găsite în exercițiile 55—57 depind de un parametru k și diferă de numărul pe care îl aproximează printr-o cantitate r_n ce poate fi, luată oricît de mică, deși pentru $n \to \infty$ ele nu sînt convergente. Sînt *expresii asimptotice.*

58.
$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta}{\zeta^2+x^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi z}}\,dx = i\int_0^\infty \log\frac{\zeta-ix}{\zeta+ix}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}-1}$$

$$= \log\Gamma(\zeta) + \zeta - \left(\zeta-\frac{1}{2}\right)\log\zeta - \log\sqrt{2\pi} \qquad (\mathrm{Re}\,\zeta > 0),$$

determinările logaritmilor fiind acele reale pentru valorile pozitive ale argumentelor. Să se deducă

$$\log\Gamma(z) = \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1\cdot 2}\,\frac{1}{z} -$$

$$-\frac{B_2}{3\cdot 4}\,\frac{1}{z^3} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{B_n}{(2n-1)2n}\,\frac{1}{z^{2n-1}} + (-1)^n r_n,$$

unde

$$r_n = \frac{1}{\pi\, z^{2n-1}}\int_0^\infty \frac{t^{2n}}{z^2+t^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\,dt$$

și pentru $(\mathrm{Re}\,z)^2 \geqslant (\mathrm{Im}\,z)^2$

$$|r_n| < \frac{1}{|z|^{2n+1}}\,\frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)}.$$

R. Considerăm [17]

$$J = i\int_C \log(\zeta - iz)\,\frac{dz}{e^{2\pi z}-1},$$

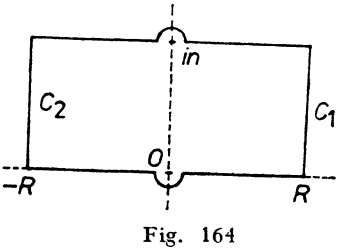

Fig. 164

unde C este dat de figura 164, $\mathrm{Re}\,\zeta > 0$ și luăm determinarea lui $\log(\zeta - iz)$ care este reală cînd $\zeta - iz$ este pozitiv. (Deoarece $\zeta - iz$ se anulează pentru $z = -i\zeta$, punct situat în semiplanul inferior, determinările lui $\log(\zeta - iz)$ pot fi separate în semiplanul superior.)

[17] Altă tratare la Mac-Robert, *Functions of a complexe variable.* Londra, 1947, p. 147 și 149.

Avem în interiorul conturului polii $z = ki$ $(k = 0, \ldots, n)$ cu reziduul total $\frac{i}{2\pi} \sum_0^n \log(\zeta + k)$.

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \frac{i}{2\pi} \log \zeta, \quad \lim_{z\to in} (z - in) f(z) = \frac{i}{2\pi} \log (\zeta + n).$$

Punînd în jumătatea stîngă a conturului $\frac{1}{e^{2\pi z} - 1} = -\frac{1}{e^{-2\pi z} - 1} - 1$, avem

$$J = i\int_{C_1} \log (\zeta - iz) \frac{dz}{e^{2\pi z} - 1} - i\int_{C_2} \log (\zeta - iz) \frac{-dz}{e^{2\pi z} - 1} +$$

$$+ J_0 - \frac{1}{2} \log \zeta - \frac{1}{2} \log (\zeta + n)$$

cu

$$J_0 = -\int_0^n \log (\zeta + y)\, dy = -[y \log (\zeta + y)]_0^n + \int_0^n \frac{y\, dy}{\zeta + y} -$$

$$- n \log (\zeta + n) + n - \zeta \log (\zeta + n) + \zeta \log \zeta.$$

Pe latura din dreapta $|J_1| < n \frac{\log |\zeta + n - iR| + \arg (\zeta + n - iR)}{e^{2\pi R} - 1} \to 0$, pentru $R \to \infty$, $\arg (\zeta + n - iR)$ fiind mărginit. Prin același raționament se arată că și $J_2 \to 0$ pentru $R \to \infty$. Astfel aplicînd teorema reziduurilor pentru J, obținem:

$$i\int_0^\infty \log \frac{\zeta - ix}{\zeta + ix} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} - i\int_0^\infty \log \frac{\zeta + n - ix}{\zeta + n + ix} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1}$$

$$= -\sum_0^n \log (\zeta + k) + \frac{1}{2} \log \zeta + \frac{1}{2} \log (\zeta + n) + n \log (\zeta + n) -$$

$$- n + \zeta \log (\zeta + n) - \zeta \log \zeta.$$

Amintindu-ne

$$\Gamma(\zeta) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^\zeta}{\zeta(\zeta + 1) \ldots (\zeta + n)},$$

vom scrie

$$i\int_0^\infty \log \frac{\zeta - ix}{\zeta + ix} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} - i\int_0^\infty \log \frac{\zeta + n - ix}{\zeta + n + ix} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1}$$

$$= \log \frac{n!\, n^\zeta}{(\zeta + 1) \ldots (\zeta + n)} - \left(\zeta - \frac{1}{2}\right) \log \zeta + \left(\zeta + n + \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{\zeta}{n}\right) +$$

$$+ \left[\left(n + \frac{1}{2}\right) \log n - \log n! - n\right].$$

Făcînd $n \to \infty$, a doua integrală $\to 0$, iar în membrul al doilea primul termen $\to \log \Gamma(\zeta)$, al treilea $\to \zeta$, iar al patrulea are o limită constantă, care, după formula lui Stirling, este egală cu $-\log \sqrt{2\pi}$. Fără a face apel la această formulă, vom avea în orice caz

$$i\int_0^\infty \log \frac{\zeta - ix}{\zeta + ix} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} = \log \Gamma(\zeta) - \left(\zeta - \frac{1}{2}\right) \log \zeta + \zeta + \lambda,$$

λ fiind acea limită. Pentru a o determina, punem aici $\zeta = \frac{1}{2} + i\eta$ (η real) și studiem comportarea părților reale ale celor doi membri pentru $\eta \to \infty$.

$$\operatorname{Re} i\int_0^\infty \log\frac{\zeta - i x}{\zeta + i x}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}-1} = -\int_0^\infty \arg\left(\frac{\zeta - i x}{\zeta + i x}\right)\frac{dx}{e^{2\pi x}-1} =$$

$$= \int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\eta^2 + \frac{1}{4} - x^2}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}-1} \to 0 \text{ pentru } \eta \to +\infty.$$

Pe de altă parte avem

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\eta\right)\Gamma\left(\frac{1}{2} - i\eta\right) = \frac{\pi}{\sin\left(\frac{1}{2} - i\eta\right)\pi} = \left|\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\eta\right)\right|^2,$$

deci

$$\operatorname{Re}\log\Gamma\left(\frac{1}{2} + i\eta\right) = \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\eta} = \log\sqrt{2\pi} - \frac{\pi}{2}\eta + \frac{1}{2}\log\frac{1}{1+e^{-2\pi\eta}}.$$

Apoi

$$\operatorname{Re}\left(\zeta - \frac{1}{2}\right)\log\zeta = \operatorname{Re} i\eta\log\left(\frac{1}{2} + i\eta\right) = -\eta\operatorname{arc\,tg} 2\eta$$

$$= -\eta\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{1}{2\eta}\right) = -\eta\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2\eta} + \frac{1}{3(2\eta)^3} - \dots\right), \quad \operatorname{Re}\zeta = \frac{1}{2}.$$

Astfel avem

$$\lambda + \log\sqrt{2\pi} + \varepsilon = 0 \text{ unde } \varepsilon \to 0 \text{ pentru } \eta \to \infty,$$

de unde $\lambda = -\log\sqrt{2\pi}$.

Pentru a stabili a doua formulă, se va deduce mai întîi prin integrarea prin părți, ținînd seama că

$$\int\frac{dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{1}{2\pi}\log(1 - e^{-2\pi t}), \tag{40}$$

relația

$$i\int_0^\infty \log\frac{\zeta - i x}{\zeta + i x}\,\frac{dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\zeta}{t^2+\zeta^2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{1}{\zeta}\left[1 - \frac{t^2}{|\zeta^2} + \dots + (-1)^{2n-1}\left(\frac{t}{\zeta}\right)^{n-2} + (-1)^n\left(\frac{t}{\zeta}\right)^{2n}\frac{1}{1+\frac{t^2}{\zeta^2}}\right]\log\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\,dt$$

și se va aplica exercițiul 49 a) și relația (40):

$$\int_0^\infty t^{2m-2}\log\frac{1}{1-e^{-2\pi t}}\,dt = \frac{2\pi}{2m-1}\int_0^\infty \frac{t^{2m-1}\,dt}{e^{2\pi t}-1} = \frac{\pi B_m}{2m(2m-1)}.$$

Tot din această formulă va rezulta aproximația lui $|r_n|$.

Observații. 1) Oprind dezvoltarea din formula a doua la primul termen, putem scrie

$$\log\Gamma(z) = \log\sqrt{2\pi} + \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{\theta}{12z} \text{ cu } |\theta| < 1 \qquad (\operatorname{Re} z > 0)$$

sau

$$\Gamma(z) = \sqrt{2\pi}\,e^{\left(z-\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{\theta}{12z}}.$$

2) Cînd $z = n$ obținem formula lui Stirling

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n e^{\frac{\theta}{12n}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

3) Luînd în prima formulă $\zeta = 1$, o putem scrie

$$\int_0^\infty \operatorname{arc\,tg}\, x \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1} = \frac{1}{2}(1 - \log \sqrt{2\pi})$$

cu determinarea principală a lui arc tg.

4) Pentru $\operatorname{Re} z < 0$, vezi Mac-Robert.

5) Aplicație a observației 1):

$$\lim_{z\to\infty} \frac{\Gamma(z+\alpha)}{\Gamma(z)\, z^\alpha} = 1 \qquad (\operatorname{Re} z > 0).$$

§ 90. Polinoame speciale și funcții generatoare

Dacă avem o dezvoltare convergentă

$$\Phi(z, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(z) t^n$$

valabilă în jurul lui $t = 0$ ($|t| < \rho$) și un domeniu D în planul variabilei z, se zice că $\Phi(z, t)$ este funcție generatoare a funcțiilor $\varphi_n(z)$. Uneori din proprietățile lui $\Phi(z, t)$ se pot deduce proprietăți ale funcțiilor $\varphi_n(z)$.

I. *Polinoamele lui Bernoulli* sînt definite prin

$$t \frac{e^{tz} - 1}{e^t - 1} = \sum_1^\infty \frac{1}{n!} \varphi_n(z) t^n.$$

Pentru orice z finit funcția generatoare este olomorfă în $t = 0$, deci are o dezvoltare tayloriană:

$$t \frac{e^{tz} - 1}{e^t - 1} = \left(\frac{tz}{1} + \frac{t^2 z^2}{1 \cdot 2} + \ldots\right) \frac{1}{\frac{1}{1} + \frac{t}{1 \cdot 2} + \ldots} =$$

$$= tz + \frac{t^2}{2} z(z-1) + \frac{t^3}{6} z\left(z^2 - \frac{3}{2} z + \frac{1}{2}\right) + \ldots,$$

de unde

$$\varphi_1 = z,\ \varphi_2 = z(z-1),\ \varphi_3 = z\left(z^2 - \frac{3}{2} z + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= z(z-1)\left(z - \frac{1}{2}\right),\ \varphi_4 = z^2(z-1)^2, \ldots$$

1) Înlocuind z cu $z + 1$ și scăzînd avem

$$t \frac{e^{t(z+1)} - 1}{e^t - 1} - t \frac{e^{tz} - 1}{e^t - 1} = t\, e^{tz} = \sum_1^\infty \frac{t^n}{n!} [\varphi_n(z+1) - \varphi_n(z)],$$

de unde

$$\varphi_n(z+1) - \varphi_n(z) = n z^{n-1}.$$

2) Punînd $z = 0$ în funcţia generatoare, ea devine $= 0$, deci $\varphi_n(0) = 0$. Punînd $z = 1$, ea devine t, deci $\varphi_n(1) = 0$ $(n > 1)$. În general relaţia precedentă ne dă

$$\varphi_n(1) = 0,$$
$$\varphi_n(2) = \varphi_n(1) + n \cdot 1^{n-1},$$
$$\varphi_n(3) = \varphi_n(2) + n \cdot 2^{n-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_n(p) = \varphi_n(p-1) + n(p-1)^{n-1},$$

de unde:

$$\frac{1}{n}\varphi_n(p) = 1^{n-1} + 2^{n-1} + \dots + (p-1)^{n-1} \quad n > 1, \text{ p întreg} > 1.$$

3) Scriind

$$t\left(tz + \frac{t^2z^2}{2!} + \dots + \frac{t^nz^n}{n!} + \dots\right) = \left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^n}{n!} + \dots\right) \times$$
$$\times \left(\frac{t}{1!}\varphi_1 + \frac{t^2}{2!}\varphi_2 + \dots + \frac{t}{n!}\varphi_n + \dots\right)$$

şi identificînd, avem relaţia de recurenţă

$$\frac{1}{n!1!}\varphi_1(z) + \frac{1}{(n-1)!2!}\varphi_2(z) + \dots + \frac{1}{2!(n-1)!}\varphi_{n-1}(z) + \frac{1}{1!n!}\varphi_n(z) = \frac{z^n}{n!}$$

sau

$$\sum_{\nu=1}^{n}\binom{(n+1)}{\nu}\varphi_\nu(z) = (n+1)z^n.$$

De aici reiese că $\varphi_n(z)$ este un polinom de gradul n, cu coeficienţi reali.

II. *Polinoamele lui Hermite-Cebîşev.* Sînt definite prin:

$$H_n(z) = \frac{1}{n!}e^{\frac{z^2}{2}}\frac{d^n}{dz^n}e^{-\frac{z^2}{2}}.$$

Primele sînt:

$$H_0 = 1, \quad H_1 = -z, \quad H_2 = \frac{1}{2}(z^2 - 1).$$
$$H_3 = \frac{1}{6}(-z^3 + 3z), \quad H_4 = \frac{1}{24}(z^4 - 6z^2 + 3), \dots$$

1) Putem scrie

$$\frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}e^{-\frac{z^2}{2}} = \frac{d^n}{dz^n}\left(-z\,e^{-\frac{z^2}{2}}\right) = \left(-n\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} - z\frac{d^n}{dz^n}\right)e^{-\frac{z^2}{2}}$$

(aplicînd regula lui Leibniz). Înmulţind cu $\frac{1}{n!}e^{\frac{z^2}{2}}$ obţinem relaţia de recurenţă:

$$(n+1)H_{n+1}(z) + zH_n(z) + H_{n-1}(z) = 0.$$

2) Derivînd relaţia de definiţie, avem:

$$H_n'(z) = \frac{e^{\frac{z^2}{2}}}{n!}\left(z\frac{d^n}{dz^n} + \frac{d^{n+1}}{dz^{n+1}}\right)e^{-\frac{z^2}{2}} = zH_n(z) + (n+1)H_{n+1}(z)$$

sau, ţinînd seamă de 1):

$$H_n'(z) = -H_{n-1}(z),$$

3) Din 1) şi 2) se deduce ecuaţia diferenţială liniară la care satisface $H_n(z)$:

$$H_n''(z) - zH_n'(z) + nH_n(z) = 0.$$

4) Avem pentru $m \geqslant n$; aplicînd relaţia de definiţie şi Leibnitz:

$$\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{z^2}{2}}H_m\right) = e^{-\frac{z^2}{2}}\left[n!H_mH_n - \right.$$

$$\left. -\binom{n}{1}(n-1)!\,H_{m-1}H_{n-1} + \ldots + (-1)^n H_{m-n}H_0\right],$$

sau

$$\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dz^n}\left(e^{-\frac{z^2}{2}}H_m\right) = e^{-\frac{z^2}{2}}\left(H_mH_n - \frac{1}{1!}H_{m-1}H_{n-1} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2!}H_{m-2}H_{n-2} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}H_{m-n}H_0\right).$$

5) Să punem

$$J_{m,n} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}H_m(z)H_n(z)\,dz.$$

Avem

$$J_{0,0} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \sqrt{2\pi},$$

$$J_{m,0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{m!}\frac{d^m}{dz^m}\left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)dz = 0 \quad m > 0.$$

Formula stabilită mai sus ne dă integrînd

$$J_{m,n} - \frac{1}{1!}J_{m-1,n-1} + \frac{1}{2!}J_{m-2,n-2} - \ldots + (-1)^n\frac{1}{n!}J_{m-n,0} = 0.$$

Urmează că, dacă $m > n$, $J_{m,n} = 0$. Într-adevăr, aceasta este adevărat pentru $m > 0$, $n = 0$ şi admiţînd că este adevărat pentru indicii $0, 1, \ldots, n-1$, va fi adevărat după formula precedentă şi pentru indicele n.

Dacă $m = n$, vom stabili prin inducție $J_{n,n} = \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}$. Aceasta se verifică pentru indicele 0 și fiind admis pentru indicele $n - 1$, vom avea după aceeași formulă:

$$J_{n,n} = \left(\frac{1}{1!\,(n-1)!} - \frac{1}{2!\,(n-2)!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n!}\right)\sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{1}{n!}\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{2} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n}\right]\sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{1}{n!}[1 - (1-1)^n]\sqrt{2\pi} = \frac{\sqrt{2\pi}}{n!}.$$

Așadar polinoamele lui Hermite satisfac relațiile de ortogonalitate

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} H_m(z)\, H_n(z)\, dz = \begin{cases} 0 & \text{pentru } m \neq n, \\ \dfrac{\sqrt{2\pi}}{n!} & \text{pentru } m = n. \end{cases}$$

6) Din relația de recurență rezultă (deoarece $H_0 = 1$, $H_1 = -z$) că H_n este un polinom de gradul n, cu coeficienți reali, al cărui prim coeficient este $(-1)^n \frac{1}{n!}$. De asemenea rezultă că $H_n = 0$ are numai rădăcini simple reale și separate de rădăcinile lui $H_{n-1} = 0$. (Aceasta fiind adevărat pentru H_0, H_1 și admis pentru $H_0, \ldots, H_n$, se vede că, dacă α și β sînt rădăcini consecutive ale lui H_n, ele dau polinomului H_{n+1} semne contrare, fiindcă dau lui H_{n-1} semne contrare.)

III. *Polinoamele lui Cebîșev.* Sînt definite prin

$$\frac{4 - t^2}{4 - 4tz + t^2} = \sum_0^\infty T_n(z) t^n.$$

1) Punînd pentru prescurtare $Z = \sqrt{z^2 - 1}$ avem

$$\frac{4 - t^2}{4 - 4tz + t^2} = \frac{1 - \frac{t^2}{4}}{2Z}\left(\frac{z + Z}{1 - \frac{t}{2}(z+Z)} - \frac{z - Z}{1 - \frac{t}{2}(z-Z)}\right) =$$

$$= \frac{1 - \frac{t^2}{4}}{2Z}\left\{z + Z + \frac{t}{2}(z+Z)^2 + \frac{t^2}{2^2}(z+Z)^3 + \ldots - \right.$$

$$\left. - (z - Z) - \frac{t}{2}(z-Z)^2 - \frac{t^2}{2^2}(z-Z)^3 - \ldots\right\},$$

deci, pentru $n > 0$,

$$2Z\,T_n(z)=\frac{1}{2^n}[(z+Z)^{n+1}-(z-Z)^{n+1}]-\frac{1}{2^n}[(z+F)^{n-1}-(z-Z)^{n-1}]=$$

$$=\frac{1}{2^n}(z+Z)^{n-1}[(z+Z)^2-1]-\frac{1}{2^n}(z-Z)^{n-1}[(z-Z)^2-1].$$

Aici

$$(z+Z)^2-1=2(z^2-1+zZ)=2Z(z+Z),$$
$$(z-Z)^2-1=2(z^2-1-zZ)=-2Z(z-Z).$$

Astfel

$$T_n(z)=\frac{1}{2^n}[(z+\sqrt{z^2-1})^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n] \quad (n>0).$$

Se vede că $T_n(z)$ este un polinom de gradul n cu coeficienți reali, conținînd numai termeni în z^{n-2k}. $T_0=1$.

2) De altfel, din

$$\arccos z=-\mathrm{i}\log(z+\sqrt{z^2-1}),$$

rezultă

$$T_n(z)=\frac{1}{2^n}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,n\arccos z}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,n\arccos z}),$$

adică

$$T_n(z)=\frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\arccos z) \quad (n>0).$$

3) Să construim o ecuație diferențială pentru $T_n(z)$. Observînd

$$(z+Z)'=\frac{z+Z}{Z},\quad (z-Z)'=-\frac{z-Z}{Z},$$

găsim

$$T_n'(z)=\frac{n}{2^n}\frac{(z+Z)^n-(z-Z)^n}{Z},$$

$$T_n''(z)=\frac{n^2}{2^n}\frac{(z+Z)^n+(z-Z)^n}{Z^2}-\frac{nz}{2^n}\frac{(z+Z)^n-(z-Z)^n}{Z^3}.$$

Rezultă că $T_n(z)$ satisface ecuația diferențială

$$(z^2-1)w''+zw'-n^2w=0$$

(cum se poate deduce și din expresia 2). Anume, cum arată expresiile lui $T_n(z)$ și $T_n'(z)$, integrala $T_n(z)$ a ecuației precedente este determinată prin condițiile inițiale

$$w(1)=\frac{1}{2^{n-1}},\quad w'(1)=\frac{n^2}{2^{n-1}},$$

sau numai prin condiția de a fi olomorfă în punctul critic $z = 1$ și de a lua valoarea $\frac{1}{2^{n-1}}$ în acest punct.

4) Punînd $z = 1 - 2\zeta$, ecuația diferențială ia forma

$$\zeta(\zeta - 1)\frac{d^2w}{d\zeta^2} + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)\frac{dw}{d\zeta} - n^2w = 0,$$

care este ecuația hipergeometrică

$$\zeta(\zeta - 1)w'' + [(\alpha + \beta + 1)\zeta - \gamma]w' + \alpha\beta w = 0$$

cu $\alpha = -n$, $\beta = n$, $\gamma = \frac{1}{2}$. Avînd în vedere condițiile inițiale de mai sus, care se scriu în variabila ζ: $w(0) = \frac{1}{2^{n-1}}$, $w'(0) = -\frac{2n^2}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}}\frac{\alpha\beta}{\gamma}$, urmează că

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} F\left(-n, n, \frac{1}{2}; \frac{1 - z}{2}\right).$$

5) Dacă, în formula de la 3) pentru T_n', aplicăm identitatea $a^n - b^n = (a - b)[(a^{n-1} + b^{n-1}) + ab(a^{n-3} + b^{n-3}) + \ldots]$, obținem:

$$\frac{1}{n} T_n' = T_{n-1} + \frac{1}{4} T_{n-3} + \frac{1}{4^2} T_{n-5} + \ldots$$

Scăzînd expresia analoagă a lui $\frac{1}{4(n-2)} T_{n-2}'$, avem încă

$$\frac{T_n'}{n} = T_{n-1} + \frac{1}{4}\frac{T_{n-2}'}{n-2}.$$

6) Din formula de la 4) se deduce, aplicînd un rezultat general relativ la $F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1 - z}{2}\right)$ (vezi IV):

$$T_n(z) = \frac{(-1)^n\sqrt{1 - z^2}}{2^{n-1}.1.3 \ldots (2n - 1)} \frac{d^n}{dz^n}(1 - z^2)^{n - \frac{1}{2}}.$$ [18]

Putem verifica această formulă prin inducție, cu ajutorul ultimei formule de la 5). Aceasta revine la identitatea:

$$(n-2)[Z_1(Z_1^{2(n-1)})^{(n+1)} - \frac{z}{Z_1}(Z^{2n-1})^{(n)}] =$$

$$= -2n(n-2)(2n-1)Z_1(Z_1^{2n-3})^{(n-1)} +$$

$$+ n(2n-1)(2n-3)\left[Z_1(Z_1^{2n-5})^{(n-1)} - \frac{z}{Z_1}(Z_1^{2n-5})^{(n-2)}\right]$$

[18]) De aici

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_m(x)\, T_n(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \begin{cases} 0 & m \neq n, \\ \dfrac{\pi}{2^{2n-1}} & m = n. \end{cases}$$

($Z_1 = \sqrt{1 - z^2}$), care se verifică cu ajutorul relației

$$(Z_1^m)^{(n)} = -m(zZ_1^{m-2})^{(n-1)} = -m(n-1)(Z_1^{m-2})^{(n-2)} - mz(Z_1^{m-2})^{(n-1)}.$$

Rămîne apoi să observăm că cei doi membri ai formulei au aceeași valoare pentru $z = \pm 1$.

7) Să considerăm ecuația $\frac{d^p}{dx^p}(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}} = 0$. Rădăcinile ei reale formează perechi opuse. Pentru $p = 0$, avem rădăcinile $x = \pm 1$; pentru $p = 1$, după teorema lui Rolle, încă o rădăcină intermediară, care este $x = 0$ (cum se verifică); pentru $p = 2$, rădăcinile $x = \pm 1$ și alte două în intervalele $(-1, 0)$, $(0, +1)$; etc. Se ajunge la concluzia că ecuația $T_n(x) = 0$ are toate rădăcinile reale distincte, formînd perechi opuse în intervalul $(-1; +1)$. Dacă n este impar, $x = 0$ este o rădăcină.

8) Aplicînd formula

$$(1+z)^n + (1-z)^n = 2F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, z^2\right),$$

unde înlocuim z cu $\frac{Z}{z}$, mai obținem

$$T_n(z) = \frac{1}{2^{n-1}} z^n F\left(-\frac{n}{2}, \frac{1-n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2-1}{z^2}\right).$$

9) O funcție $f(z)$, olomorfă în interiorul unei elipse E de focare ± 1, $t = \frac{1}{2}(ae^{i\theta} + a^{-1}e^{-i\theta})$, poate fi dezvoltată în serie de polinoame $T_n(z)$, astfel:

Plecăm de la $f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_E \frac{f(t)\,dt}{t-z}$ și utilizăm identitatea

$$\frac{1}{t-z} = (z^2-1)^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{1-(z+\sqrt{z^2-1})(t-\sqrt{t^2-1})} - \right. \tag{41}$$

$$\left. - \frac{1}{1-(z-\sqrt{z^2-1})(t-\sqrt{t^2-1})}\right).$$

Cele două funcții pot fi dezvoltate în serii geometrice dacă $|z \pm \sqrt{z^2-1}|\,|t-\sqrt{t^2-1}| < 1$. Or avem (pe E) $|t-\sqrt{t^2-1}| = a$ sau $\frac{1}{a}$ (după determinarea radicalului). (Vom lua determinarea pentru care $|t-\sqrt{t^2-1}| < 1$.) Prin ipoteză $f(z)$ este olomorfă atunci cînd punctul z este interior lui E (elipsa de focare ± 1 prin z este interioară elipsei E). Înlocuind integrandul prin diferența a două serii uniform convergente în E, găsim:

$$f(z) = \sum_1^\infty a_n T_n' \quad \text{cu} \quad a_n = \frac{2^{n-1}}{n\pi i}\int_E f(t)(t-\sqrt{t^2-1})^n\,dt$$

unde $|t - \sqrt{t^2-1}| < 1$. De altfel, integrandul fiind olomorf în interiorul elipsei minus tăietura $(-1, +1)$ și două cercuri de centre ± 1 (pe care integrala $\to 0$), avem

$$a_n = \frac{2^n}{n\pi i}\int_{-1}^{+1} f(x)(x - \sqrt{x^2-1})^n \, dx.$$

Schimbînd acum în (41) z cu t și transformînd prima fracție cu ajutorul identităților $(z - \sqrt{z^2-1})(z + \sqrt{z^2-1}) = 1$ și analoaga, avem

$$\frac{1}{t-z} = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\left(\frac{(z+\sqrt{z^2-1})(t-\sqrt{t^2-1})}{1-(z+\sqrt{z^2-1})(t-\sqrt{t^2-1})} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{1-(z-\sqrt{z^2-1})(t-\sqrt{t^2-1})}\right).$$

De aici dezvoltînd în serii geometrice și sumînd termenul de rang $n-1$ al primei serii cu cel de rang n al seriei a doua:

$$f(z) = \sum_0^\infty b_n T_n \quad \text{cu} \quad b_n = \frac{2^{n-1}}{\pi i}\int_E f(t)\frac{(t-\sqrt{t^2-1})^n}{\sqrt{t^2-1}}\,dt.$$

IV. 1) Să punem

$$F\left(\alpha+n,\ \beta+n,\ \gamma+n,\ \frac{1-z}{2}\right) = F_n(z). \quad (n \text{ întreg} \geqslant 0).$$

Vom demonstra:

$$\frac{d}{dz}[(1-z)^\gamma(1+z)^{\alpha+\beta-\gamma+1}F_1(z)] = -2\gamma(1-z)^{\gamma-1}(1+z)^{\alpha+\beta-\gamma}F \quad (F = F_0).$$

Avem:

$$\frac{d}{dz}\left[[(1-z)^\gamma(1+z)^{\alpha+\beta-\gamma+1}\left(1+\sum_1^\infty \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu)(\beta+1)\ldots(\beta+\nu)}{\nu!(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu)}\left(\frac{1-z}{2}\right)^\nu\right)\right] =$$
$$= -2\gamma(1-z)^{\gamma-1}(1+z)^{\alpha+\beta-\gamma}\left\{\frac{1}{2}(1+z) - \frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1-z}{2}\right)+\right.$$
$$+\sum_1^\infty \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu)(\beta+1)\ldots(\beta+\nu)}{\nu!(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu)}\left[\frac{\gamma+\nu}{2\gamma}\left(\frac{1-z}{2}\right)^\nu(1+z) - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{\alpha+\beta-\gamma+1}{\gamma}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\nu+1}\right]\right\}.$$

Punînd $1+z = 2\left(1-\frac{1-z}{2}\right)$, aceasta se scrie

$$= -2\gamma(1-z)^{\gamma-1}(1+z)^{\alpha+\gamma-\beta}\left\{1 - \frac{\alpha+\beta+1}{\gamma}\left(\frac{1-z}{2}\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_1^\infty \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu)(\beta+1)\ldots(\beta+\nu)}{\nu!(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu)}\left[\frac{\gamma+\nu}{\gamma}\left(\frac{1-z}{2}\right)^\nu - \frac{\alpha+\beta+\nu+1}{\gamma}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\nu+1}\right]\right\}.$$

Termenul în $\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\nu}$ are coeficientul (în acolade)

$$\frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu)(\beta+1)\ldots(\beta+\nu)}{\nu!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)} - \frac{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{(\nu-1)!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)}(\alpha+\beta+\nu) =$$

$$= \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+\nu-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+\nu-1)}{\nu!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+\nu-1)}.$$

Deci expresia din acolade este $F\left(\alpha, \beta, \gamma, \frac{1-z}{2}\right)$.

2) Observînd că în formula stabilită, factorul lui F_1, înmulţit cu $-2(\gamma+1)$, este factorul lui F din membrul al doilea corespunzător indicilor $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$, şi aplicînd din nou formula pentru aceşti indici, obţinem

$$\frac{d^2}{dz^2}[(1-z)^{\gamma+1}(1+z)^{\alpha+\beta-\gamma+2}F_2(z)] = 2^2\gamma(\gamma+1)(1-z)^{\gamma-1}(1+z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(z).$$

Etc. În general:

$$(-1)^n\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{\gamma+n-1}(1+z)^{\alpha+\beta-\gamma+n}F_n(z)] =$$

$$= 2^n\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)(1-z)^{\gamma-1}(1+z)^{\alpha+\beta-\gamma}F(z).$$

V. *Polinoamele lui Iacobi.* Sînt seriile hipergeometrice finite, de tipul precedent:

$$Q_n(z) = F\left(p+q+n+1, \quad -n, \quad p+1, \quad \frac{1-z}{2}\right) (n \text{ întreg} \geqslant 0, p, q \text{ reali}).$$

1) Aici $F_n = 1$ şi ultima formulă ne dă (luînd acolo $\alpha = p+q+n+1$, $\beta = -n$, $\gamma = p+1$):

$$Q_n(z) = \frac{(-1)^n(1-z)^{-p}(1+z)^{-q}}{2^n(p+1)\ldots(p+n)}\frac{d^n}{dz^n}[(1-z)^{p+n}(1+z)^{q+n}].$$

$Q_n(z)$ este un polinom de gradul n cu coeficienţi reali, care depinde încă de parametrii reali p, q, care se pun în evidenţă scriind $Q_n^{(p,q)}(z)$. Polinoamele lui Cebîşev sînt un caz particular, corespunzînd la $p = -\frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$ (avînd însă şi factorul $\frac{1}{2^{n-1}}$).

2) Polinomul $Q_n^{(p,q)}(z)$ este o integrală a ecuaţiei

$$\zeta(\zeta-1)\frac{d^2w}{d\zeta^2} + [(p+q+2)\zeta - (p+1)]\frac{dw}{d\zeta} - n(p+q+n+1)w = 0,$$

unde $\zeta = \frac{1-z}{2}$, deci a ecuaţiei în z:

$$(z^2-1)\frac{d^2w}{dz^2} + [(p+q+2)z + p - q]\frac{dw}{dz} - n(p+q+n+1)w = 0.$$

3) Ca şi pentru $T_n(z)$, se arată cu ajutorul teoremei lui Rolle că $Q_n^{p,q}(z)$ are toate rădăcinile reale, simple, în intervalul $(-1, +1)$.

4) Modificînd convenabil factorul numeric, se pot deduce aceste polinoame dintr-o funcţie generatoare. Anume, se pune

$$P_n^{p,q}(z) = \frac{(p+1)\dots(p+n)}{n!} Q_n^{p,q}(z) =$$

$$= \frac{(p+1)\dots(p+n)}{n!} F\left(p+q+n+1,\ -n,\ p+1,\ \frac{1-z}{z}\right).$$

Atunci avem

$$2^{p+q} \frac{1}{r} (1+r-t)^{-p} (1+r+t)^{-q} = \sum_0^\infty t^n P_n^{p,q}(z),$$

unde

$$r = \sqrt{1-2zt+t^2}.$$

Pentru a arăta că această relaţie defineşte polinoamele $P_n^{p,q}(z)$, vom dezvolta funcţia generatoare după t şi $\zeta = \frac{1-z}{2}$. O scriem

$$\varphi(t, z) = \frac{2^{p+q}}{r^{p+q+1}} \left(1 + \frac{1-t}{r}\right)^{-p} \left(1 + \frac{1+t}{r}\right)^{-q} =$$

$$= \frac{2^{p+q}}{r^{p+q+1}} \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^\mu \frac{(p+\mu-1)!}{\mu!(p-1)!} \left(\frac{1-t}{r}\right)^\mu \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{(q+\nu-1)!}{\nu!(q-1)!} \left(\frac{1+t}{r}\right)^\nu =$$

$$= 2^{p+q} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda}{r^{\lambda+p+q+1}} \sum_{\mu+\nu=\lambda} \frac{(p+\mu-1)!(q+\nu-1)!}{\mu!(p-1)!\nu!(q-1)!} (1-t)^\mu (1+t)^\nu =$$

$$= 2^{p+q} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda (1-t)^\lambda}{r^{\lambda+p+q+1}} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{(p+\mu-1)!(q+\lambda-\mu-1)!}{\mu!(p-1)!(\lambda-\pi)!(q-1)!} \left(\frac{1+t}{1-t}\right)^{\lambda-\mu}.$$

Avem apoi

$$\frac{1}{r^{p+q+1+\lambda}} = \left[(1-t)\sqrt{1+\frac{4t\zeta}{(1-t)^2}}\right]^{-(\lambda+p+q+1)} =$$

$$= (1-t)^{-(\lambda+p+q+1)} \sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^\sigma \frac{(\lambda+p+q+2\sigma-1)!}{2^\sigma \sigma!(\lambda+p+q)!} \left[\frac{4t\zeta}{(1-t)^2}\right]^\sigma.$$

Aşadar

$$2^{p+q} \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^\lambda (1-t)^{-(\lambda+p+q+1)} \left\{\sum_{\sigma=0}^{\infty} (-1)^\sigma \frac{(\lambda+p+q+2\sigma-1)!}{2^\sigma \sigma!(\lambda+p+q)!} \left[\frac{4t\zeta}{(1-t)^2}\right]^\sigma\right\} \times$$

$$\times \left[\sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{(p+\mu-1)!(q+\lambda-\mu-1)!}{\mu!(p-1)!(\lambda-\mu)!(q-1)!} (1-t)^\mu (1+t)^{\lambda-\mu}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P_n^{p,q}(z).$$

În membrul al doilea coeficientul lui $t^n\zeta^\sigma$ trebuie să fie

$$(-1)^\sigma \frac{(p+q)!}{n!p!} \cdot \frac{(p+q+n+\sigma)!n!p!}{(p+\sigma)!\sigma!(p+q+n)!(n-\sigma)!} \quad (\sigma \leqslant n),$$

adică

$$(-1)^\sigma \frac{(p+n)!(p+q+n+\sigma)!}{(p+\sigma)!\sigma!(p+q+n)!(n-\sigma)!}.$$

Avem deci de verificat:

$$2^{p+q} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{n-\sigma} \sum_{\mu=0}^{\lambda} \frac{(-1)^\lambda 2^\sigma (\lambda+p+q+2\sigma-1)!(\lambda+p+q+2\sigma-\mu+h)!}{(\lambda+p+q)!\,h!\,(\lambda+p+q+2\sigma-\mu)!} \times$$

$$\times \frac{(\lambda-\mu+\sigma+h-n+1)!(p+\mu-1)!(q+\lambda-\mu-1)!}{(n-h-\sigma)!(\lambda-\mu-1)!\,\mu!\,(p-1)!\,(q-1)!\,(\lambda-\mu)!} =$$

$$= \frac{(p+q+n+1)\ldots(p+q+n+\sigma)(p+\sigma+1)\ldots(p+n)}{(n-\sigma)!}$$

cu $n-\sigma-h \leqq h-\mu$.

5) Cu ajutorul formulei

$$P_n^{p+q}(z) = (-1)^n \frac{(1-z)^{-p}(1+z)^{-q}}{2^n n!} \frac{d^n}{dz^n}(1-z)^{p+n}(1+z)^{q+n}$$

se poate verifica relaţia de recurenţă:

$$(n+1)(p+q+n+1)(p+q+2n)P_{n+1}^{p,q}(z) -$$

$$-\frac{1}{2}(p+q+2n+1)[(p+q+2n+2)(p+q+2n)z+p^2-q^2]P_n^{p,q}(z) +$$

$$(p+n)(q+n)(p+q+2n+2)P_{n-1}^{p,q}(z) = 0.$$

6) De asemenea relaţiile:

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^p(1+x)^q P_n^{p,q}(x)P_m^{p,q}(x)\,dx = 0 \quad (m \neq n),$$

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^p(1+x)^q[P_n^{p,q}(x)]^2\,dx = \frac{2^{p+q+1}}{p+q+2n+1}\frac{\Gamma(p+n+1)\Gamma(q+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(p+q+n+1)}.$$

VI. *Polinoamele lui Legendre.* Sînt polinoamele lui Iacobi cu $p=q=0$ Le definim deci prin

$$\frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = \sum_0^\infty t^n P_n(z).$$

Proprietăţile lor se pot stabili prin calcule mai simple.

1) $$P_n(z) = F\left(n+1, -n, 1, \frac{1-z}{2}\right) = (-1)^n F\left(n+1, -n, 1, \frac{1+z}{2}\right)$$

(vezi exercițiul 12 de la § 82). Punînd $z = 1 - 2\zeta$, avem

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2zt + t^2}} = \left\{(1-t)^2\left(1 + \frac{4\zeta t}{(1-t)^2}\right)\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{1-t}\sum_{\nu=0}^{\infty}(-1)^\nu \frac{(2\nu)!}{2^{2\nu}(\nu!)^2}\left[\frac{4\zeta t}{(1-t)^2}\right]^\nu,$$

de unde

$$t^n P_n(z) = \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \frac{(2\nu)!\,2^\nu(n+\nu)!}{2^\nu(\nu!)^2(n-\nu)!(2\nu)!}\zeta^\nu t^n =$$

$$= t^n \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^\nu \frac{(n+\nu)!}{(\nu!)^2(n-\nu)!}\zeta^\nu$$

$$= t^n\left[1 + \sum_{\nu=1}^{n}\frac{(n+1)\ldots(n+\nu)}{\nu!}\,\frac{(-n)(-n+1)\ldots(-n+\nu-1)}{\nu!}\zeta^\nu\right]$$

$$= t^n F(n+1,\ -n,\ 1,\ \zeta).$$

2) $$(n+1)\,P_{n+1}(z) - (2n+1)z\,P_n(z) + n\,P_{n-1}(z) = 0.$$

Derivăm relația de definiție cu privire la t:

$$\frac{z-t}{\sqrt{1-2zt+t^2}} = (1 - 2zt + t^2)\sum_{1}^{\infty} n t^{n-1} P_n(z)$$

$$= P_1(z) + t[2\,P_2(z) - 2z\,P_1(z)] +$$

$$+ \sum_{2}^{\infty} t^n[(n+1)\,P_{n+1}(z) - 2nz\,P_n(z) + (n-1)\,P_{n-1}(z)].$$

Pe de altă parte

$$\frac{z-t}{\sqrt{1-zt+t^2}} = z\sum_{0}^{\infty} t^n P_n(z) - \sum_{0}^{\infty} t^{n+1} P_n(z)$$

$$= z\,P_0(z) + t[z\,P_1(z) - P_0(z)] + \sum_{2}^{\infty} t^n[zP_n(z) - P_{n-1}(z)].$$

Egalînd coeficienții lui t^n se obține relația de recurență.

3) Din V punctul 1) se deduce formula lui Rodrigues.

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dz^n}(z^2-1)^n.$$

4) De aici rezultă (dezvoltînd binomul și derivînd):

$$P_n(z) = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\left[z^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}z^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)}z^{n-4} - \ldots\right].$$

5) $$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = 0 \qquad (m \neq n),$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1},$$

mai general:

$$\int_{-1}^{+1} P_m^{(k)}(x) P_n^{(k)}(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ (-1)^k \dfrac{(n+k)!}{(n-k)!} \dfrac{2}{2n+1} & (m = n). \end{cases}$$

6) $$\int_{-1}^{+1} (1+x)^m P_n(x)\,dx = \frac{2^{n+1}(m!)^2}{(m-n)!(m+n+1)!} \quad m \geqslant n.$$

7) $$\int_{-1}^{+1} (1-kx)^{-n-\frac{1}{2}} P_{2n}(x)\,dx = \frac{1}{2n+1} k^n (1-k)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Toate aceste formule se demonstrează cu ajutorul formulei lui Rodrigues.

8) Din relaţia de definiţie rezultă

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dt}{t^{n+1}\sqrt{1-2zt+t^2}} \tag{42}$$

γ fiind un cerc mic cu centrul în O (vezi figura 165). Integrandul are punctele critice $\alpha = z - \sqrt{z^2-1}$, $\beta = z + \sqrt{z^2-1}$, distincte dacă $z \neq \pm 1$.

Dacă Γ este un cerc de centru O, care cuprinde punctele α şi β, integrandul este olomorf în interiorul lui Γ, din care s-a scos discul γ şi tăietura $\overline{\alpha\beta}$ cu discuri γ_α, γ_β în jurul lui α şi β. Deci $\int_\gamma = \int_\Gamma - \int_{\gamma_\alpha} + \int_{\overline{\alpha\beta}} - \int_{\gamma_\beta} \mp \int_{\overline{\beta\alpha}}$.

Cercul γ nu va intersecta tăietura dacă segmentul $\overline{\alpha\beta}$ nu trece prin O, adică dacă nu avem $\frac{\alpha}{\beta} < 0$. Însă

$$\frac{\alpha}{\beta} = (z - \sqrt{z^2-1})^2 = (z + \sqrt{z^2-1})^{-2} = \alpha^2 = \beta^{-2},$$

deci trebuie să excludem cazul cînd α şi β sînt pur imaginare, ceea ce înseamnă că z este pur imaginat sau nul (căci $\alpha + \beta = 2z$). Avem acum

$$\lim_{t\to\infty} t\varphi(t) = 0, \quad \lim_{t\to\alpha} (t-\alpha)\varphi(t) = 0, \quad \lim_{t\to\beta} (t-\beta)\varphi(t) = 0.$$

(deoarece $\alpha \neq \beta$). Astfel

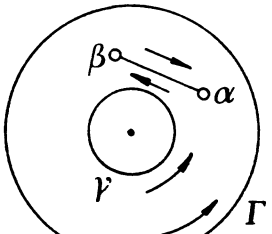

Fig. 165

$$P_n(z) = \pm \frac{1}{\pi i} \int_{\overline{\alpha\beta}} \frac{dt}{t^{n+1}\sqrt{1-2zt+t^2}}.$$

Segmentul $\overline{\alpha\beta}$ poate fi reprezentat parametric prin

$$t = z + \tau\sqrt{z^2-1} \qquad -1 \leq \tau \leq +1.$$

Obţinem astfel

$$P_n(z) = \pm \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{d\tau}{(z+\tau\sqrt{z^2-1})^{n+1}\sqrt{1-\tau^2}} \text{ (Laplace)},$$

unde trebuie să luăm semnul + pentru Re $z > 0$, fiindcă $P_n(1) = 1$ şi semnul — pentru Re$z < 0$, pentru că $P_n(-1) = (-1)^n$: Integrala are singu-

laritate pentru valorile lui z care fac $z + \tau\sqrt{z^2-1} = 0$ cu $-1 < \tau < 1$, adică $0 < \dfrac{z^2}{z^2-1} < 1$, adică z pur imaginar. Axa imaginară este o tăietură esențială pentru integrală, care este în restul planului o funcție olomorfă de z. Nu are influență alegerea determinării lui $\sqrt{z^2-1}$, deoarece schimbarea acesteia revine la schimbarea lui τ în $-\tau$. Mai putem scrie

$$P_n(z) = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{(z+\sqrt{z^2-1}\,\cos\theta)^{n+1}} \qquad (\tau = \cos\theta).$$

Să punem în (42) $\dfrac{1}{t}$ în loc de t; obținem

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{t^n\,dt}{\sqrt{1-2tz+t^2}} = \pm\frac{1}{\pi i}\int_{\overline{\alpha\beta}}\frac{t^n\,dt}{\sqrt{1-2tz+t^2}}$$

(tot pentru că integrandul este olomorf în Γ minus tăietura $\overline{\alpha\beta}$ și discurile γ_α, γ_β). De aici rezultă la fel

$$P_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1}(z+\tau\sqrt{z^2-1})^n\frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau^2}} \qquad \text{(Laplace)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(z+\sqrt{z^2-1}\,\cos\theta)^n\,d\theta$$

cu semnul $+$ fiindcă $P_n(1) = 1$.

9) Fie $z = \cos\varphi$, deci $\alpha = e^{i\varphi}$, $\beta = e^{-i\varphi}$ (vezi figura 166). Înlocuind segmentul $\overline{\alpha\beta}$ prin arcul $\widehat{\alpha\beta}$ cu centrul în O, avem

$$P_n(\cos\varphi) = -\frac{1}{\pi i}\int_{\widehat{\alpha\beta}}\frac{dt}{t^{n+1}\sqrt{1-2t\,\cos\varphi+t^2}}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\varphi}^{+\varphi}\frac{e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)i\theta}\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}} \qquad (0<\varphi<\pi).$$

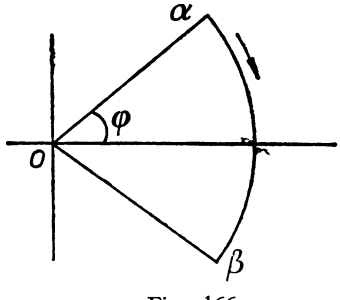

Fig. 166

(Am pus $t = e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$); sau

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\varphi}\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\theta-\cos\varphi)}} \qquad (0<\varphi<\pi).$$

Înlocuind φ și θ prin $\pi-\varphi$ și $\pi-\theta$, mai putem scrie:

$$P_n(\cos\varphi) = \frac{2}{\pi}\int_{\pi-\varphi}^{\pi}(-1)^n\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta\,d\theta}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\theta)}} \qquad (0<\varphi<\pi).$$

Acestea sînt integralele lui Mehler-Dirichlet.

VII. *Polinoamele lui Laguerre* (*generalizate*) sînt definite prin:

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{p+1}} = \sum_0^\infty t^n L_n^p(z) \qquad (p \text{ real}).$$

Pentru $p = 0$ avem polinoamele propriu-zise ale lui Laguerre, $L_n(z)$.

1) Avem

$$\frac{e^{-\frac{xt}{1-t}}}{(1-t)^{p+1}} = \sum_0^\infty (-1)^\nu \frac{z^\nu t^\nu}{\nu!(1-t)^{p+\nu+1}} =$$

$$\sum_{n=0}^\infty t^n \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{(p+n)!}{\nu!(n-\nu)!(p+\nu)!} z^\nu.$$

Astfel

$$L_n^p = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu \frac{(p+n)!}{\nu!(n-\nu)!(p+\nu)!} z^\nu.$$

$$L_0^p = 1,\ L_1^p = (p+1) - z,\ L_2^p = \frac{(p+1)(p+2)}{2} - (p+2)z + z^2, \ldots,$$

2) Cu ajutorul dezvoltării 1) se verifică ușor că $L_n^p(z)$ satisface ecuația diferențială

$$z w'' + (p + 1 - z)w' + nw = 0.$$

3) Apoi se verifică relația de recurență:

$$(n+1) L_{n+1}^p(z) + (z - p - 2n - 1) L_n^p(z) = (p+n) L_{n-1}^p(z) = 0.$$

4) $$L_n^p(z) = \frac{1}{n!} e^z z^{-p} \frac{d^n}{dz^n} z^{p+n} e^{-z}.$$

Se verifică derivînd cu ajutorul formulei lui Leibnitz.

5) De aici se deduce

$$\int_0^\infty x^p e^{-x} L_n^p(x) L_m^p(x)\, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m, \\ \dfrac{\Gamma(p+n+1)}{n!} & n = m. \end{cases}$$

§ 91. Indicatorul logaritmic

Teorema 1. *Fie $f(z)$ meromorfă în domeniul $\mathfrak{D}$ simplu conex și $C \subset \mathfrak{D}$ o curbă Jordan rectificabilă închisă care nu trece prin nici un zero sau pol; N_0 și N_∞ număeul zerorilor și polilor funcției în domeniul $D \subset \mathfrak{D}$ mărginit de C. Atunci avem, socotind zerourile și polii cu multiplicitățile lor:*

(43) $$N_0 - N_\infty = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz \qquad (Cauchy),$$

C fiind parcurs în sens pozitiv față de D.

Această integrală se numește *indicator logaritmic* pentru domeniul **D**. Demonstrația se bazează pe formula (6). Integrandul nu poate avea în **D** alte puncte singulare decît zerourile lui f și polii lui f, căci în celelalte puncte f și f' fiind olomorfe și $f \neq 0$, $\frac{f'}{f}$ este regulat. Într-un zero α de ordin m avem

$$f(z) = (z - \alpha)^m g(z) \qquad g(\alpha) \neq 0,\ g \text{ olomorf},$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - \alpha} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

Cum termenul al doilea este olomorf, avem un pol simplu și $R(\alpha) = m$. Într-un pol β de ordin p

$$f(z) = (z - \beta)^{-p} h(z), \qquad h(\beta) \neq 0,\ h \text{ olomorf},$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-p}{z - \beta} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Avem iarăși un pol simplu și $R(\beta) = -p$. Așadar, cum zerourile și polii lui f sînt în număr finit (altfel am avea puncte singulare esențiale pe C) putem aplica (6):

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \Sigma m - \Sigma p = N_0 - N_\infty.$$

Demonstrația se completează la fel cînd $D \supset \infty$. Atunci vom aplica (6') cu $\omega_1 = \int_C f\, dz$ și va trebui să calculăm și $R(\infty)$. Avem, dacă ∞ este zero de ordin m: $f(z) = z^{-m} g\left(\frac{1}{z}\right)$, $g(0) \neq 0$, g olomorf în U_∞; $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{-m}{z} - \frac{1}{z^2}\frac{g'}{g}$ de unde se vede că $R(\infty) = m$. La fel cazul unui pol.

Observație. Teorema se aplică și la domenii oarecare, cînd C este o sumă de curbe simple închise, în număr finit, ce limitează un domeniu $D \subset \mathfrak{D}$. Integrala este luată în sens direct față de D.

Corolar (*generalizare*). *În condițiile teoremei, dacă $f(z)$ nu ia valoarea λ (în loc de 0) pe C și N_λ este numărul punctelor unde $f(z) = \lambda$ (socotit cu multiplicitatea lor),*

$$N_\lambda - N_\infty = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z) - \lambda}\, dz$$

Se aplică teorema funcției $f(z) - \lambda$.

Aplicație. Fie $f(z)$ un polinom de grad p. El are numai polul ∞ de ordin p (partea principală fiind chiar $f(z)$). Dacă C este un cerc ce nu trece prin nici un zero, aplicînd teorema interiorului și exteriorului lui C, avem

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_0', \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{-C} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = N_0'' - p,$$

de unde $N_0' + N_0'' = p$: *aceasta este teorema fundamentală a algebrei.*

Se poate raționa și astfel: deoarece $\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$, există un cerc C în exteriorul căruia $|f(z)| > M > 0$ și toate zerourile sînt în C. $N_0 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'\,dz}{f}$. Se vede apoi că reziduul integrandului în ∞ (egal prin definiție cu $-N_0$) este $-p$.

În același mod se găsește pentru o funcție rațională (meromorfă în tot planul lui Gauss): $N_0 = N_\infty$ — numărul zerourilor este egal cu al polilor (unii și ceilalți fiind socotiți cu multiplicitățile lor); ceea ce se vede ușor și direct.

Teorema 2. *În condițiile teoremei 1 și notînd* $m = \min |f(z)|$ *pe* C, $M = \max |f(z)|$ *pe* C, *funcția* $f(z)$ *ia în* N_0 *puncte din* D *orice valoare* λ *cu* $|\lambda| < m$ *și în* N_∞ *puncte din* D *orice valoare* μ *cu* $|\mu| > M$. *Aceste puncte sînt distincte cu excepția unui număr finit de valori* λ *respectiv* μ.

Într-adevăr: Dacă $|\lambda| < m' < m$, $N_\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)\,dz}{f(z)-\lambda} + N_\infty$, integrandul fiind o funcție continuă de z și λ în C și în discul închis $|w| \leqslant m'$ din planul (w) unde variază λ, atunci N_λ este continuă în discul închis $|w| \leqslant m'$ (§77, teorema 22). Cum N_λ este un număr întreg, N_λ = constant $= N_0$. În N_λ fiecare zero al lui $f(z) - \lambda$ figurează cu multiplicitatea lui. Dacă aceasta este > 1, avem $f'(\lambda) = 0$ (§ 81, teorema 5). Or $f'(z)$ fiind meromorfă în $\bar{D}$ (§ 88, punctul 2, d) nu poate avea decît un număr finit de zerouri (§ 88, teorema 1, corolarul 2).

Pentru a demonstra cealaltă afirmație a teoremei, vom aplica rezultatul precedent funcției $\frac{1}{f(z)}$ care este meromorfă în $\bar{D}$ și atinge minimul $\frac{1}{M}$ pe C. (Se va observa că un zero de multiplicitate p pentru $\left(\frac{1}{f}\right)$ este un pol de aceeași multiplicitate pentru f (vezi caracterizarea I pentru polii de ordin p de la § 87).

Corolarul *1. În condițiile teoremei* 1, *există un* $\varepsilon > 0$ *astfel că numărul punctelor distincte din* D, *unde* $f(z)$ *ia o valoare* λ *cu* $0 < |\lambda| < \varepsilon$ *este egal cu* N_0. *Cu alte cuvinte numărul zerourilor în* D (*socotite cu multiplicitatea lor*) *este egal cu numărul punctelor unde* $f(z)$ *ia o valoare* λ *de modul destul de mic.*

La fel, numărul polilor din D (*socotiți cu multiplicitățile lor*) *este egal cu numărul punctelor unde* $f(z)$ *ia o valoare* μ *de modul destul de mare.*

Corolarul 2. *În vecinătatea unui zero* (*pol*) α *de ordin* p, *o funcție ia o valoare diferită de* 0 (∞) *de modul destul de mic* (*mare*) *exact de* p *ori*; *și reciproc.*

Aplicînd aceasta funcției $f(z) - w_0$ avem rezultatul mai general: dacă $f(z)$ ia în z_0 valoarea w_0 cu multiplicitatea p (adică $f(z) - w_0$ are un zero de multiplicitate p în z_0; sau dacă $w_0 = \infty$, z_0 fiind pol de ordin p al lui f) atunci $f(z)$, ia o valoare $w \in V_{w_0}$ în p puncte distincte din $U_{z_0} \supset f^{-1}(V_{w_0})$.

Urmează că funcția inversă $z = \varphi(w)$ are p determinări (ramuri), care în V_{w_0} iau valori din U_{z_0}. Astfel, cele p determinări nu se pot separa în vecinătatea lui w_0 dacă $p > 1$: *w_0 este punct critic* pentru $\varphi(w)$, și anume *punct critic algebric de ordin* p. Punctele de acest fel sînt punctele regulate unde $f'(z) = 0$ și polii de ordin >1. (Vom reveni).

Teorema 3. (*Rouché*). *Fie* $f(z)$, $g(z)$ *funcții meromorfe în domeniul* $\mathfrak{D}$, *continue în* $\mathfrak{D}$, *iar pe* fr $\mathfrak{D}$ *finite și verificînd condiția* $|g(z)| < |f(z)|$. *Atunci,*

dacă $N_0, N_\infty, N'_0, N'_\infty$ *reprezintă numărul zerorilor şi polilor funcţiilor* $f(z)$ *şi* $f(z) + g(z)$ *în* $\mathfrak{D}$ *,avem*

$$N'_0 - N'_\infty = N_0 - N_\infty.$$

Din cauza continuităţii pe fr $\mathfrak{D}$, putem ataşa fiecărui punct frontieră un disc V_z astfel că în $V_z \cap \overline{\mathfrak{D}}$, să avem

$$|g(z)| < |f(z)| < M \text{ (fix)}. \tag{44}$$

Razele acestor discuri au un minimum $\rho > 0$,[19] toate punctele din $\mathfrak{D}$ la distanţă $< \rho$ de fr $\mathfrak{D}$ vor satisface deci condiţia (44).

Considerăm mulţimea închisă $\mathfrak{D} - \Delta = \bar{D}$, unde Δ este reuniunea discurilor de rază ρ cu centrele pe fr $\mathfrak{D}$. Ea poate fi acoperită cu o reuniune finită de domenii poligonale distincte, situate într-o $\frac{\rho}{2}$ — vecinătate a sa. Aceste domenii şi frontierele lor sînt distincte de fr $\mathfrak{D}$ (astfel un punct din fr $\mathfrak{D}$ ar fi la o distanţă $< \rho$, de un punct din $\bar{D}$, adică discul de rază ρ al acelui punct ar conţine punctele din $\bar{D}$); deci domeniile poligonale şi frontierele lor sînt în $\mathfrak{D}$, iar frontierele lor în $\mathfrak{D} - \overline{\Delta}$.

Zerourile şi polii funcţiilor f şi $f + g$ sînt în $\bar{D}$ (neputînd fi în Δ, unde avem (44)). Ei sînt în număr finit (§ 88, teorema 1, corolarul 2). Fie P_k domeniile poligonale care conţin asemenea puncte. Cum fr $P_k \subset \Delta$ condiţiile (44) sînt satisfăcute pe fr P_k. Rămîne să demonstrăm teorema pentru fiecare P_k (fiecare zero sau pol fiind într-un singur P_k). Aşadar, putem presupune f, g meromorfe în $\overline{\mathfrak{D}}$ limitat de curbe simple, închise (poligoane) pe care sînt satisfăcute celelalte condiţii ale teoremei.

Avem

$$N_0(f) - N_\infty(f) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'\,dz}{f},$$

$$N_0(f+g) - N_\infty(f+g) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'+g'}{f+g}\,dz,$$

C fiind ansamblul contururilor, descrise în sens direct faţă de $\mathfrak{D}$. Cum

$$\int_C \frac{f'+g'}{f+g}\,dz = \int_C \frac{f'\,dz}{f} + \int_C \frac{d}{dz}\log\left(1+\frac{g}{f}\right)dz,$$

avem de arătat că ultima integrală este nulă. Vom forma ca mai sus mulţimea Δ cu aceleaşi proprietăţi, pentru $C = \text{fr}\,\mathfrak{D}$, şi luînd ρ destul de mic, putem presupune Δ conţinut într-un domeniu unde f şi g sînt meromorfe.

---

[19] În general: Să presupunem că o proprietate α) relativă la mulţimi de puncte este *ereditară*, adică este astfel că dacă mulţimea A are o proprietate α), atunci şi orice mulţime $B \subset A$ are de asemenea proprietatea α). Fie F o mulţime închisă şi $r(z)$ raza celui mai mare disc V_z care are proprietatea α). Dacă funcţia $r(z) > 0$ în F, ea are un minimum $\rho > 0$. În cazul contrar, vor exista în F o infinitate de puncte cu $r(z_n) \to 0$, care vor avea un punct limită ζ. Prin ipoteză, un disc V_ζ de rază $r(\zeta) > 0$ are proprietatea α). Discul V'_ζ de rază $\frac{1}{2}\,r(\xi)$ va conţine puncte z_n cu $r(z_n) < \frac{1}{2}\,r(\xi)$. Or pentru aceste puncte avem discuri V_{z_n} de rază $\frac{1}{2}\,r(\zeta)$ care fiind conţinute în V_ζ, au proprietatea α), astfel că $r(z_n) \geqslant \frac{1}{2}\,r(\zeta)$. Tot aşa se vede că $r(z)$ este continuă în F.

Atunci, $w = 1 + \frac{g}{f}$ este în discul $|w - 1| < 1$, deci funcția w este olomorfă în Δ și log w poate fi determinat acolo ca funcție uniformă și deci olomorfă. Rezultă că integrala considerată este nulă (§ 73, teorema 11).

Corolarul 1. *În condițiile teoremei, dacă f și g sînt olomorfe în $\mathfrak{D}$*

$$N_0(f) = N_0(f + g).$$

Corolarul 2. *Dacă f este meromorfă în $\mathfrak{D}$, continuă pe $\overline{\mathfrak{D}}$, iar pe* fr $\mathfrak{D}$ *este finită și $|f| > m > 0$, avem în $\mathfrak{D}$, pentru orice $\lambda < m$*

$$N_0 = N_\lambda. \quad (N_\infty(f) = N_\infty(f - \lambda)).$$

În aceleași condiții dacă $f \neq 0$ și $|f| < M$ pe fr $\mathfrak{D}$, *avem $N_\infty = N_\mu$ în $\mathfrak{D}$ pentru $\mu > M$.*

$\left(\text{Se aplică rezultatul funcției } \frac{1}{f}\right)$.

Corolarul 3. *Dacă luăm discul V_{z_0} astfel ca $f(z) \neq w_0$, ∞ în $V_{z_0} - z_0$ (zerourile și polii fiind puncte izolate), atunci condițiile corolarului 2 sînt verificate pentru orice $U_{z_0} \subset V_{z_0 - z_0}$.*

Reciproc, dacă $f(z)$ are un punct regulat sau pol în z_0, și, pentru orice U_{z_0} suficient de mică, ia în p puncte distincte din vecinătatea U_{z_0} valori din $(U_{w_0} = f(U_{z_0})$ atunci $f(z)$ ia valoarea $w_0 = f(z_0)$ în z_0 cu multiplicitatea p.

Observație. Ipoteza noastră înseamnă în cazul $w_0 \neq \infty$ (punct regulat), că $f(z) - w_0$ are pe z_0 ca zero de ordin p, deci avem într-o vecinătate V_{z_0}, cînd $z_0 \neq \infty$:

$f(z) = w_0 + (z - z_0)^p h(z)$, $h(z_0) \neq 0$, $h(z)$ olomorfă,
sau, cînd $z_0 = \infty$

$$f(z) = w_0 + z^{-p} h\left(\frac{1}{z}\right), \quad h(0) \neq 0, \quad h\left(\frac{1}{z}\right) \text{ olomorfă.}$$

Derivata $f'(z)$ are atunci pe $z_0 \neq \infty$ ca zero de ordin $p - 1$, dacă $p > 1$. iar pe $z_0 = \infty$ ca zero de ordin $p + 1$[20]. În cazul $z_0 \neq \infty$ și $p = 1$, $f'(z_0) \neq 0$.

Dacă z_0 este un pol de ordin p se vede la fel (luînd în formulele precedente $w_0 = 0$ și $-p$ în loc de p), că $f'(z)$ are pe $z_0 \neq \infty$ ca pol de ordin $p + 1$, pe $z_0 = \infty$ ca pol de ordin $p - 1$, cu excepția cazului $z_0 = \infty$, $p = 1$, cînd ∞ nu este nici pol nici zero pentru f (∞ este punct regulat pentru f' și $f'(\infty) \neq 0$).

Să reținem de aici că o funcție olomorfă într-un domeniu poate lua o valoare cu o multiplicitate > 1 numai în punctele unde $f'(z) = 0$ (ceea ce este adevărat și în cazul $z = \infty$, căci dacă f este olomorfă în acest punct f' îl are ca zero de ordin mai mare decît f).

§: 92. Aplicație la transformarea domeniilor prin funcții de o variabilă complexă

Teorema 1. *Dacă funcția $f(z)$ este olomorfă într-o vecinătate V_{z_0}, cu excepția eventuală a unui pol în z_0, la punctele $z \in V_{z_0}$ ea face să corespundă o mulțime de puncte $w = f(z)$ care are pe $w_0 = f(z_0)$ ca punct interior.*

[20] Amintim că am convenit să considerăm funcțiile modificate. Astfel, în ∞, $f(z)$ nefiind definit, ar trebui să spunem: $\lim_{z \to \infty} z^{p+1} f(z)$ finit și diferit de zero.

Am mai dedus această teoremă din teorema funcţiilor implicite a analizei reale, însă cu restricţiile $f'(z) \neq 0$ şi $f(z_0) \neq \infty$. Demonstraţia ce urmează se sprijină pe corolarul 3 al teoremei lui Rouché. El ne spune că există o vecinătate V_{w_0} (corespunzătoare la V_{z_0}), în care orice punct w este o valoare luată de $f(z)$ în V_{z_0}; deci mulţimea considerată în enunţ conţine V_{w_0}, adică are pe w_0 ca punct interior).

Observaţie. Dacă $f(z)$ ia valoarea w_0 în z_0 cu o multiplicitate $p > 1$, $f(z)$ ia orice valoare din V_{w_0} în p puncte din vecinătatea corespunzătoare V_{z_0} şi oricît de mică ar fi V_{z_0} există o vecinătate V_{w_0} cu această proprietate. Funcţia inversă $z = F(w)$ va fi deci multiformă, luînd în V_{w_0} p valori din V_{z_0};[20] aceste determinări ale funcţiei inverse nu pot fi separate în vecinătatea lui w_0, ele sînt amestecate în aceeaşi vecinătate V_{z_0}, oricît ar fi de mică această vecinătate. Se zice atunci că w_0 este un punct *critic algebric* (*punct de ramificare algebrică*) *de ordin p*, pentru $F(w)$.

După cum am văzut (§ 91, ultima observaţie), asemenea puncte apar numai acolo unde $f'(z) = 0$, sau cînd $z = \infty$, dacă acesta este zero de ordin > 2 al lui $f'(z)$, sau încă în polii de ordin > 1 ai lui $f(z)$.

Mai multe puncte critice algebrice se pot suprapune în acelaşi w_0. Dacă valoarea w_0 este luată de $f(z)$ în punctele $z_0, z_1, \ldots$ cu multiplicităţile $p_0, p_1, \ldots$, atunci avem în w_0 puncte critice de ordin $p_0, p_1, \ldots$, suprapuse.

Teorema 2. *Dacă $f(z)$ este meromorfă în domeniul D, valorile $w = f(z)$ formează un domeniu.*

Evident mulţimea $E = f(D)$ este deschisă şi conexă, transformarea f fiind continuă (teorema 3 § 60).

Corolarul 1. *Dacă $f(z)$ este meromorfă în domeniul D şi continuă în închiderea sa $\bar{D}$ din planul lui Gauss, valorile $w = f(z)$ pentru $z \in \bar{D}$ formează închiderea $\bar{E}$ în planul lui Gauss a unui domeniu E şi punctele* fr *E corespund la punctele din* fr *D.*

$\bar{D}$ este compact în planul lui Gauss $\bar{C}$ şi se aplică teoremele 1, 2 § 57 şi teorema 3, § 60.

În ce priveşte corespondenţa punctelor frontieră, vom da deocamdată.

Teorema 3. *Dacă $f(z)$ e olomorfă pe curba simplă rectificabilă C şi în int C, şi duce C într-o curbă simplă C din planul (w), atunci corespondenţa conformă $w = f(z)$ este biunivocă între int C şi int C'.*

Deoarece int C este transformat de f într-o mulţime deschisă, există puncte în int C care nu sînt duse în puncte pe C' (care nu are puncte interioare). Fie ζ un asemenea punct şi $\lambda = f(\zeta)$. Integrala $N_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(t)}{f(t) - \lambda} dt$ ne dă numărul punctelor din int C unde $f(z)$ ia valoarea λ. N_λ este continuă în λ şi deci rămîne constantă în domeniul E, determinat de C', unde se găseşte punctul λ. (Căci în acel domeniu $f(t) - \lambda \neq 0$ pe C — întrucît $f(t)$ este pe C'). Pe de altă parte putem scrie $N_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{dw}{w - \lambda}$ şi astfel $2\pi i\, N_\lambda$ este variaţia lui $\log(w - \lambda)$, pe C' sau rotaţia $(C', \lambda) = 2\pi N_\lambda$. Cum C' este curbă simplă închisă şi $N_\lambda > 0$, avem $(C', \lambda) = 2\pi$ (în ext C' ar fi $= 0$), deci $N_\lambda = 1$: corespondenţa int $C \to$ int C' este biunivocă).

[21] $F(w)$ poate lua mai mult de p valori: dacă z_1 este alt punct în care $f(z_1) = w_0$, $F(w)$ va lua valori şi într-o vecinătate V_{z_1}. Aceste determinări se pot însă separa de primele, luînd V_{z_1} distinctă de V_{z_0}.

§ 93. Principiul variației argumentului

1. Cele ce urmează sînt aplicații teoretice ale teoriei reziduurilor (și prin urmare, ale teoremei fundamentale a lui Cauchy).

Fie $f(z)$ meromorfă în domeniul $\mathfrak{D}$ și olomorfă pe fr $\mathfrak{D}$ — sau pe scurt, meromorfă în $\overline{\mathfrak{D}}$. Numărul punctelor din $\mathfrak{D}$, unde $f(z)$ ia o valoare dată, $f(z) = w$, este finit. Acest număr, în care fiecare zero al funcției $f(z) - w$ este socotit cu o multiplicitate egală cu ordinul său, se va nota cu N_w. Vom nota încă cu N_∞ numărul polilor lui $f(z)$ în $\mathfrak{D}$, socotit în același mod.

Lemă. *Dacă $f(z)$ are în $z = \alpha$ (finit sau nu) un zero sau pol de ordin m, $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ are în α reziduul m respectiv $-m$; dacă α este un zero sau pol la distanță finită, el este pol simplu pentru $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$.*

În cazul unui zero α, finit, de ordin m, avem

$$f(z) = (z - \alpha)^m \varphi(z)$$

într-o vecinătate V_α cu $\varphi(z)$ olomorfă și diferită de zero în V_α. De aici

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - \alpha} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \text{ în } V_\alpha - \alpha.$$

Cum $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ este olomorfă în V_α, funcția $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$ are în α, partea principală $\dfrac{m}{z - \alpha}$ și reziduul m. Dacă α este pol de ordin m, nu avem decît să schimbăm pe m cu $-m$ în cele de mai sus. Fie acum $\alpha = \infty$. Dacă acest punct este regulat și $f(\infty) \neq 0$, avem într-o vecinătate V_∞

$$f(z) = a_0 + \sum_1^\infty a_n z^{-n}, \quad f'(z) = -\sum_1^\infty n a_n z^{-n-1} = \frac{1}{z^2}\varphi(z),$$

cu $\varphi(z)$ regulat; deci $\dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{1}{z^2}\dfrac{\varphi(z)}{f(z)}$, care arată că ∞ este zero de ordinul cel puțin 2, pentru această funcție, și deci reziduul ei este nul. Cînd ∞ este zero de ordin m pentru $f(z)$, putem scrie într-o vecinătate V_∞

$$f(z) = z^{-m}\varphi(z)$$

cu $\varphi(z)$ olomorfă și diferită de zero; deci

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = -\frac{m}{z} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}.$$

unde $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$, după cum am văzut, are un zero de ordin $\geqslant 2$. Deci singurul termen în $\dfrac{1}{z}$ fiind $-\dfrac{m}{z}$, reziduul este m. Schimbînd pe m în $-m$ obținem cazul polului de ordin m.

Teorema 1. *Fie $\mathfrak{D}$ un domeniu (mărginit sau nu), limitat de curba simplă, închisă, rectificabilă C; $\varphi(z)$ olomorfă în $\overline{\mathfrak{D}}$; $f(z)$ meromorfă în $\overline{\mathfrak{D}}$ și $f(z) \neq 0$ pe C. Dacă $f(z)$ are, în $\mathfrak{D}$, zerourile α_n de ordine μ_n și polii β_k de ordin ν_k, avem:*

$$\sum_h \mu_h \varphi(\alpha_h) - \sum_k \nu_k \varphi(\beta_k) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \varphi(z) \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz \tag{45}$$

C fiind parcursă în sens direct față de $\mathfrak{D}$.

Într-adevăr, integrandul este olomorf în toate punctele din $\overline{\mathfrak{D}}$ diferite de α_h și β_k, iar în acestea are, după lema precedentă, și un rezultat cunoscut, reziduurile

$$\operatorname{Re}(\alpha_h) = \mu_h \varphi(\alpha_h), \quad \operatorname{Re}(\beta_k) = \nu_k \varphi(\beta_k).$$

Regula pentru calculul reziduului funcție $\varphi(z) \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ se aplică și la ∞, cum se vede din dezvoltările în serie.

Exemple 1. *Dacă $\varphi(z)$ este întreagă și $f(z) = \sin \pi z$,*

$$\sum_{-n}^{n} \varphi(h) = \frac{1}{2i} \int_{C_n} \varphi(z) \operatorname{ctg} \pi z \, dz$$

C_n fiind cercul $|z| = n + \dfrac{1}{2}$.

2. *În cazul $\varphi(z) = 1$, teorema de mai sus devine:*

$$N_0 - N_\infty = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \, dz, \tag{46}$$

sub aceleași condiții. Căci, cu notația introdusă, $N_0 = \sum_h \mu_h$, $N_\infty = \sum_k \nu_k$.

2. *Fie $f(z)$ un polinom de gradul n. În exteriorul unui cerc pe care $f(z) \neq 0$, avem $N_\infty = n$ (∞ fiind de ordin n), iar în interior $N'_\infty = 0$. Scriind relațiile pentru domeniile determinate de cerc, și adunîndu-le, obținem $N_0 + N'_0 = n$, adică teorema lui D'Alembert.*

3. *Aplicînd la fel formula (46) unei funcții raționale, se vede că $N_w = N_\infty$, în tot planul lui Gauss.* Acest număr se numește *ordinul* funcției raționale.

Cazul particular (46) al teoremei precedente mai poate fi formulat astfel:

Teorema 2. *Dacă $f(z)$ este meromorfă în domeniul $\overline{\mathfrak{D}}$ limitat de curba simplă, închisă și rectificabilă C, și $f(z) \neq 0$ pe C, avem*

$$N_0 - N_\infty = \frac{1}{2\pi} [\arg f(z)]_C, \tag{46'}$$

în membrul al doilea figurînd variația argumentului lui $f(z)$, urmărit prin continuitate de-a lungul curbei C, în sensul direct față de $\mathfrak{D}$.

Din cauza simplității acestei teoreme și numeroaselor ei aplicații, ea poartă numele de *„principiul variației argumentului"*.

Observîndu-se că $\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \log f(z)$ pe curba C (unde $f(z) \neq 0$), formula (46') va urma din (46) în virtutea unei teoreme cunoscute [22], dacă putem împărți curba C în arce ce se pot acoperi cu domenii în care determinările funcției primitive $\log f(z)$ sînt uniforme; căci atunci, deoarece $\log f(z) = \log |f(z)| + \mathrm{i} \arg f(z)$, vom avea aplicînd teorema evocată:

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} \mathrm{d}z = [\log |f(z)|]_C + \mathrm{i}[\arg f(z)]_C;$$

și cum $[\log |f(z)|]_C = 0$ (fiindcă $\log |f(z)|$ este uniformă pe C), va rezulta formula (46).

Deoarece $f(z)$ este continuă și diferită de zero pe C,

$$\min_C |f(z)| = m > 0.$$

Prin ipoteză, $f(z)$ este meromorfă într-un domeniu $\mathfrak{D}_1$, care conține în interior curba C și nu cuprinde alți poli ai funcției decît cei din $\mathfrak{D}$. Dacă scoatem din $\mathfrak{D}_1$ cercuri cu centrele în poli și conținute în $\mathfrak{D}$, obținem un domeniu închis $\overline{\Delta}$, care conține curba C în interior și în care $f(z)$ este olomorfă. În virtutea continuității uniforme, va exista un număr μ astfel că $|f(z) - f(z')| < m$ pentru $|z - z'| < \mu$. Să împărțim curba rectificabilă C în arce consecutive, de lungime $< \mu$. Dacă $\overset{\frown}{\zeta_k \zeta_{k+1}}$ este un asemenea arc și ζ un punct oarecare al său, avem $|\zeta - \zeta_k| < \mu$ (o coardă fiind $\leqslant$ lungimea arcului). Deci discul Γ_k: $|z - \zeta_k| < \mu$ va conține arcul $\overset{\frown}{\zeta_k \zeta_{k+1}}$. În Γ_k avem

$$|f(z) - f(\zeta_k)| < m \leqslant |f(\zeta_k)|.$$

Cu alte cuvinte, cînd z descrie Γ_k, punctul $w = f(z)$ rămîne în cercul de centru $w_k = f(\zeta_k)$ și rază $|w_k|$; or de aici rezultă că în Γ_k determinările funcției $\log w = \log f(z)$ sînt uniforme și prin urmare olomorfe. Așadar am împărțit curba C în arce acoperite de cercurile Γ_k, în care determinările lui $\log f(z)$ sînt olomorfe; cu aceasta teorema este demonstrată.

Observația. 1. Se mai poate spune că $N_0 - N_\infty$ este egal cu numărul *ocolurilor* pe care le face punctul w (sau mai bine vectorul $\overrightarrow{Ow}$) în jurul originei, atunci cînd z descrie curba C în sensul direct față de $\mathfrak{D}$. Căci $\arg w$ variind continuu de la θ_0 la $\theta_0 + 2k\pi$ ($k = N_0 - N_\infty$), va trebui să treacă prin valorile intermediare $\theta_0 + 2\pi, \ldots, \theta_0 + 2(k-1)\pi$.

Observația 2. Teoremele precedente sînt aplicabile și unui domeniu multiplu conex a cărui frontieră C este formată din curbe simple, închise și rectificabile, parcurse în sensul direct față de domeniu. Căci teoria reziduurilor admite o extindere analogă.

Observația 3. Principiul variației argumentului este valabil și în următoarele condiții mai puțin restrictive: $f(z)$ meromorfă în domeniul $\mathfrak{D}$ și continuă finită și diferită de zero pe curba C, formată din curbe simple, închise și rectificabile.

---

[22] $\int_\alpha^\beta \frac{d\varphi}{\mathrm{d}z} = [\varphi(z)]_\alpha^\beta$, dacă $\varphi(z)$ este olomorfă într-un domeniu ce conține arcul rectificabil $\overset{\frown}{\alpha\beta}$, sau dacă acest arc poate fi acoperit cu un număr finit de asemenea domenii.

Vom presupune că $\mathfrak{D}$ este interiorul unei singure curbe. Vom înconjura polii și zerourile funcției cu cercuri conținute în $\mathfrak{D}$ și fie $\delta > 0$ distanța curbei C la reuniunea acestor curbe. În mulțimea rămasă $\overline{\mathfrak{D}_0}$, după ce s-au scos aceste discuri din $\overline{\mathfrak{D}}$, $f(z)$ este finită și continuă, deci există un număr $0 < \eta < \delta$ astfel ca

$$|f(z')-f(z)| < \frac{m}{2} = \varepsilon, \quad \text{pentru} \quad |z' - z| < \eta, \quad \text{în} \quad \overline{\mathfrak{D}}_0,$$

unde $m = \min_C |f(z)| > 0$. Ca la demonstrarea teoremei lui Cauchy în condiții generale, împărțim curba C în $n > \max\left(\frac{2m}{\eta}, 4\right)$ arce C_k de lungime $\frac{s}{n}$ și construim un poligon simplu $\Pi = \sum_k \bar{A}_k \subset \mathfrak{D}$, format din linii frînte A_k ce sînt părți din poligoane P_k conținînd arcele C_k în interiorul lor. Curba C fiind parcursă în sens direct, fie α_{k-1}, α_k extremitățile arcului C_k și β_{k-1}, β_k extremitățile corespunzătoare ale liniei frînte A_k. Prin construcție avem pentru orice ζ pe P_k:

$$|\alpha_k - \zeta| < \frac{2s}{n} < \frac{2s\eta}{2m} = \delta.$$

De aici urmează că distanța dintre C și Π este $< \delta$ și că zerourile și polii lui $f(z)$ se află în interiorul poligonului Π (dimpreună cu cercurile descrise în jurul lor).

Să considerăm acum curbele închise

$$\gamma_k = C_k \cup \overline{\alpha_k\beta_k} \cup A_k \cup \overline{\beta_{k-1}\alpha_{k-1}},$$

unde $\overline{\alpha_k\beta_k}$ și $\overline{\alpha_{k-1}\ \beta_{k-1}}$ sînt segmente iar sensul de parcurs este acela al arcului C_k (direct), de la α_{k-1} spre α_k; atunci A_k este parcurs de la β_k spre β_{k-1}. Pe γ_k definim funcția continuă $\varphi(z)$ ca în demonstrația amintită. Avem atunci

$$|\varphi(z) - f(\alpha_k)| < m \leqslant |f(\alpha_k)| \quad \text{pe} \quad \gamma_k,$$

deci $[\arg \varphi(z)]_{\gamma_k} = 0$. Urmează

$$0 = \sum_k [\arg \varphi(z)]_{\gamma_k} = [\arg f(z)]_C - [\arg f(z)]_\pi,$$

pentru că segmentele $\overline{\alpha_k\beta_k}$ sînt descrise de două ori în sensuri opuse, iar Π în sensul indirect. Or, avem

$$N_0 - N_\infty = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_\pi,$$

condițiile restrînse ale principiului argumentului fiind satisfăcute de poligonul Π; deci avem și

$$N_0 - N_\infty = \frac{1}{2\pi}[\arg f(z)]_C.$$

În cazul cînd $\mathfrak{D}$ este exteriorul curbei C, avom aplica teorema (vezi observația 2) domeniului $\mathfrak{D}_1$, limitat de C și un cerc Γ exterior, ce nu trece prin nici un zero sau pol, precum și domeniul $\mathfrak{D}_2$ exterior cercului Γ. Adunînd rezultatele, și observînd că variațiile lui arg $f(z)$ de-a lungul lui Γ, parcurs de două ori în sensuri opuse, se reduc, obținem formula (46') pentru $\mathfrak{D}$. (Am putea de asemenea să ne servim de transformarea $z^* = \dfrac{1}{z - z_0}$, unde z_0 este un punct exterior lui $\mathfrak{D}$.)

DEMONSTRAȚIE DIRECTĂ A PRINCIPIULUI ARGUMENTULUI

1) Dacă o funcție meromorfă $f(z)$ are în domeniul $\mathfrak{D}$ zerourile a_n și polii b_k, este continuă în $\mathfrak{D}$ minus polii, fiind finită și diferită de zero pe fr D, putem scrie

$$f(z) = \frac{\Pi(z - a_n)}{\Pi(z - b_k)}\,\varphi(z) \quad \text{în } \overline{\mathfrak{D}},$$

unde $\varphi(z)$ este olomorfă și diferită de zero în $\mathfrak{D}$ și continuă în $\overline{\mathfrak{D}}$.

Se vede imediat considerînd $f(z)\,\dfrac{\Pi(z - b_k)}{\Pi(z - a_n)}$.

2) Dacă $\varphi(z)$ este olomorfă și diferită de zero în $\overline{\mathfrak{D}}$ limitat de o curbă simplă și rectificabilă C, avem $[\arg \varphi(z)]_C = 0$.

Rezultă din $\displaystyle\int_C \frac{\varphi'}{\varphi}\,dz = 0$ și $[\arg \varphi(z)]_C = \frac{1}{i}\,[\log \varphi(z)]_C$.

Sau se poate demonstra la fel ca teorema lui Cauchy chiar numai pentru $\varphi(z)$ continuu într-un domeniu $\mathfrak{D}_1 \supset \overline{\mathfrak{D}}$. (Variația argumentului pe C este egală cu variația pe un poligon înscris, cu laturi destul de mici.) Nu este nevoie ca C să fie rectificabil.

3) $[\arg(z - a)]_C = 2\pi$ cînd $a \in \mathfrak{D}$ (vezi fig. 167).

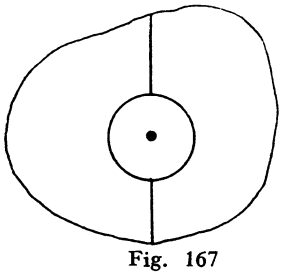

Fig. 167

3. Principiul argumentului ne va servi spre a da o nouă demonstrație unei teoreme importante:

Teorema lui Rouché. *Fie $f(z)$ și $g(z)$ funcții meromorfe în domeniul $\overline{\mathfrak{D}}$ limitat de curba simplă, închisă și rectificabilă C. Dacă*

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \textit{pe } C, \tag{47}$$

atunci avem pentru funcțiile $f(z)$ și $f(z) + g(z)$:

$$N_0 - N_\infty = N_0' - N_\infty' \quad \textit{în } \mathfrak{D}, \tag{48}$$

unde N_0' și N_∞' reprezintă numărul zerourilor și al polilor lui $f(z) + g(z)$.

Într-adevăr, scriind $f(z) + g(z) = f(z)\left(1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}\right)$ pe curba C și aplicînd principiul variației argumentului, avem

$$N_0' - N_\infty' = [\arg f(z)]_C + \left[\arg\left(1 + \frac{g(z)}{f(z)}\right)\right]_C.$$

(Sîntem în condiţiile teoremei precedente pentru că $f+g$ este meromorfă în $\overline{\mathfrak{D}}$ şi $|f+g| > |f|-|g| > 0$ pe C.) Deoarece $W=1+\frac{g(z)}{f(z)}$ satisface condiţia

$$|W-1|<1 \quad \text{pe } C,$$

atunci cînd z parcurge C, punctul W descrie un drum închis, conţinut în cercul de centru 1 şi rază 1; deci arg W revine la valoarea iniţială (determinările lui arg W fiind uniforme în acest cerc). Aşadar

$$N_0' - N_\infty' = [\arg f(z)]_C = N_0 - N_\infty$$

(deoarece $|f| > 0$).

Observaţie. Teorema lui Rouché are avantajul de a fi valabilă în condiţii foarte generale relative la domeniu: $f(z)$ şi $g(z)$ meromorfe în $\mathfrak{D}$, domeniu oarecare, continue pe fr $\mathfrak{D}$ satisfăcînd condiţia (47) pe fr $\mathfrak{D}$. Demonstraţie:

Presupunem că domeniul $\mathfrak{D}$ este mărginit. Din cauza continuităţii, condiţia (47) este verificată şi într-o vecinătate $V_\zeta \cap \overline{\mathfrak{D}}$ a oricărui punct frontieră ζ. Reuniunea acestor vecinătăţi V_ζ este o mulţime deschisă E, care acoperă fr $\mathfrak{D}$ iar în $\mathfrak{D} \cap E$ este verificată condiţia (47). Să considerăm mulţimea închisă $\overline{\mathfrak{D}}_1 = \mathfrak{D} - E = \mathfrak{D} - \mathfrak{D} \cap E$. Zerourile şi polii funcţiilor $f(z)$ şi $f(z)+g(z)$ se află în $\overline{\mathfrak{D}}_1$, căci în $\mathfrak{D} \cap E$ aceste funcţii sînt finite şi $|f| > 0$, $|f+g| > |f| - |g| > 0$ din cauza condiţiei (47). Deci în $\mathfrak{D} \cap E$ funcţiile $f(z)$ şi $g(z)$ sînt olomorfe şi satisfac condiţia (47). După o lemă cunoscută, mulţimea $\overline{\mathfrak{D}}_1$ poate fi acoperită cu o reuniune finită de pătrate închise, $\overline{\Delta}$, care este conţinută în $\mathfrak{D}$ şi conţine pe $\overline{\mathfrak{D}}_1$ în interiorul ei. Mulţimea $\overline{\Delta}$ se descompune într-o reuniune de domenii poligonale $\overline{P}_k$, ale căror poligoane frontieră (curbe simple, închise, rectificabile) sînt în $\mathfrak{D}$, dar nu au nici un punct comun cu $\overline{\mathfrak{D}}_1$ (interior lui $\Delta = \sum_k P_k$); deci poligoanele P_k sînt în $\mathfrak{D} \cap E$. Fiecare zero sau pol al funcţiilor $f(z)$ şi $f(z)+g(z)$ fiind în $\overline{\mathfrak{D}}_1$, se află în interiorul unui poligon P_k. Aşadar, domeniilor poligonale P_k, satisfăcînd condiţiile teoremei demonstrate (pentru că poligoanele P_k se află în $\mathfrak{D} \cap E$), le putem aplica formula (48). Adunînd aceste rezultate vom obţine formula (48) pentru întregul domeniu $\mathfrak{D}$. Am presupus domeniul $\mathfrak{D}$ mărginit. Demonstraţia este însă aplicabilă şi unui domeniu nemărginit, dacă o facem pe sfera lui Riemann.

Corolarul 1. *Fie $f(z)$ meromorfă în $\mathfrak{D}$ şi continuă pe* fr $\overline{\mathfrak{D}}$. *Dacă* $0 < m \leqslant |f(z)| \leqslant M$ *pe* fr $\mathfrak{D}$, *avem în* $\mathfrak{D}$:

(49) $$N_w = N_0 \quad \textit{pentru } |w| < m,$$

(49') $$N_w = N_\infty \textit{ pentru } |w| > M.$$

Prima egalitate se obţine aplicînd teorema lui Rouché funcţiilor $f(z)$ şi $g(z) = -w$, observînd că $N_\infty = N_\infty'$ şi $N_0' = N_w$. A doua se obţine aplicînd prima egalitate funcţiei $\frac{1}{f(z)}$ şi valorii $w' = \frac{1}{w}$ cu $|w'| < \frac{1}{M}$.

Corolarul 2. *Fie $f(z)$ meromorfă în $\mathfrak{D}$ și continuă pe* fr $\mathfrak{D}$. *Dacă $w_0 = f(z_0)$ este o valoare luată de funcția $f(z)$ în $\mathfrak{D}$, și $f(z) \neq w_0$ pe* fr $\mathfrak{D}$, *există o vecinătate V_{w_0} astfel că $f(z)$ ia în $\mathfrak{D}$ orice valoare din V_{w_0} de același număr de ori ca valoarea w_0.*

Într-adevăr, fie întîi w_0 finit. Considerăm funcția $f(z) - w_0$ care este continuă și diferită de zero pe fr $\mathfrak{D}$. Numărul zerourilor ei în $\mathfrak{D}$ este N_{w_0} (N relativ la $f(z)$). Dacă $|f(z) - w_0|$ are minimul $m(>0)$ pe fr $\mathfrak{D}$, vom avea după corolarul precedent $N_w = N_{w_0}$ pentru $|w - w_0| < m$, adică pentru w conținut în vecinătatea V_{w_0} de rază m[23]). În cazul $w_0 = \infty$ afirmația acestui corolar se confundă cu egalitatea (49').

Acum o altă demonstrație și generalizare a teoremei lui Rouché.

Teorema 3. *Fie $f(z)$ și $g(z)$ meromorfe în domeniul $\mathfrak{D}$, continue pe* fr $\mathfrak{D}$ *și $f(z) + \lambda g(z) \neq 0$ pe fr $\mathfrak{D}$, pentru $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Atunci $N_0 - N_\infty$ are aceeași valoare pentru f și pentru $f + \lambda g$ (și în particular pentru $f + g$).*

Presupunem întîi C simplă, rectificabilă și $f(z), g(z)$ meromorfe pe C. Pentru $f + \lambda g$ avem $N'_0 - N'_\infty = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_C \frac{f' + \lambda g'}{f + \lambda g}\, dz$.

Cum integrandul este continuu în (z, λ) pe $C \times [0, 1]$, $N'_0 - N'_\infty$ este funcție continuă de λ (după o teoremă cunoscută), și deci este constantă (căci nu poate varia decît cu întregi).

Demonstrația se face pentru cazul general, argumentînd la fel ca în cealaltă demonstrație.

Observația 1. Condiția teoremei lui Rouché $|g| < |f|$ pe C atrage $f + \lambda g \neq 0$: $|\lambda g| \leqslant |g| < |f|$. Nu și invers. De exemplu: $f = z$, $g = iz$. Sau: $f = z^2 + 1$, $g = z$ pe cercul $|z| = \dfrac{2}{3}$. Pentru $z = \dfrac{2}{3}$, $|f| > |g|$, pentru $z = i\dfrac{2}{3}$, $|f| < |g|$; dar $f + \lambda g \neq 0$ pentru că rădăcinile ecuației $z^2 + \lambda z + 1 = 0$ au modulul 1.

Observația 2. Demonstrația se poate face și topologic, plecînd de la $N'_0 - N'_\infty = \dfrac{1}{2\pi}[\arg (f + \lambda g)]_C$. Prin ipoteză, cînd λ variază, transformata curbei C prin $w = f + \lambda g$ variază continuu fără a trece prin origine. Se poate arăta că în aceste condiții rotația ei față de $w = 0$ variază continuu și deci este constantă. (Vezi M. Morse, „Metode topologice în teoria funcțiilor de o variabilă complexă", Princeton, 1947, p. 94; Kuratovski, Fund. math., 33, (1945, pp. 316—67).

Observația 3. Teorema lui D'Alembert se poate demonstra și ca aplicație a teoremei lui Rouché: Dacă $f(z) = a_0 z^p + \ldots + a_p$ și $f(z) = a_0 z^p + g(z)$, avem $|g(z)| < |a_0 z^p|$ pentru $|z|$ destul de mare. Etc.

4. Teorema 4. *(Hurwitz). Fie $\{f_n(z)\}$ un șir de funcții olomorfe în domeniul $\mathfrak{D}$ și continue în $\overline{\mathfrak{D}}$, care converg uniform în $\overline{\mathfrak{D}}$ către funcția $f(z)$. Dacă $f(z) \neq 0$ pe* fr $\mathfrak{D}$, *există un număr ν astfel că, pentru $n > \nu$, funcțiile $f_n(z)$ au același număr de zerouri în $\mathfrak{D}$ ca și $f(z)$.*

---

[23]) Sau putem aplica direct teorema lui Rouché funcțiilor $f_1 = f - w_0$ și $g = w_0 - w$.

După cum se știe, funcția limită $f(z)$ este olomorfă în $\mathfrak{D}$ și continuă în $\overline{\mathfrak{D}}$. Fie $m = \min_{\text{fr}\mathfrak{D}} |f(z)| > 0$ (prin ipoteză). Din cauza convergenței uniforme există un număr ν astfel că $|f_n(z) - f(z)| < m$ în $\overline{\mathfrak{D}}$, pentru $n > \nu$. Vom avea atunci pe fr $\mathfrak{D}$: $|f_n(z) - f(z)| < |f(z)|$, ceea ce, după teorema lui Rouché, dovedește că funcțiile $f_n(z)$ cu $n > \nu$ au același număr de zerouri în $\mathfrak{D}$ ca și $f(z)$.

5. *Aplicațiile principiului argumentului la studiul distribuției rădăcinilor unei ecuații.* Principiul argumentului și teorema lui Rouché pot servi la determinarea numărului rădăcinilor unei ecuații $\varphi(z) = 0$ într-un domeniu unde funcția $\varphi(z)$ este olomorfă, și prin aceasta sînt de folos în problema separării rădăcinilor ecuației — problemă care constă în a localiza fiecare rădăcină într-un domeniu (cît mai restrîns) ce nu mai conține alte rădăcini.

În ceea ce privește modul de aplicare a principiului argumentului, vom observa următoarele: cînd domeniul considerat $\mathfrak{D}$ este limitat de o curbă închisă C (sau mai multe), pe care ipotezele teoremei sînt verificate, vom căuta să construim (măcar aproximativ) curba închisă C' ce corespunde curbei în planul (w). Va fi de ajuns să cunoaștem alura generală, sensul de parcurs și situația curbei C' față de originea $w = 0$, spre a putea evalua (în multipli de 2π) variația $\arg w$ de-a lungul ei. Este important să se observe că C' poate fi parcursă de mai multe ori. Constatarea că C' nu trece prin origine ne scutește de a verifica $\varphi(z) \neq 0$ pe C.

Cînd $\varphi(z)$ este un polinom, iar curba C sau un arc C_0 al ei se poate lua la o distanță oricît de mare de origine, vom scrie:

$$\varphi(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n =$$

$$= a_0 z^n \left[1 + \frac{1}{a_0}\left(\frac{a_1}{z} + \ldots + \frac{a_n}{z^n}\right)\right] = a_0 z^n (1 + \psi(z)),$$

$$[\arg \varphi(z)]_{C_0} = [\arg z^n]_{C_0} + \varepsilon,$$

unde $\varepsilon = [\arg (1 + \psi(z))]_{C_0}$ poate fi luat oricît de mic în valoare absolută. Într-adevăr, deoarece $\psi(z) \to 0$ pentru $z \to \infty$, punctul $W = 1 + \psi(z)$ va rămîne într-un cerc de centru 1 și rază ρ oricît de mică voim, dacă arcul C_0 este destul de îndepărtat (vezi fig. 168). Și cum, în acest cerc, o determinare a $\arg W$ poate varia cel mult cu $2\text{arc}_0 \sin \rho$, $|\varepsilon|$ va putea fi făcut oricît de mic.

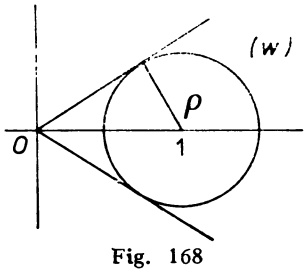

Fig. 168

În sfîrșit, pentru a aplica teorema lui Rouché, vom căuta să punem funcția $\varphi(z)$ sub forma $\varphi(z) = f(z) + g(z)$, unde $f(z)$ și $g(z)$ verifică condițiile teoremei, și $f(z)$ are, în domeniul considerat, un număr cunoscut de zerouri.

Exemple. **4.** *Ecuația lui Kepler*[24])

$$z - a - \alpha \sin z = 0 \qquad \begin{cases} 0 < a < \pi, \\ 0 < \alpha < 1 \end{cases}$$

are o singură rădăcină în banda $0 < x < \pi$ *și cîte două rădăcini imaginare conjugate în fiecare din benzile* $m\pi < x < (m+1)\pi$, *unde* m *este un întreg par pozitiv sau impar negativ. Aceste rădăcini sînt simple și singurele rădăcini ale ecuației.*

Vom căuta numărul rădăcinilor cuprinse într-un dreptunghi $m\pi \leqslant x \leqslant (m+1)\pi$, $-R \leqslant y \leqslant R$ cu R foarte mare. Cum ecuația lui Kepler nu are rădăcini de forma $z = m\pi$, conturul dreptunghiului nu trece prin vreo rădăcină, dacă R este destul de mare. Avem $w = z - a - \alpha \sin z = u + iv$, cu

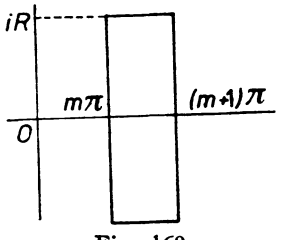

Fig. 169

$$u = x - a - \alpha \sin x \operatorname{ch} y, \qquad v = y - \alpha \cos x \operatorname{sh} y.$$

Pe o latură $x = m\pi$, $-R \leqslant y \leqslant R$:

$$u = m\pi - a, \quad v = y - (-1)^m \alpha \operatorname{sh} y$$

și v descrie intervalul $(-b, b)$ cu

$$b = R - (-1)^m \alpha \operatorname{sh} R \quad \begin{cases} < 0 & m \text{ par}, \\ > 0 & m \text{ impar}, \end{cases}$$

pentru R destul de mare (vezi fig. 169).

Presupunînd $m \geqslant 0$, avem pe laturile $y = \pm R$, $m\pi \leqslant x \leqslant (m+1)\pi$:

$$u = x - a - \alpha \sin x \operatorname{ch} R, \quad v = \pm R \mp \alpha \cos x \operatorname{sh} R;$$

$u' = 1 - \alpha \cos x \operatorname{ch} R$ se anulează o singură dată cînd R este foarte mare $\left(\text{pentru } \cos x = \frac{1}{\alpha \operatorname{ch} R}\right)$ trecînd de la $-$ la $+$ cînd m este par, sau invers cînd m este impar. Curba taie axa reală într-un punct dat de $\cos x_0 = \dfrac{R}{\alpha \operatorname{sh} R}$, avînd abscisa

$$u_0 = \begin{cases} x_0 - a - \sqrt{\alpha^2 \operatorname{sh}^2 R - R^2} \operatorname{cth} R < 0 & m \text{ par}, \\ x_0 - a + \sqrt{\alpha^2 \operatorname{sh}^2 R - R^2} \operatorname{cth} R > 0 & m \text{ impar} \end{cases}$$

(R foarte mare). (Se observă că în primul caz $\sin x_0 > 0$, iar în al doilea $\sin x_0 < 0$.) Din toate acestea rezultă formele date de fig. 170 pentru curba descrisă de punctul w.

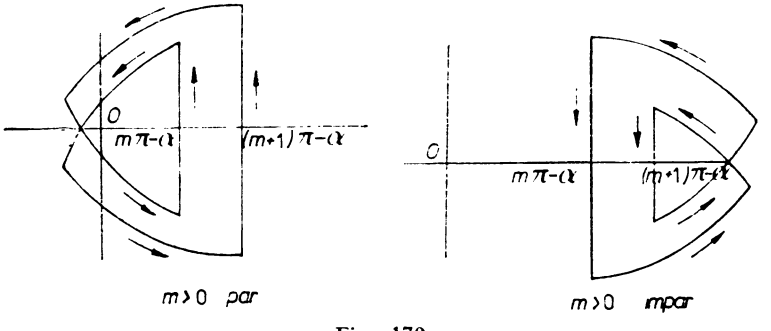

Fig. 170

[24]) Ecuația lui Kepler dă poziția unei planete pe orbită la un interval de timp τ de la trecerea prin periheliu, determinînd anomalia excentrică φ : $\varphi - 2\pi \dfrac{\tau}{T} - e \sin \varphi = 0$ (unde e este excentricitatea orbitei și T perioada de revoluție). În notația noastră $z = \varphi$, $a = 2\pi \dfrac{\tau}{T}$ și $\alpha = e$. Excluzînd cazul orbitei circulare, putem presupune $0 < \alpha < 1$ și $0 < a < \pi$.

Din aceste schițe se vede că arg w crește cu 4π în cazul întîi, iar în al doilea revine a valoarea inițială; aceasta demonstrează afirmația pentru $m > 0$. Este clar că aceste rezultate se inversează cînd $m < 0$.

În cazul $m = 0$ forma curbei rămîne aceeași ca în prima figură, dar originea cade între cele două segmente paralele ale curbei, așa că arg w crește acum numai cu 2π. Deci în banda $0 \leqslant x \leqslant \pi$ ecuația are o singură rădăcină, care este reală pentru că primul membru al ecuației ia semne contrare pentru $z = 0, \pi$.

Să mai observăm că primul membru al ecuației este de semn constant în afara intervalului $(0,2\pi)$, de unde rezultă că celelalte rădăcini sînt imaginare. Ele formează perechi imaginar conjugate.

5. *Numărul rădăcinilor reale ale ecuației*

$$A = \sum_{k=m}^{n} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = 0 \quad (a_k,\ b_k \text{ reali})$$

în intervalul $(0, 2\pi)$, *este cel puțin* $2m$ *și cel mult* $2n$.

Să observăm că

$$A = \operatorname{Re} \sum_{k=m}^{n} (a_k - ib_k) z^k \quad \text{pentru } |z| = 1.$$

Cînd φ descrie intervalul $(0,2\pi)$, $z = e^{i\varphi}$ descrie cercul $|z| = 1$ în sens direct, o singură dată; urmează că ecuația $A = 0$ va avea, în acest interval, atîtea rădăcini distincte cîte intersecții are curba descrisă de $w = \sum_{k=m}^{n} (a_k - ib_k) z^k$, cu axa imaginară ($u = \operatorname{Re} w = 0$). Cum ecuația $w = 0$, are cel puțin m (și cel mult n) rădăcini, în discul $|z| < 1$, curba considerată face, după principiul variației argumentului, un număr de ocoluri în jurul originei cel puțin egal cu m. Pentru fiecare ocol, curba trebuie să traverseze cel puțin de două ori axa imaginară; deci numărul intersecțiilor ei cu această axă, adică numărul rădăcinilor reale ale ecuației $A = 0$ în intervalul $(0,2\pi)$, este $\geqslant 2m$. Pe de altă parte, punînd în $A_k = 0$, $\zeta = e^{i\varphi}$, $\cos k\varphi = \frac{1}{2}(\zeta^k + \zeta^{-k})$, $\sin k\varphi = \frac{1}{2i}(\zeta^k - \zeta^{-k})$, se obține o ecuație în ζ de gradul $2n$ ale cărei rădăcini de modul 1 corespund biunivoc cu rădăcinile ecuației date, din intervalul $(0,2\pi)$. Deci numărul acestor rădăcini este $\leqslant 2n$.

6. *Dacă* $0 < a_0 < a_1 < \ldots < a_n$, *polinomul* $P(z) = \sum_{0}^{n} a_k z^k$ *are toate zerourile sale în discul* $|z| < 1$. *Să se deducă: În aceste condiții ecuația*

$$A = \sum_{0}^{n} a_k \cos k\varphi = 0$$

are toate rădăcinile reale și în intervalul $(0,2\pi)$, $2n$ *rădăcinile distincte.*

Pentru a demonstra prima afirmație va fi destul să dovedim că pentru $|z| \geqslant 1$, $|(z-1)P(z)| \geqslant 0$, cu egalitate numai pentru $z = 1$. Or avem,

$$|(z-1)P(z)| = |a_n z^{n+1} - [a_0 + (a_1 - a_0) z + \ldots + (a_n - a_{n-1}) z^n]| \geqslant$$

$$\geqslant a_n |z|^{n+1} - [a_0 + (a_1 - a_0)|z| + \ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^n],$$

unde putem avea egalitatea numai dacă punctele a_0, $(a_1 - a_0)z$, ... sînt pe aceeași semidreaptă ieșind din origine, ceea ce se întîmplă numai pentru z pozitiv. Dacă $|z| \geqslant 1$ și z nu este un număr pozitiv, vom avea

$$|(z-1)P(z)| > a_n|z|^{n+1} - [a_0|z|^{n+1} + \ldots + (a_n - a_{n-1})|z|^{n+1}]$$

sau

$$|(z-1)P(z)| > 0.$$

Deci $P(z)$ nu poate avea zerouri de modul $\geqslant 1$, dacă nu pozitive. Evident, $P(z)$ nu se anulează nici pentru numerele pozitive.

După cum s-a văzut în exemplul 5, ecuația $A = 0$ are cel mult $2n$ rădăcini reale în intervalul $(0,2\pi)$ și pe de altă parte, numărul acestor rădăcini este egal cu numărul de intersecții ale axei imaginare cu curba descrisă de punctul $w = \sum_{0}^{n} a_k z^k = P(z)$, cînd $z = e^{i\theta}$ și θ descrie intervalul $(0,2\pi)$. Dar, cum $P(z)$ are cele n zerouri în cercul $|z| < 1$, după principiul argumentului

această curbă face n ocoluri în jurul originei, și deci intersectează axa imaginară în (cel puțin) $2n$ puncte. Așadar, ecuația $A = 0$ are $2n$ rădăcini reale distincte, în intervalul $(0,2\pi)$. În sfîrșit, ecuația în $\zeta = e^{i\vartheta}$, formată în exemplul 5 are numai rădăcini de modul 1, corespunzătoare celor $2n$ rădăcini reale ale ecuației $A = 0$; această ecuație nu poate deci avea rădăcini imaginare.

7. *Ecuația*

$$e^{-z} + z - \lambda = 0 \qquad (\lambda > 1)$$

are o singură rădăcină în semiplanul $\operatorname{Re} z > 0$, *și aceasta este reală.*

Aplicăm teorema lui Rouché funcțiilor $f = z - \lambda$ și $g = e^{-z}$, considerate în domeniul interior conturului din figura 171, unde R poate fi oricît de mare.

Pe axa imaginară $|e^{-z}| = 1$. Pe semicercul Γ, $z = R(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ și $|e^{-z}| = e^{-R\cos\varphi} \leqslant 1$ $(\cos\varphi \geqslant 0)$. Avem deci pe întregul contur, dacă $R > \lambda + 1$:

$$|g| \leqslant 1 < |f| \qquad (\lambda > 1)$$

căci $|f| > 1$ pe contur.

Deci ecuația dată are în interiorul conturului — și prin urmare în tot semiplanul $\operatorname{Re} z > 0$ — același număr de rădăcini ca $f = 0$, adică o rădăcină. Această rădăcină este reală pentru că ecuația trebuie să admită și rădăcina conjugată. (Din $e^{-z} + z - \lambda = 0$ urmează și $\overline{e^{-z} + z - \lambda} = e^{-\bar{z}} + \bar{z} - \lambda = 0$.)

8. *Să se separe rădăcinile ecuației*

$$z^8 - 6z^5 + 3z^3 - 1 = 0.$$

Căutăm întîi o barieră superioară pentru modulii rădăcinilor. În acest scop aplicăm teorema lui Rouché funcțiilor $f = z^8$ și $g = -6z^5 + 3z^3 - 1$, pe un cerc $|z| = R$. Vom avea pe acesta $|g| < |f|$ dacă $6R^5 + 3R^3 + 1 < R^8$, ceea ce se verifică pentru $R = 2$. Deci toate rădăcinile sînt în cercul $|z| < 2$. Vom studia apoi realitatea rădăcinilor. Teorema lui Descartes ne indică o rădăcină negativă, care se încadrează în intervalul $(-1, 0)$, și una sau trei rădăcini pozitive, în intervalul $(0, 2)$. Ele nu pot fi în $(0, 1)$. Într-adevăr, ecuația derivată (pe axa reală) este $x^2(8x^5 - 30x^2 + 9) = 0$, iar semnul său este dat de factorul al doilea; dar derivata acestui factor este $40x^4 - 60x = 20x(2x^3 - 3)$, care-i tot timpul negativă în $(0,1)$, și deci funcția $8x^5 - 30x^2 + 9$ este mereu descrescătoare, și avînd în vedere că în extremități ia valorile 9 și -13, rezultă că acest factor, și deci și derivata $x^2(8x^5 - 30x^2 + 9)$, sînt pozitive de la $x = 0$ și pînă la o valoare intermediară x_2, unde acest factor, și deci și derivata, se anulează, iar de la x_2 pînă la 1, atît factorul, cît și derivata sînt negative. Dar funcția $x^8 - 6x^5 + 3x^3 - 1$ ia în extremități valorile -1 și -3 descrescînd de la -1 pînă la valoarea ce corespunde punctului x_1 ce anulează derivata, iar de acolo crește pînă la valoarea -3, și prin urmare funcția nu intersectează nici o dată axa reală, adică nu are nici o rădăcină în intervalul $(0,1)$.

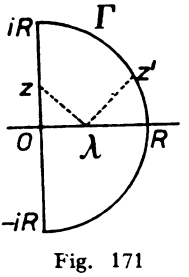

Fig. 171

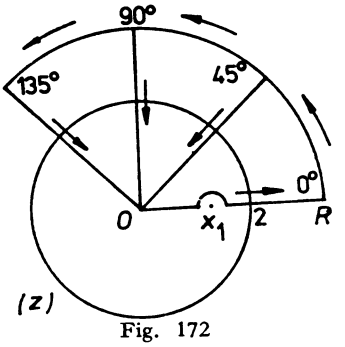

Fig. 172

Cum ecuația derivată $x^2(8x^5 - 30x^2 + 9) = 0$ are o singură rădăcină pozitivă, în $(1,2)$, rezultă (teorema lui Rolle) că ecuația propusă are o singură rădăcină pozitivă, situată în $(1,2)$. Cele două rădăcini reale fiind simple, urmează că ecuația mai are trei perechi de rădăcini imaginare conjugate. Spre a le separa vom aplica principiul variației argumentului sectoarelor

$$0 < \theta < k\frac{\pi}{4}, \qquad 0 < r < R, \quad k = 1, 2, 3,$$

cu R foarte mare, din care excludem rădăcina x_1 printr-un semicerc (vezi fig. 172).

Pe o rază $\theta = k\frac{\pi}{4}$ (parcursă înspre centru) avem

$$u = r^8 - 6r^5 \cos\frac{5k}{4}\pi + 3r^3 \cos\frac{3k}{4}\pi - 1,$$

$$v = -6r^5 \sin\frac{5k}{4}\pi + 3r^3 \sin\frac{3k}{4}\pi.$$

De-a lungul razei $\theta = 0$, $\arg w$ variază cu $-\pi$ (datorită semicercului de centru x_1). Pe arcul de cerc al sectorului, după o observație făcută mai sus, $\arg w$ variază cu $2k\pi \pm \varepsilon$, unde $\varepsilon \to 0$ cînd $R \to \infty$. Pe raza $\theta = \frac{k\pi}{4}$, w descrie un arc de curbă *parabolic*[25], care se termină în punctul

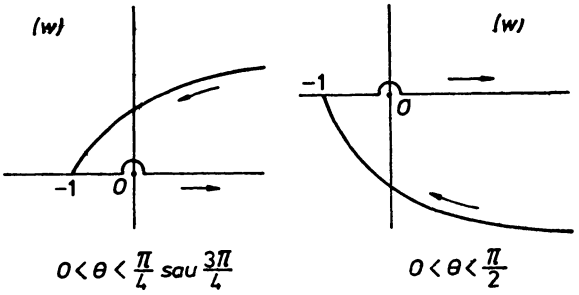

Fig. 173

$w = -1$ și situat în semiplanul superior ($v > 0$) cînd $k = 1, 3$, și în cel inferior ($v < 0$) cînd $k = 2$[26]; de unde rezultă că $\arg w$ variază în primele două cazuri cu $\pi - \varepsilon$, iar în ultimul cu $-\pi + \varepsilon$. În definitiv, $\arg w$ variază pe contururile considerate în figura 173, pentru $k = 1, 2, 3$, respectiv cu 2π, 2π, 6π. Avem deci o rădăcină în sectorul $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ și două rădăcini în sectorul $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$.

Putem ameliora aproximația rădăcinilor în modul aplicînd teorema lui Rouché funcțiilor $f_1 = -6z^5$ și $g_1 = z^8 + 3z^3 - 1$. Vom avea $|g_1| < |f_1|$ pe cercul $|z| = R$, dacă $R^8 + 3R^3 + 1 < 6R^5$, ceea ce are loc pentru $R = 1$. Deci sînt 4 rădăcini imaginare în discul $|z| < 1$. Spre a le situa în sectoarele precedente vom arăta mai întîi, cu ajutorul variației argumentului că nu există nici o rădăcină în porțiunea de sector mărginită de segmentele radiale de unghiuri $\theta = 0, \frac{\pi}{4}$ și de arcele de cerc de centru O și razele $r = 1$ și $R > 2$. În acest scop, urmează să vedem alura curbei, imagine a frontierei domeniului menționat. Cum am văzut mai sus alura curbei corespunzînd celor două raze și arcului de cerc de rază R, nu rămîne decît să mai vedem ce devine arcul de cerc de rază $r = 1$. Înlocuind $z = e^{i\theta}$, polinomul inițial, în care separăm partea reală de cea imaginară, devine

$$u = \cos 8\theta - 6\cos 5\theta + 3\cos\theta - 1,$$

$$v = \sin 8\theta - 6\sin 5\theta + 3\sin\theta.$$

---

[25] Prin *arc de curbă parabolic* se-nțelege un arc de curbă infinit a cărui asimptotă este paralelă cu axa reală și aruncată la infinit.

[26] De aici rezultă că aceste raze satisfac condiția de a nu trece prin nici o rădăcină a ecuației date.

Punctele ce corespund intersecțiilor cercului de rază $r = 1$ cu razele $\theta = 0, \frac{\pi}{4}$, vor avea coordonatele $(-3, 0)$ și $\left(\frac{3}{\sqrt{2}}, \frac{9}{\sqrt{2}}\right)$. Avînd în vedere și tabelul

θ	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{4}$
u	-3	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
v	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$

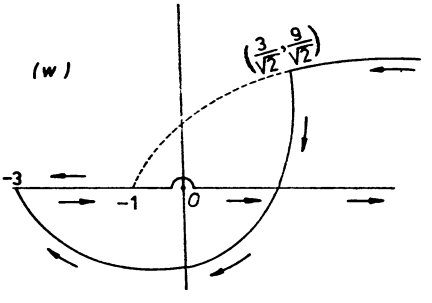

Fig. 174

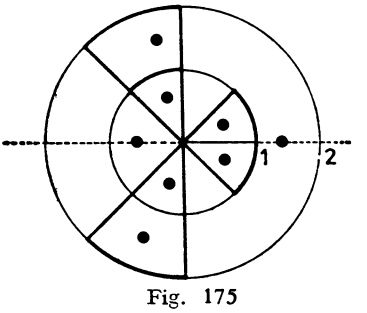

Fig. 175

alura curbei va fi dată de figura 174. Se vede că $\arg w$ variază pe conturul domeniului precedent cu

$$-\pi + 8\frac{\pi}{4} + \varepsilon - \pi - \varepsilon = 0$$

și deci acest domeniu nu conține nici o rădăcină. Cum însă întregul sector, mărginit de razele $\theta = 0, \frac{\pi}{4}$ și de arcul de cerc de rază $R > 2$, conține o rădăcină, rezultă că aceasta se află în sectorul mărginit de razele $\theta = 0$, $\frac{\pi}{4}$ și arcul de cerc de rază $r = 1$. În sectorul simetric față de axa reală se va găsi rădăcina imaginar conjugată cu acestea. Cum am văzut mai sus că în discul unitate se găsesc numai două perechi de rădăcini imaginar conjugate, rezultă că din cele două perechi ce se află în sectorul mărginit de razele $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{4}$ și arcul de cerc de rază 1, o singură rădăcină (din cele două conținute în întreg sectorul) este în cercul de rază 1, cealaltă aflîndu-se în porțiunea sectorului mărginită de arcele de cerc de raze $r = 1$ și $R > 2$, această concluzie rămînînd valabilă și pentru conjugatele acestor rădăcini.

Din toate acestea reiese distribuția rădăcinilor arătată în figura 175.

9. *Să se găsească numărul rădăcinilor ecuației* $z^4 + 3z^3 + 1 = 0$ *din discul* $|z| < 1$.

Aplicăm teorema lui Rouché funcțiilor $3z^3$ și $z^4 + 1$. Pe circumferința unitate vom avea $|3z^3| = 3 > |z^4 + 1| \geqslant 2$. Deci ecuația are în interiorul cercului unitate tot atîtea rădăcini ca $z^3 = 0$, adică trei. Una din ele este reală și se găsește în intervalul $(-1, 0)$.

10. *Dacă* $\varphi(t)$ *este o funcție pozitivă, crescătoare și continuă în intervalul* $[0, 1]$, *atunci funcția întreagă*

$$f(z) = \int_0^1 \varphi(t) \cos tz \, dt$$

are toate zerourile reale[27].

[27] A.I. Markușevici, *Teoria funcțiilor analitice*. Moscova—Leningrad, 1950.

Integrandul fiind continuu în (z, t) și olomorf ca funcție de z în tot planul, $f(z)$ este o funcție întreagă (teorema lui De la Vallée-Poussin). Vom construi un șir de funcții întregi $f_n(z)$ convergînd uniform către $f(z)$ și apoi vom folosi teorema lui Hurwitz. Un asemenea șir este dat chiar de definiția integralei:

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{k}{n} z.$$

(Intervalul [0, 1] fiind împărțit în subintervale de lungime $\frac{1}{n}$, $f_n(z)$ este o sumă S_n corespunzătoare și tinde la $f(z)$.) Pentru a demonstra convergența uniformă într-un domeniu $\overline{\Delta}$ mărginit, în care menținem pe z, scriem:

$$f(z) - f_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} \left[\varphi(t) \cos tz - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{k}{n} z\right] dt.$$

Funcția $\varphi(t) \cos zt$ fiind uniform continuă în $[0, 1] \times \overline{\Delta}$, pentru $\varepsilon > 0$ dat, există un $\delta > 0$ astfel că

$$|\varphi(t) \cos tz - \varphi(t') \cos t'z| < \varepsilon \quad \text{pentru } |t - t'| < \delta.$$

Luînd $\frac{1}{n} < \delta$ vom avea $t - \frac{k}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \delta$ în intervalul $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ și prin urmare vom avea în acest interval

$$|\varphi(t) \cos tz - \varphi\left(\frac{k}{n}\right) \cos \frac{k}{n} z| < \varepsilon,$$

de unde

$$|f(z) - f_n(z)| < n \cdot \frac{1}{n} \cdot \varepsilon = \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > \frac{1}{\delta}.$$

Să observăm acum că $f_n(z)$ este de forma $\sum_0^{n-1} a_k \cos k\varphi$ cu a_k pozitivi și crescători $\left(\text{și } \varphi = \frac{z}{n}\right)$; deci (exemplul 6) f_n are numai zerouri reale. De aici decurge aceeași proprietate pentru $f(z)$, cu ajutorul teoremei lui Hurwitz: Dacă $f(z)$ ar avea un zero imaginar α, atunci într-o vecinătate U_α ce nu intersectează axa reală, funcțiile $f_n(z)$ cu n destul de mare ar avea cel puțin un zero imaginar.

11. *Dacă* $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *în discul* $|z| < 1$ *și* $|a_n| \leqslant \alpha_n (n \leqslant p)$, *iar* $f(z)$ *nu se anulează în mai mult de* p *puncte din disc, atunci pe frontiera fiecărui domeniu închis* $\overline{\Delta}$, *care este conținut în disc și conține originea în interiorul său, există puncte unde* $|f(z)| \leqslant \alpha_0 + \ldots + \alpha_p$ (Saxer).

Avem pentru polinomul $p(z) = \sum_0^p a_n z^n$; $|p(z)| \leqslant \alpha_0 + \ldots + \alpha_p$ în tot discul. Dacă, pe fr Δ, am avea $|f(z)| > \alpha_0 + \ldots + \alpha_p$, ar urma $|p(z)| < |f(z)|$ și după teorema lui Rouché ar urma ca $f(z)$ și $f(z) - p(z) = \sum_{p+1}^\infty a_n z^n$ să aibă în Δ tot atîtea zerouri; or, a doua funcție are cel puțin $p + 1$ zerouri (unul fiind $z = 0$, de ordin $p + 1$), pe cînd cea dintîi are cel mult p zerouri. Deci trebuie să existe pe fr Δ puncte în care $|f(z)| \leqslant \alpha_0 + \ldots + \alpha_p$.

Consecință: Dacă $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ *în cercul* $|z| < 1$ *și* $\min_{|z|=r<1} |f(z)| > |a_0| + \ldots + |a_p|$, *atunci* $f(z)$ *are cel puțin* $p + 1$ *zerouri (în discul* $|r| < r$*).*

§ 94. Proprietăți topologice ale reprezentării efectuate de o funcție meromorfă

1. În cele ce urmează vom demonstra cu mijloace proprii teoriei funcțiilor de variabilă complexă, și în condiții mai generale, teorema invariației domeniilor și alte teoreme înrudite.

Teorema 1. *(Teorema invariației domeniilor). Dacă $f(z)$ este meromorfă și neconstantă în domeniul D, mulțimea E a valorilor luate de funcție în D ($E = f(D)$) este tot un domeniu (în planul lui Gauss).*

1°. E este deschisă: fie w_0 un punct din E și z_0 un punct din D, unde $f(z_0) = w_0$. Mulțimea punctelor în care $f(z) = w_0$ fiind izolată, există o vecinătate circulară $\overline{U}_{z_0}$ în care $f(z) \neq w_0$ pentru $z \neq z_0$. După corolarul 2 al teoremei lui Rouché, există atunci o vecinătate V_{w_0} astfel că $f(z)$ ia orice valoare w din V_{w_0}, în puncte din U_{z_0} — al căror număr este de altfel egal cu multiplicitatea valorii w_0 în z_0. Or, aceasta înseamnă că $V_{w_0} \subset E$.

2°. E este conexă: aceeași demonstrație ca în cazul cînd $f(z)$ este olomorfă (considerată mai demult): conexiunea rezultă din faptul că $f(z)$ efectuează o reprezentare continuă în planul lui Gauss (w): sau următoarea demonstrație: fie w_1, w_2 puncte din E, care corespund la z_1, z_2 în D, puncte evident distincte. Putem uni z_1 cu z_2 prin o curbă C (de exemplu linie poligonală) în D. Reprezentarea continuă $w = f(z)$ duce curba C (mulțime compactă și conexă în planul lui Gauss) într-un continuu $C' \subset E$, ce unește w_1 cu w_2.

Observație. Din teorema precedentă se poate deduce principiul maximului (minimului) modulului — cum am mai observat.

2. **Teorema 2.** *Dacă $f(z)$ este meromorfă în D și continuă pe* fr D, *iar $f(D) = E$, atunci $f(\overline{D}) = \overline{E}$ și punctele frontieră ale lui E corespund la puncte frontieră ale lui D*: fr $E \subset f(\text{fr } D)$.

Mai întîi ultima afirmație: Dacă λ este în fr E (deci nu în E, domeniu), există un șir de puncte distincte w_k, din E, care converg către λ. Fie $w_k = f(z_k)$; punctele z_k sînt distincte, pentru că $z_k = z_{k'}$, ar atrage $w_k = w_{k'}$; deci ele au (cel puțin) un punct limită ζ, în D sau în fr D. Din șirul z_k să extragem un șir z_n convergînd către ζ. Avem încă $w_n = f(z_n) \to \lambda$ și din cauza continuității reprezentării, $\lambda = f(\zeta)$. Pe de altă parte, ζ nu poate fi în D, pentru că atunci, λ ar fi în E. Deci punctul frontieră λ corespunde punctului frontieră ζ.

De aici urmează și $f(\overline{D}) \supset \overline{E}$. Pe de altă parte, dacă ζ este un punct din $\overline{D}$ și $\lambda = f(\zeta)$, orice V_λ conține puncte din E, deoarece în virtutea continuității reprezentării, există o vecinătate U_ζ ale cărei puncte din D sînt duse în puncte din V_λ. Aceasta înseamnă că $\lambda \in \overline{E}$. Astfel, $f(\overline{D}) \subset \overline{E}$ și ținînd seama de relația inversă, urmează $f(\overline{D}) = \overline{E}$.

Observația 1. Este posibil ca la puncte din fr$D$ să corespundă puncte din E (interioare).

Exemplul 1. Fie $w = z^2$ și D domeniul din figura 176; E este aici discul $|w| < 1$. La punctele celor două raze ce limitează domeniul D corespund puncte din E, iar fr E corespunde numai arcului de cerc Γ.

Observația 2. Dintr-o teorema relativă la închiderea domeniilor știm că fr $\overline{E} \subset$ fr E. Deci avem și fr $\overline{E} \subset f($ fr $D)$.

3. Teorema 3. *În condițiile teoremei precedente, dacă reprezentarea* $f(D) = E$ *este biunivocă,* fr D *și* fr E *se corespund*: fr $E = f$ (fr D) *(nu necesar biunivoc).*

Ținînd seama de teorema precedentă, avem de dovedit că $f(\text{fr } D) \subset \subset \text{fr } E$, adică: la orice punct ζ din fr D corespunde un punct $\lambda = f(\zeta)$ în fr E. Într-adevăr, să presupunem contrariul: λ în E. Vom avea atunci și $\lambda = f(z_0)$ pentru un punct z_0 din D. Să considerăm o vecinătate $U_{z_0} \subset D$ și, în domeniul $\Delta = f(U_{z_0})$ din E, să luăm o vecinătate V_λ (vezi figura 177). În virtutea

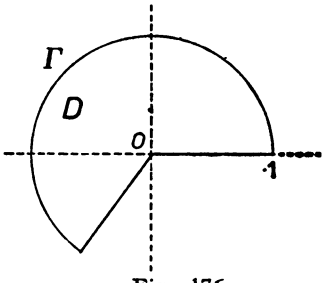

Fig. 176

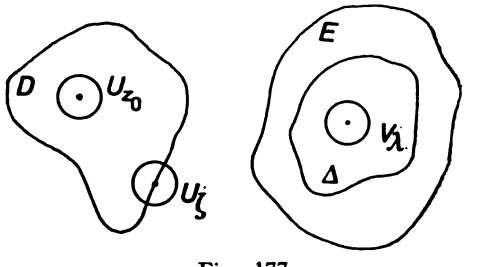

Fig. 177

continuității lui $f(z)$ pentru $z = \zeta$, există o vecinătate U_ζ, disjunctă de U_{z_0}, astfel că orice valoare w luată de $f(z)$ într-un punct z_1 din $U_\zeta \cap D$, se află în V_λ. Aceeași valoare va fi luată și într-un punct z_2 din U_{z_0} (pentru că $f(U_{z_0}) = \Delta \supset V_\lambda$); și cum $z_1 \neq z_2$ (pentru că U_ζ și U_{z_0} sînt disjuncte), ipoteza biunivocității este contrazisă.

Observație. Corespondența frontierelor poate să nu fie biunivocă.

Exemplul 2. Fie $w = z^2$ și D semicercul din fig. 178. Aici E este discul $|w| < 1$ minus raza $[0, 1)$. Corespondența dintre diametrul $(-1, +1)$ și raza $(0, 1)$ nu este biunivocă, deși D și E se corespund biunivoc.

4. Teorema 4. *Fie* $f(z)$ *olomorfă în domeniul* D *limitat de o curbă simplă închisă* C, *și finită pe* C *și continuă pe* $\overline{D}$. *Dacă* $f(z)$ *reprezintă (biunivoc sau nu) curba* C *pe o curbă* C' *de asemenea simplă și închisă, atunci domeniul* $E = f(D)$ *este interiorul curbei* C'.

După teorema penultimă, fr $E \subset C'$ (căci $f(\text{fr } D) = C'$). Domeniul E trebuie să aibă puncte comune cu unul (cel puțin) dintre domeniile determinate de curba C'. Dacă Δ este un asemenea domeniu, cum el este disjunct de fr E (pentru că fr $E \subset C'$), avem $\Delta \subset E$. Apoi, deoarece E nu conține punctul ∞ ($f(z)$ fiind olomorfă în D), Δ este interiorul curbei C' (care nu trece

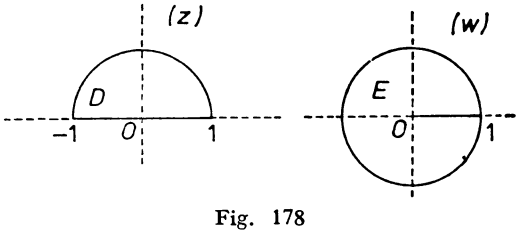

Fig. 178

prin acest punct). Totodată rezultă că E este disjunct de exteriorul lui C' (căci altfel l-ar conține). Astfel $E \subset \overline{\Delta} = \Delta \cup C'$, unde $\Delta \cap C' = \emptyset$.

Acum, dacă E ar avea un punct λ comun cu C', o vecinătate $V_\lambda \subset E$ ar conține puncte exterioare lui C', în contradicție cu $E \subset \overline{\Delta}$; deci E este disjunct de C' și în consecință $E \subset \Delta$. Ținînd seama de $\Delta \subset E$ stabilită mai sus, urmează $E = \Delta$.

Observație. Teorema se aplică și în cazul cînd $f(z)$ devine infinit pe curba C, dacă există o valoare w_0 pe care funcția n-o ia în $\bar{D}$. Demonstrația rămîne aceeași, w_0 jucînd rolul punctului ∞; Δ va fi domeniul determinat de C', în care nu se află w_0. (Bineînțeles, nu se mai poate vorbi de domeniu interior, pentru că C' trece prin punctul ∞.)

Teorema precedentă (ca și următoarea) rămîne valabilă cînd în loc de a presupune C' simplă, presupunem numai că C' determină numai două domenii. (Exemplu un cerc împreună cu o rază a sa.)

5. Următoarea teoremă, de aplicație frecventă, permite să deducem, sub anumite condiții, din biunivocitatea corespondenței frontierelor, biunivocitatea corespondenței domeniilor.

Teorema 5. *Fie $f(z)$ olomorfă în domeniul $\bar{D}$ limitat de o curbă simplă, închisă și rectificabilă C. Dacă $f(z)$ reprezintă biunivoc curba C pe o curbă C', de asemenea simplă și închisă, atunci reprezintă și domeniul D biunivoc pe interiorul curbei C'.*

Conform teoremei precedente, $E = f(D)$ este interiorul curbei C'. Cînd punctul ζ descrie o dată curba C într-un sens dat, punctul $\lambda = f(\zeta)$ descrie o dată curba C' într-un același sens, pentru că ζ și λ se corespund biunivoc. Dacă w este un punct din E, $f(\zeta)$ nu poate lua valoarea w pe curba C (căci $\lambda \neq w$). Astfel funcția $f(z) - w$ satisface condițiile în care se aplică principiul variației argumentului: numărul punctelor din D, în care $f(z) = w$, este egal cu variația lui $\frac{1}{2\pi} \arg(\lambda - w)$ pe curba C', descrisă o dată, într-un același sens, deci cu $\frac{2\pi}{2\pi} = 1$. (Evident, acest sens trebuie să fie cel direct, dacă C este descrisă în sensul direct.) Așadar, orice punct din E corespunde unui singur punct din D.

Observația 1. Condiția ca C să fie rectificabilă face ca această curbă să fie mărginită. În cazul cînd C nu este mărginită, fie α un punct exterior domeniului D. Transformarea biunivocă $z^* = \frac{1}{z - \alpha}$ duce (după teorema precedentă) curba C într-o curbă mărginită C^* și domeniul D în interiorul D^* al acestei curbe. Evident, toate condițiile teoremei vor fi satisfăcute de funcția $f\left(\frac{1}{z^*} + \alpha\right) = \varphi(z^*)$ pentru domeniul D^*, dacă C^* este rectificabilă. Sub această condiție teorema se va putea aplica funcției $\varphi(z^*)$ și domeniului D^*; acest domeniu, și deci și D, vor fi reprezentate biunivoc pe interiorul curbei C'.

Observația 2. Teorema precedentă se extinde de asemenea la cazul cînd $f(z)$, în loc de a fi olomorfă în $\bar{D}$, este olomorfă numai în D, dar continuă și finită în $\bar{D}$, deoarece principiul argumentului admite o extindere analogă (§ 93, nr. 2).

Observația 3. Se poate încă renunța la condiția ca $f(z)$ să fie finită pe curba C, dacă în schimb, există o valoarea w_0 pe care funcția n-o ia în $\bar{D}$. Într-adevăr, dacă $f(z)$ devine infinită într-un punct al curbei C (curba C' trece prin punctul infinit ∞), transformarea $w^* = \frac{1}{w - w_0}$ duce curba C' într-o curbă C^* mărginită și domeniul $E = f(D)$ într-un domeniu de asemenea

mărginit, deci în interiorul lui C^*. Astfel funcţia $w^* = \psi(z) = \dfrac{1}{f(z) - w_0}$ satisface condiţiile teoremei (inclusiv aceea de a fi finită pe C) şi deci reprezintă biunivoc domeniul D pe domeniul E^*. Cum transformarea efectuată este biunivocă, urmează că $w = f(z)$ reprezintă biunivoc D pe E.

Dacă se omite condiţia ca $f(z)$ să fie finită pe curba C, fără a se înlocui prin altă condiţie, teorema nu mai este adevărată.

Exemplul 3. *Funcţia*

$$w = f(z) = \mathrm{i}\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^3$$

reprezintă biunivoc cercul $|z| = 1$ pe axa reală; căci $z = e^{i\theta}$ ne dă $w = \operatorname{tg}^3 \dfrac{\theta}{2}$. Funcţia este infinită în punctul $z = -1$ al cercului, dar satisface celelalte condiţii ale teoremei. Or, cînd z descrie discul $|z| < 1$, $W = -\mathrm{i}\dfrac{z-1}{z+1}$ descrie semiplanul superior, iar $w = W^3$ descrie tot planul cu excepţia punctelor 0, ∞.

Observaţia 4. Să reţinem şi faptul, care reiese din demonstraţiile de mai sus, că în condiţiile teoremei, punctele corespunzătoare ale curbelor C şi C' se mişcă în acelaşi sens faţă de domeniile corespunzătoare.

6. Teorema precedentă este un criteriu suficient pentru univalenţa unei funcţii într-un domeniu. În legătură cu aceasta vom mai demonstra.

Teorema 6. *Dacă funcţiile olomorfe $f_n(z)$ univalente în domeniul D, converg uniform în D către funcţia $f(z)$ neconstantă, atunci şi $f(z)$ este univalentă în D.*

Se ştie că $f(z)$ este olomorfă în D (teorema lui Weierstrass). Dacă nu ar fi univalentă, ar exista două puncte z_1, z_2, unde $f(z_1) = f(z_2) = a$.

Să considerăm funcţiile $f_n(z) - a$, care converg uniform către $f(z) - a$, şi două vecinătăţi U_{z_1}, U_{z_2}, disjuncte. Deoarece $f(z) - a$ are în fiecare din acestea cîte un zero (z_1, respectiv z_2), după teorema lui Hurwitz $f_n(z) - a$ va avea de asemenea cîte un zero, pentru n destul de mare; cu alte cuvinte $f_n(z)$ va lua valoarea a în două puncte, contrar ipotezei.

7. Dacă $f(z)$ este univalentă şi olomorfă în domeniul D, avem $f'(z) \neq 0$ în D. Reciproca nu este adevărată.

Exemplul 4. $f(z) = e^z$ *într-un domeniu unde* y *poate varia cu* 2π.

Se poate însă afirma:

Teorema 7. *Dacă $f(z)$ este olomorfă într-un domeniu convex D şi există un număr α astfel încît* $\operatorname{Re}[e^{i\alpha} f'(z)] > 0$ *în D, atunci $f(z)$ este univalentă în D. (Wolff—Namura).*

Într-adevăr, dacă $f(z)$ ar lua aceeaşi valoare în două puncte a, b din D, am avea

$$\int_{ab} f'(z)\,\mathrm{d}z = f(b) - f(a) = 0,$$

integrala fiind luată pe segmentul $\overline{ab}$ (conținut în D prin ipoteză), ceea ce se scrie încă, reprezentînd segmentul $\overline{ab}$ prin $z = a + t(b - a)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$:

$$(b - a)\int_0^1 (f'(z))_{\overline{ab}}\, dt = 0, \text{ sau} \int_0^1 [e^{i\alpha} f'(z)]_{\overline{ab}}\, dt = 0.$$

Dar prin ipoteză $\operatorname{Re}[e^{i\alpha} f'(z)] > 0$ și relația precedentă nu poate avea loc.

Corolar. *Dacă $f(z)$ este olomorfă în domeniul convex D și există un număr α așa ca* $\operatorname{Re}[e^{i\alpha} f(z)] > 0$ *în D, atunci funcția* $\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)\, dz$ *(z_0 fix și z variabil în D) este univalentă în D.*

(Se observă că integrala este uniformă, D fiind simplu conex.)

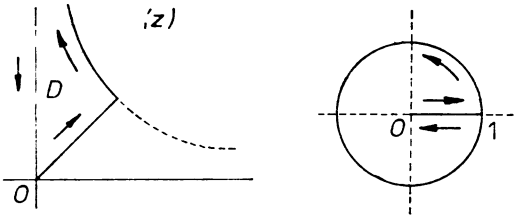

Fig. 179

8. *Alte exemple.* **5.** *Fie $w = e^{z^2}$, în domeniul D limitat de segmentul $x = y$ $(0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\pi})$, arcul de hiperbolă $y = \frac{\pi}{x}$ $(\sqrt{\pi} \geqslant x > 0)$ și semiaxa $x = 0$, $y \geqslant 0$* (vezi figura 179).

Dacă $w = \rho e^{i\omega}$, atunci $\rho = e^{x^2 - y^2}$, $\omega = 2xy$. Cele trei arce de curbă sînt reprezentate biunivoc pe: cercul $|w| = 1$, raza $\overline{1\ 0}$ și raza $\overline{0\ 1}$, această rază fiind considerată ca un segment dublu. Domeniul este reprezentat biunivoc pe cercul $|w| < 1$ tăiat după această rază. (Se va observa că conturul lui D nu este rectificabil, dar devine astfel printr-o transformare de forma $z^* = \frac{1}{z - \alpha}$, și că $f(z)$ este continuă și finită pe contur.)

6. *Funcția întreagă* $f(z) = \int_0^1 \varphi(t) \cos tz\, dt$ *unde $\varphi(t)$ este o funcție pozitivă, este univalentă în banda $0 < x < \pi$.*

Într-adevăr $\operatorname{Re}[-f'(z)] = \int_0^1 t\,\varphi(t) \sin tx \operatorname{ch} ty\, dt > 0$, integrandul fiind >0 în intervalul de integrare.

§ 95. Inversa locală a unei funcții meromorfe

1. Fiind dată o funcție meromorfă $f(z) = w$, în domeniul D, și care reprezintă acest domeniu pe un domeniu E, corespondența inversă (de la E la D) definește o *funcție inversă* $\varphi(w) = z$, în domeniul E, și care este în general multiformă. Am studiat mai de mult (cu ajutorul teoriei funcțiilor implicite reale) funcția inversă, limitînd funcția $f(z)$ la o vecinătate destul de mică a unui punct z_0 din D; am obținut atunci o funcție inversă $\varphi_0(w)$, definită într-o vecinătate a punctului $w_0 = f(z_0)$; adică o *funcție inversă locală*, o parte a funcției inverse globale $\varphi(z)$. Acest studiu l-am făcut de altfel în condiții restrictive: z_0 finit, $f(z)$ olomorf în z_0 și $f'(z_0) \neq 0$; atunci inversa $\varphi_0(w)$ este și ea olomorfă în w_0. Vom relua problema lăsînd la o parte aceste condiții și folosind mijloacele cîștigate între timp.

În condiții mai generale, inversa locală poate avea, cum se va vedea, un punct critic algebric.

Comportarea unei funcții (multiforme) în jurul unui punct critic algebric este aceea a funcției $z^{\frac{1}{n}}$ în jurul lui $z = 0$. Dînd o formă mai precisă acestei definiții, o vom formula astfel: Un punct critic algebric z_0 al unei funcții multiforme $f(z)$ este caracterizat prin condițiile:

1° într-o vecinătate U_{z_0} destul de mică, dar arbitrară, funcția are un număr finit m de determinări distincte și uniforme în vecinătatea tăiată după o rază plecînd din z_0,

2° aceste determinări sînt legate între ele prin continuitate în vecinătatea întreagă (netăiată). Bineînțeles, în U_{z_0} pot exista și alte grupe de determinări ale funcției, legate la fel între ele. Un asemenea grup de determinări se numește *ciclu* de origine z_0, pentru că, după cum vom dovedi mai tîrziu, determinările unui ciclu pot fi numerotate astfel încît un circuit în jurul punctului z_0 (de ex. un cerc de centru z_0 descris o dată, în sens direct) duce determinarea w_1 (urmărită prin continuitate de-a lungul lui) în determinarea w_2, apoi w_2 în w_3, ..., w_{n-1} în w_m și w_m în w_1.

2. Teorema locală a funcțiilor inverse. *Fie $f(z)$ o funcție avînd un punct regulat sau pol în z_0 și luînd acolo valoarea $f(z_0) = w_0$ cu multiplicitatea m; fie U_{z_0} o vecinătate circulară pe al cărei contur $f(z)$ este finită și continuă, iar în interior regulată [cu eventuala excepție a punctului z_0 (cînd este pol)], și astfel încît în $\bar{U}_{z_0}$, $f(z) \neq w_0$ pentru $z \neq z_0$. Există atunci o vecinătate corespunzătoare V_{w_0}, în care se poate defini o funcție $\varphi(w) = z$ (element al funcției inverse globale), în mod unic, prin condițiile de a verifica identic ecuația $f(z) = w$ (adică $f(\varphi(w)) = w$ în V_{w_0}) și de a lua valori numai în U_{z_0}, și în particular valoarea $\varphi(w_0) = z_0$.*

Dacă $m = 1$, $\varphi(w)$ este olomorfă în V_{w_0} cînd z_0 este finit și are numai un pol simplu în w_0 cînd $z_0 = \infty$.

Dacă $m > 1$, w_0 este un punct critic algebric, în care cele m determinări ale funcției $\varphi(w)$ formează un ciclu, și sînt distincte și olomorfe în vecinătatea V_{w_0} tăiată după o rază, dacă U_{z_0} este destul de mică.

În orice punct unde $\varphi(w)$ (sau o determinare a ei) este olomorfă, avem

$$\varphi'(w) = \frac{1}{f'(z)} \quad cu \ z = \varphi(w).$$

Demonstrație. Vecinătatea U_{z_0} fiind luată așa ca să satisfacă condiția din enunț, vecinătatea corespunzătoare V_{w_0} va fi fixată ca în corolarul 2 al teoremei lui Rouché. Atunci, conform acestui corolar, ecuația $f(z) - w = 0$ va avea m soluții în U_{z_0}, pentru orice w din V_{w_0}. Făcînd să corespundă fiecărui w din V_{w_0} cele m soluții ale ecuației, definim în V_{w_0} o funcție $\varphi(w) = z$, care ia valori în U_{z_0}. Evident, aceasta este unica funcție care satisface condițiilor din enunț; $f(\varphi(w)) = w$ în V_{w_0} și $\varphi(w) = z$, conținut în U_{z_0}. Aceste condiții atrag $\varphi(w_0) = z_0$ pentru că ecuația $f(z) - w_0 = 0$ nu are, în U_{z_0}, decît rădăcina $z = z_0$, de multiplicitate m. Cele m valori ale funcției $\varphi(w)$ se confundă așa dar pentru $w = w_0$.

Mai mult, dacă în cazul $m > 1$, luăm vecinătatea U_{z_0} atît de mică, încît $f'(z) \neq 0$ pentru orice $z \neq z_0$ (posibil, fiindcă zerourile lui $f'(z)$ sînt izolate), valorile lui $\varphi(w)$ vor fi distincte pentru orice $w \neq w_0$ (adică simple); căci pentru un asemenea w, rădăcinile ecuației $f(z) - w = 0$ sînt simple (fiind diferite de z_0).

I. Pentru a demonstra celelalte afirmații ale teoremei, vom presupune deocamdată z_0 și w_0 finiți (deci z_0 punct regulat).

1°. $m = 1$, adică w_0 valoare simplă a funcției $f(z)$ în $z = z_0$, ceea ce revine la $f'(z_0) \neq 0$. După corolarul 2 al teoremei lui Rouché, la vecinătatea U_{z_0} de rază r corespunde vecinătatea V_{w_0} de rază

$$\rho(r) = \min_{C(r)} |f(z) - w_0|,$$

unde $C(r)$ este circumferința $|z - z_0| = r$. Vecinătatea V_{w_0} cea mai mare, în care putem defini (cu procedeul nostru) inversa locală $\varphi(w)$, va fi dată de maximul lui $\rho(r)$; acesta însă nu corespunde întotdeauna cercului U_{z_0} de rază maximă ce satisface condițiile teoremei, căci funcția $\rho(r)$ nu este, în general, crescătoare. (Vezi exemplele 2, 3).

Se poate demonstra ușor că această funcție este continuă într-un disc închis în care $f(z)$ este continuă (vezi Nota de la urmă). De aici urmează că, fiind dat un punct w în vecinătatea V_{w_0} (fixată), putem alege un cerc C' de rază r', în U_{z_0}, astfel ca vecinătatea corespunzătoare V'_{w_0} să conțină punctul w (adică $\rho(r') > |w - w_0|$); căci avem $|\rho(r) - \rho(r')| < \rho(r) - |w - w_0|$ pentru $|r - r'| < \delta$. Cercul C' fiind astfel ales, putem scrie

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{zf'(z)}{f(z) - w}\,dz. \tag{50}$$

Într-adevăr, integrandul este olomorf pe C' și nu are în interiorul lui C' decît un pol: $z = \varphi(w)$, care este simplu și are reziduul

$$\varphi(w)\frac{f'(\varphi(w))}{f'(\varphi(w))} = \varphi(w).$$

(Deoarece ecuația $f(z) - w = 0$ nu are, în U_{z_0}, decît o rădăcină și aceasta este $\varphi(w)$, w fiind conținut în V'_{w_0}.) Cînd $f(z)$ este olomorf pe frontiera C a vecinătății U_{z_0}, se poate lua în (50) $C' = C$.

Să presupunem acum că punctul w descrie vecinătatea V'_{w_0}. Cum integrandul din (50) este continuu ca funcție de (z, w) și olomorf ca funcție de w pentru z pe C' și w în V'_{w_0}, teorema lui De la Vallée-Poussin ne asigură că funcția $\varphi(w)$ reprezentată de (50) este olomorfă în V'_{w_0}. Deoarece, apoi, orice punct din V_{w_0} poate fi cuprins într-o vecinătate V'_{w_0}, funcția $\varphi(w)$ este olomorfă în V_{w_0}.

Derivata $\varphi'(w)$ ne este dată de către aceeași teoremă:

$$\varphi'(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} \frac{zf'(z)}{(f(z) - w)^2}\,dz.$$

O putem însă obține și derivînd identitatea $f(\varphi(w)) = w$, ceea ce dă

$$f'(\varphi(w))\,\varphi'(w) = 1, \quad \varphi'(w) = \frac{1}{f'(\varphi(w))}.$$

Vom mai observa că funcția olomorfă $\varphi(w)$ admite o dezvoltare taylorian de forma

$$\varphi(w) = z_0 + (w - w_0)P(w - w_0) \qquad P(0) \neq 0, \tag{51}$$

unde seria $P(w - w_0)$ trebuie să aibă primul termen $P(0) \neq 0$, deoarece $\varphi'(w_0) = \dfrac{1}{f'(z_0)} \neq 0$. Această dezvoltare este valabilă în cercul de rază egală cu $\max \rho(r)$.

2°. $m > 1$, adică $f'(z)$ în U_{z_0} este de forma

$$f(z) = w_0 + (z - z_0)^m Q(z - z_0), \quad Q(0) \neq 0. \tag{52}$$

Să considerăm funcția multiformă, cu m valori

$$t = g(z) = \sqrt[m]{f(z) - w_0} = (z - z_0)\sqrt[m]{Q(z - z_0)}.$$

Ea are m valori g_k distincte pentru $z \neq z_0$ fiindcă $f(z) \neq w_0$ pentru $z \neq z_0$ (după definiția vecinătății U_{z_0}). Dacă impunem vecinătății U_{z_0} și condiția

$$|Q(z - z_0) - Q(0)| < |Q(0)|$$

(realizabilă fiindcă $Q(z - z_0)$ este continuă), $\arg Q(z - z_0)$ va fi uniform în U_{z_0}, deoarece punctul $\zeta = Q(z - z_0)$ rămîne în cercul de centru $\zeta_0 = Q(0)$ și rază $|\zeta_0|$. Atunci determinările lui $\sqrt[m]{Q(z - z_0)}$ vor fi uniforme și deci olomorfe în U_{z_0}. Dacă una din ele are dezvoltarea taylorianã $Q_1(z - z_0)$, celelalte sînt $e^{-\frac{2k\pi i}{m}} Q_1(z - z_0)$ $(k = 0, \ldots, m - 1)$ și avem pentru determinările funcției $g(z)$:

$$t = g_k(z) = e^{-\frac{2k\pi i}{m}} (z - z_0) Q_1(z - z_0), \quad Q_1(0) \neq 0, \quad \text{deoarece} \quad g'(z_0) \neq 0.$$

Pentru fiecare valoare a lui k, această funcție are (după 1°) o inversă locală, definită într-o vecinătate W_0 din planul t, de rază egală cu

$$\min_C |g(z)| = \min_C \sqrt[m]{|f(z) - w_0|} = \sqrt[m]{\rho}$$

($\rho = \min_C |f(z) - w_0|$ fiind raza lui V_{w_0}); și această inversă are o dezvoltare taylorianã de forma (51):

$$z = \psi_k(t) = z_0 + e^{\frac{2k\pi i}{m}} tP(e^{\frac{2k\pi i}{m}} t) \quad P(0) \neq 0,$$

unde seria P are coeficienți independenți de k. Funcțiile inverse sînt caracterizate prin condițiile:

$$z = \psi_k(t) \in U_0, \quad g_k(\psi_k(t)) \equiv t \quad \text{în } W_0.$$

Pe de altă parte, funcția inversă $\varphi(w)$ a funcției $f(z)$ este caracterizată prin condițiile

$$z = \varphi(w) \in U_{z_0}, \quad f(\varphi(w)) \equiv w \quad \text{în } V_{w_0}.$$

Punînd

$$w = w_0 + t^m, \tag{53}$$

aceste condiții se scriu

$$\varphi(w_0 + t^m) \in U_{z_0}, \quad f(\varphi(w_0 + t^m)) \equiv w_0 + t^m \quad \text{în } W_0$$

(căci dacă w descrie V_{w_0}, t descrie vecinătatea W_0 de rază $\sqrt[m]{\rho}$). A doua condiție este echivalentă după (52) cu

$$[g(\varphi(w_0 + t^m))]^m \equiv t^m \quad \text{sau cu} \quad g_k(\varphi(w_0 + t^m)) \equiv t.$$

Or, aceste condiții sînt satisfăcute și de funcțiile $\psi_k(t)$. Deci cele m determinări ale funcției $\varphi(w_0 + t^m)$ sînt egale cu $\psi_k(t)$:

$$\varphi(w_0 + t^m) = z_0 + e^{\frac{2k\pi i}{m}} tP(e^{\frac{2k\pi i}{m}} t) \quad \text{în } W_0.$$

Revenind la variabila w dată de (53), avem cele m determinări ale funcției $\varphi(w)$:

$$\varphi(w) = z_0 + (w - w_0)^{\frac{1}{m}} P((w - w_0)^{\frac{1}{m}}), \quad P(0) \neq 0, \tag{54}$$

unde $(w - w_0)^{\frac{1}{m}} = e^{\frac{2k\pi i}{m}} t$ are m determinări.

Ea este astfel reprezentată printr-o serie de puteri ale unei determinări a radicalului $(w - w_0)^{\frac{1}{m}}$; cele m determinări ale acestuia ne vor da cele m determinări ale funcției $\varphi(w)$.

Cum am observat mai sus, dacă luăm vecinătatea U_{z_0} destul de mică, valorile date de (54) vor fi distincte pentru $z \neq z_0$. Toate se obțin din una dintre ele, înlocuind $(w - w_0)^{\frac{1}{m}}$ prin $e^{\frac{2k\pi i}{m}} (w - w_0)^{\frac{1}{m}}$. Dacă ducem în V_{w_0} o tăietură după o rază, determinările radicalului $(w - w_0)^{\frac{1}{m}}$ vor fi separate și olomorfe în domeniul rămas. Seria (54) fiind uniform convergentă (ca serie de puteri) în orice domeniu închis conținut în vecinătatea V_{w_0} tăiată, urmează (teorema lui Weierstrass) că determinările funcției $\varphi(w)$, separate în acest domeniu, vor fi funcții olomorfe, $\varphi_k(w)$.

Dacă însă punctul w descrie un circuit în sens direct în jurul lui w_0, $(w - w_0)^{\frac{1}{m}}$ se multiplică cu $e^{\frac{2\pi i}{m}}$; deci o determinare φ_k a funcției $\varphi(w)$ devine φ_{k+1} (și φ_m devine φ_1). Așadar determinările funcției $\varphi(w)$ constituie un ciclu avînd ca origine punctul critic algebric w_0.

Vom mai observa că rezultatele privitoare la cazul $m = 1$ pot fi considerate ca o particularizare a precedentelor; așa de exemplu pentru $m = 1$, (54) devine (51).

Cazurile cînd z_0 și w_0 nu sînt finiți se reduc la precedentul în felul următor:

II. $z_0 = \infty$, w_0 finit. Considerăm funcția $f\left(\frac{1}{z'}\right) = w$, care este olomorfă în vecinătatea lui $z' = 0$, și ia valoarea w_0 în acest punct. Rezultatele precedente se aplică acestei funcții în niște vecinătăți U'_0 și V_{w_0}, deci se aplică funcției $f(z)$ într-o vecinătate U_∞ ce corespunde la U'_0 prin transformarea $z = \frac{1}{z'}$, și în vecinătatea V_{w_0}. Inversa locală a funcției $f\left(\frac{1}{z}\right)$ avînd o dezvoltare de forma

$$z' = \varphi_1(w) = (w - w_0)^{\frac{1}{m}} P_1((w - w_0)^{\frac{1}{m}}), \quad P_1(0) \neq 0$$

inversa funcției $f(z)$, care este evident $\frac{1}{\varphi_1(w)}$, are o dezvoltare de forma

$$z = \varphi(w) = (w - w_0)^{-\frac{1}{m}} P((w - w_0)^{\frac{1}{m}}) \quad P(0) \neq 0. \tag{55}$$

III. z_0 finit, $w_0 = \infty$. Consdierăm funcţia $\frac{1}{f(z)} = w'$, olomorfă în z_0 şi egală cu 0 în acest punct. Teorema se aplică acestei funcţii în nişte vecinătăţi U_{z_0} şi V'_0, iar funcţiei date $f(z)$ în vecinătăţile U_{z_0} şi V_∞ — transformata lui V'_0 prin $w = \frac{1}{w'}$. Funcţia inversă este acum

$$z = \varphi(w) = z_0 + w^{-\frac{1}{m}} P(w^{-\frac{1}{m}}) \qquad P(O) \neq 0. \tag{56}$$

IV. $z_0 = \infty$, $w_0 = \infty$. Considerăm funcţia $\frac{1}{f\left(\frac{1}{z'}\right)} = w'$ şi obţinem la fel pentru nişte vecinătăţi U_∞ şi V_∞:

$$z = \varphi(w) = w^{\frac{1}{m}} P(w^{-\frac{1}{m}}) \qquad P(O) \neq 0. \tag{57}$$

Cînd $z_0 = \infty$ şi $m = 1$, inversa are un pol simplu, cum se vede din (55) şi (57).

Observaţie. Dezvoltările (54)—(57) arată că şi atunci cînd $m > 1$, determinările funcţiei inverse tind la z_0 cînd $w \to w_0$. Din acest motiv w_0 este numit, în cazul $z_0 = \infty$ şi $m > 1$, ***punct critic polar.***

Notă: Continuitatea funcţiei

$$\rho(r) = \min_C |f(z) - w_0|, \quad C: |z - z_0| = r; \quad w_0 = f(z_0)$$

într-un disc închis Γ *de centru* z_0, *în care* $f(z)$ *este continuă (în sesns larg).*

Fie r, r' razele cercurilor C, C' de centru z_0. Pe C există un punct ζ astfel că $\rho(r) = |f(\zeta) - w_0|$. Fiind dat $\varepsilon > 0$, există, în virtutea continuităţii, un $\delta > 0$ aşa că $|f(\zeta) - f(z_1)| < \varepsilon$ pentru orice z_1 (din Γ) conţinut într-o vecinătate U_ζ de rază δ. Dacă $|r - r'| < \delta$, cercul C' conţinînd asemenea puncte z_1, avem

$$\rho(r') = \min_{C'} |f(z) - w_0| \leqslant |f(z_1) - w_0|.$$

Cum $|(f(z_1) - w_0) - (f(\zeta) - w_0)| < \varepsilon$, avem în consecinţă

$$|f(z_1) - w_0| < |f(\zeta) - w_0| + \varepsilon,$$

deci

$$\rho(r') < \rho(r) + \varepsilon \quad \text{pentru} \quad |r - r'| < \delta.$$

Schimbînd rolurile cercurilor C, C' se vede că putem lua pe δ şi aşa ca

$$\rho(r) < \rho(r') + \varepsilon \quad \text{pentru} \quad |r - r'| < \delta.$$

Vom avea atunci:

$$|\rho(r) - \rho(r')| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad |r - r'| < \delta,$$

ceea ce dovedeşte continuitatea funcţiei $\rho(r)$ în Γ.

3. *Seria lui Lagrange.* Ne punem problema de a găsi efectiv dezvoltarea tayloriană a funcţiei inverse locale $z = \varphi(w)$, în cazul cînd z_0 şi w_0 fiind finiţi

iar $f'(z_0) \neq 0$, această funcție este olomorfă în V_{w_0}. Mai general, fiind dată o funcție $F(z)$, olomorfă în cercul U_{z_0} (unde se găsesc valorile lui $\varphi(w)$), vom căuta dezvoltarea tayloriană a funcției $F(\varphi(w))$, olomorfă în V_{w_0}. Pentru aceasta ne servim de formula următoare, care se va justifica ușor (vezi mai sus cazul $F = z$):

$$F(\varphi(w)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'} F(\zeta)\,\frac{f'(\zeta)\,d\zeta}{f(\zeta) - w},$$

unde C' este un cerc în U_{z_0}, ales astfel ca vecinătatea V'_{w_0} ce-i corespunde să conțină punctul w. Teorema lui De la Vallée-Poussin fiind aplicabilă într-o vecinătate V'_{w_0} a lui w_0 (așa cum am văzut mai sus),

$$\left[\frac{d^n F(\varphi(w))}{dw^n}\right]_{w=w_0} = \frac{n!}{2\pi i}\int_{C'} \frac{F(\zeta) f'(\zeta)\,d\zeta}{[f(\zeta) - w_0]^{n+1}} =$$

$$= -\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{C'} F(\zeta)\,d\left(\frac{1}{[f(\zeta) - w_0]^n}\right) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int_{C'} \frac{F'(\zeta)\,d\zeta}{[f(\zeta) - w_0]^n}.$$

(Am integrat prin părți și am observat că partea integrată este nulă, fiind variația pe C' a unei funcții uniforme.) Ultimul integrand are, în C', polul de ordin n, $\zeta = \varphi(w_0) = z_0$, cu reziduul

$$\frac{1}{(n-1)!}\left\{\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\,\frac{F'(\zeta)\,(\zeta - z_0)^n}{[f(\zeta) - w_0]^n}\right\}_{\zeta = z_0}.$$

Notînd

$$\Phi(\zeta) = \frac{\zeta - z_0}{f(\zeta) - w_0},$$

avem așadar

$$\left[\frac{d^n F(\varphi(w))}{dw^n}\right]_{w=w_0} = \left(\frac{d^{n-1} F'(\zeta)\,\Phi(\zeta)^n}{d\zeta^{n-1}}\right)_{\zeta = z_0}$$

și prin urmare dezvoltarea tayloriană căutată este:

$$F(\varphi(w)) = F(z_0) + \sum_1^\infty \frac{1}{n!}\left(\frac{d^{n-1} F'(\zeta)\,\Phi(\zeta)^n}{d\zeta^{n-1}}\right)_{\zeta = z_0} (w - w_0)^n. \tag{58}$$

(Primul termen al dezvoltării este $F(\varphi(w_0)) = F(z_0)$.)

În particular, pentru $F(z) = z$ avem

$$\varphi(w) = z_0 + \sum_1^\infty \frac{1}{n!}\left(\frac{d^{n-1}\Phi(\zeta)^n}{d\zeta^{n-1}}\right)_{\zeta = z_0} (w - w_0)^n. \tag{58'}$$

Aceste dezvoltări sînt valabile cel puțin în cercul de rază egală cu $\max \rho(r)$.

Aplicație. Să considerăm ecuația

$$z - wf(z) = 0 \tag{59}$$

unde $f(z)$ este olomorfă în $z = 0$ și $f(0) \neq 0$. Această ecuație în z are ca soluție inversa locală a funcției $w = \frac{z}{f(z)}$, corespunzătoare soluției particulare $z = 0$, $w = 0$.

În acest caz

$$\varphi(\zeta) = \frac{\zeta}{\dfrac{\zeta}{f(\zeta)}} = f(\zeta)$$

și (58′) ne dă

$$z(w) = \sum_1 \frac{1}{n!} \left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} f(\zeta)^n}{\mathrm{d}\zeta^{n-1}} \right)_{\zeta=0} w^n. \tag{60}$$

Este seria lui Lagrange propriu zisă. Ea este valabilă în discul $|w| < \rho$, unde $\rho = \min_C \left| \dfrac{z}{f(z)} \right|$ și C este un cerc $|z| = r$, care poate fi oricare în domeniul unde $f(z)$ este olomorfă și diferită de zero. (Deoarece funcția $\dfrac{z}{f(z)}$ nu se va anula decît în $z = 0$.) Bineînțeles se va lua ρ cît mai mare posibil.

În practică, dacă s-a găsit o barieră inferioară

$$0 < \tau(r) \leqslant \left| \frac{z}{f(z)} \right| \quad \text{pentru} \quad |z| = r,$$

(cerc conținut în domeniul în care $f(z)$ este olomorfă și diferită de zero), se va lua pentru r, valoarea r_0 care face maximă această funcție $\tau(r)$ și pentru ρ, $\rho_0 = \tau(r_0)$.

4. *Exemple.* 1. *Ecuația lui Kepler*

$$z = a + w \sin z \quad a \text{ real} \neq k\pi^{28})$$

are o soluție locală $z = z(w)$ *care ia valoarea* $z = a$ *pentru* $w = 0$. Ea se pune sub forma (59) făcînd $z = \zeta + a$:

$$\zeta - w \sin(\zeta + a) = 0.$$

Aplicînd (60) găsim soluția

$$z(w) = a + \sum_1 \frac{w^n}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}a^{n-1}} \sin^n a.$$

Avem de căutat o barieră inferioară pentru $\left| \dfrac{z-a}{\sin z} \right|$ cu $z - a = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ și r oarecare. Avem

$$\left| \sin(a + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \right| = \frac{1}{2} \left| \mathrm{e}^{\mathrm{i}[a + r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)]} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}[a + r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)]} \right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2} (\mathrm{e}^{r\sin\theta} + \mathrm{e}^{-r\sin\theta}) = \operatorname{ch}(r \sin\theta) \leqslant \operatorname{ch} r.$$

Deci putem lua

$$\tau(r) = \frac{2r}{\mathrm{e}^r + \mathrm{e}^{-r}}.$$

Maximul acestei expresii are loc pentru

$$\mathrm{e}^r + \mathrm{e}^{-r} - r(\mathrm{e}^r - \mathrm{e}^{-r}) = 0 \quad \text{sau} \quad \mathrm{e}^{2r}(1 - r) + 1 + r = 0.$$

Ecuația are o rădăcină între 1 și 2, $r_0 \sim 1{,}19967$, la care corespunde $\rho_0 = \tau(r_0) = 0{,}6627$ (prin lipsă).

2. *Să dezvoltăm soluția ecuației în* w

$$w = z\,\mathrm{e}^z$$

care ia valoarea $w = 0$ *pentru* $z = 0$.

---

[28]) Pentru $a = k\pi$ soluția este evidentă: $z = k\pi$.

Aplicînd (58') avem $\varphi(z) = e^{-z}$, $\varphi^n(z) = e^{-nz}$, $\dfrac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \varphi^n(z) = (-n)^{n-1} e^{-nz}$ și obținem dezvoltarea:

$$z = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{n^{n-1}}{n!} w^n.$$

În acest caz

$$\rho = \min_{|z|=r} |z e^z| = \min_{|z|=r} r e^x = r e^{-r};$$

r poate fi luat arbitrar fiindcă ze^z nu se anulează decît pentru $z = 0$ și ρ este maxim pentru $r = 1$, atingînd valoarea $\frac{1}{e}$. Astfel dezvoltarea precedentă este valabilă pentru $|w| < \frac{1}{e}$. Acesta este și cercul de convergență al seriei deoarece

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \to e.$$

3. *Pentru funcția* $w = z(1+z)^p$ (p *real*), *funcția inversă locală ce ia valoarea* 0 *pentru* $w = 0$ *este*

$$z = w + \sum_2^\infty (-1)^{n-1} \frac{np(np+1) \ldots (np+n-2)}{n!} w^n.$$

(Aici $\varphi = (1+\zeta)^{-p}$). În cazul acesta

$$\rho = \min_{|z|=r} |z(1+z)^p| = r(1 \mp r)^p,$$

cu semnul superior cînd $p \geqslant 0$ și cel inferior cînd $p < 0$; cînd $p > 0$ trebuie presupus $r < 1$ spre a evita punctul -1 unde $f(z)$ se anulează, și de asemenea cînd p nu este întreg $\leqslant 0$, spre a evita punctul critic $z = -1$ (atunci determinarea lui $f(z)$ este aceea care se anulează în $z = 0$, conform enunțului). Dacă $p \geqslant 0$ sau $p < -2$, ρ este maxim pentru $r_0 = \pm \dfrac{1}{p+1}$, atingînd valoare $\rho_0 = \pm \dfrac{1}{p+1} \left(\dfrac{p}{p+1}\right)^p$. Cînd $-2 < p < 0$, $p \neq -1$, valoarea precedentă a lui r_0 căzînd în afara intervalului $0 < r < 1$, avem maxim pentru $r = 1$, cu $\rho_0 = 2^p$. Pentru $p = -1$, maximul lui $\rho = \dfrac{r}{1+r}$ este $\rho_0 = 1$. Dezvoltarea de mai sus este valabilă pentru $|w| < \rho_0$.

4. *Inversa locală a funcției* $w = z^2(1+z)$, *care ia valoarea* $z = 0$ *pentru* $w = 0$.

Punem $t^2 = w$ și avem $t = z\sqrt{1+z}$, unde alegem determinarea radicalului ce are valoarea 1 în $z = 0$, determinare definită în discul $|z| < 1$. Aplicînd seria lui Lagrange acestei ecuații, obținem:

$$z = t + \sum_2^\infty \frac{1}{n!} \left[\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}} (1+\zeta)^{-\frac{n}{2}}\right]_{\zeta=0} t^n.$$

Deci

$$z = w^{\frac{1}{2}} + \sum_2^\infty (-1)^{n-1} \frac{(n+2)(n+4) \ldots (3n-4)}{(n-1)!\, 2^{n-1}} w^{\frac{n}{2}}.$$

Punctul $w = 0$ este critic pentru funcția inversă, fiind originea unui ciclu de 2 determinări. Avem

$$\rho = \min_{|z|=r} |z\sqrt{1+z}| = r\sqrt{1-r}$$

(trebuie să luăm $r < 1$ spre a evita punctul critic $z = -1$). Valoarea maximă a lui ρ este $\rho_0 = \frac{2}{\sqrt{27}}$ $\left(\text{pentru } r = \frac{2}{3}\right)$. Dezvoltarea este deci valabilă pentru $|t| < \rho_0$ sau $|w| < \frac{4}{27}$.

5. *Pentru funcția din exemplul precedent, să se dezvolte în serie inversa locală care ia valoarea* $z = \infty$ *pentru* $w = \infty$.

Punem $w = \frac{1}{w'}$, $z = \frac{1}{z'}$ și considerăm funcția $w' = \frac{z'^3}{1+z'}$ pentru $z' = 0$, $w' = 0$.

Apoi punem $w' = t^3$, $t = z'(1+z')^{-\frac{1}{3}}$ cu determinarea radicalului ce ia valoarea 1 în $z' = 0$. De aici

$$z' = t + \sum_2^\infty \frac{1}{n!}\left[\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}(1+\zeta)^{\frac{n}{3}}\right]_{\zeta=0} t^n =$$

$$= w'^{\frac{1}{3}} + \sum_2^\infty \frac{1}{n!}\frac{n}{3}\left(\frac{n}{3}-1\right)\ldots\left(\frac{n}{3}-n+2\right)w'^{\frac{n}{3}} =$$

$$= w'^{\frac{1}{3}}\left(1 + \frac{1}{3}w'^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{81}w' + \ldots.\right),$$

$$z = w^{\frac{1}{3}}\left(1 - \frac{1}{3}w^{-\frac{1}{3}} + \frac{1}{9}w^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{81}w^{-1} + \ldots.\right).$$

Punctul $w = \infty$ este critic polar, origine a unui ciclu de 3 determinări.

6. *Să considerăm ecuația*

$$z = \zeta + w\frac{z^2-1}{2}.$$

Soluția $z(w)$ *care ia valoarea* ζ *pentru* $w = 0$ *este*

$$z = \zeta + \sum_1^\infty \frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left(\frac{\zeta^2-1}{2}\right)^n w^n$$

într-un cerc $|w| < \rho$ *(ce depinde de* ζ*). Vom arăta că seria este uniform convergentă cu privire la* ζ.

Să punem în serie în loc de ζ, $\eta = ik$ $(k > 0)$: seria va fi convergentă pentru $|w| \leqslant \rho_1$. Termenii seriei fiind polinomi în ζ, vom avea dacă $|\zeta| \leqslant k$ și $|w| \leqslant \rho_1$,

$$\left|\frac{1}{n!}\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left(\frac{\zeta^2-1}{2}\right)^n w^n\right| \leqslant \frac{1}{n!}\left|\frac{d^{n-1}}{d\zeta^{n-1}}\left(\frac{\eta^2-1}{2}\right)^n\right| \rho_1^n;$$

unde $\left(\frac{\eta^2-1}{2}\right)^n = (-1)^n\left(\frac{k^2+1}{2}\right)^n$; de aici rezultă afirmația, observînd că seria dată converge absolut pentru $\zeta = \eta$ și $w = \rho_1$. Avem deci dreptul de a deriva seria termen cu termen, în raport cu ζ și obținem

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = 1 + \sum_1^\infty \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\zeta^n}\left(\frac{\zeta^2-1}{2}\right)^n w^n,$$

valabil pentru orice ζ și $|w| < \rho$. (Deoarece k este arbitrar și ρ_1 orice număr pozitiv $< \rho$).

Pe de altă parte, $z = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 2\zeta w + w^2}}{w}$, unde se ia determinarea radicalului egală cu 1 în $w = 0$ (la care tocmai corespunde $z = \zeta$, cum se vede dezvoltînd radicalul); de aici

$$\frac{\partial z}{\partial \zeta} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta w + w^2}}.$$

Determinarea considerată a radicalului este definită și olomorfă într-un cerc $|w| < \rho_0$, care trece prin cea mai apropiată rădăcină a ecuației în w, $1 - 2\zeta w + w^2 = 0$. În această vecinătate putem scrie

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\zeta w + w^2}} = 1 + \sum_1^\infty P_n(\zeta)\, w^n. \tag{61}$$

Comparînd cu dezvoltarea obținută mai sus avem

$$P_n(\zeta) = \frac{1}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\zeta^n}\left(\frac{\zeta^2 - 1}{2}\right)^n, \qquad \text{(Rodrigues).}$$

Se vede de aici că $P_n(\zeta)$ sînt polinoame de grad n; ele se numesc *polinoamele lui Legendre*; $(1 - 2\zeta w + w^2)^{-\frac{1}{2}}$ este *funcția generatoare a lor*. Ele intervin în multe probleme de analiză.

Cu ajutorul formulei lui Rodrigues se poate determina că polinoamele $P_n(\zeta)$ au numai rădăcini reale, care se găsesc în intervalul $(-1, +1)$: Considerăm polinomul $P_{n,k} = \dfrac{1}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}\zeta^k}\left(\dfrac{\zeta^2 - 1}{2}\right)^n$. $P_{n,0}$ are rădăcinile $\zeta = \pm 1$ n-uple. $P_{n,1}$ (de grad $2n - 1$) are rădăcinile $\zeta = \pm 1$ $(n - 1)$-uple și o rădăcină simplă în intervalul $(-1, +1)$ (teorema lui Rolle). La fel $P_{n,2}$ va avea rădăcinile ± 1 și două rădăcini simple, cuprinse între rădăcina simplă a lui $P_{n,1}$ și rădăcinile ± 1. Etc.

De asemenea se stabilesc relațiile de ortogonalitate:

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\, P_m(x)\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \dfrac{2}{2n+1} & n = m, \\ 0 & n \neq m. \end{cases}$$

Pentru a construi o ecuație diferențială la care să satisfacă $P_n(z)$, să punem $(\zeta^2 - 1)^n = Z$, de unde

$$(\zeta^2 - 1)Z' = 2n\zeta Z$$

și derivînd de $n + 1$ ori (cu formula lui Leibnitz):

$$(\zeta^2 - 1)\, Z^{(n+2)} + 2(n + 1)\,\zeta Z^{(n+1)} + (n + 1)\, nZ^{(n)} = 2n\zeta Z^{(n+1)} + 2n(n + 1)\, Z^{(n)}$$

și introducînd $Z^{(n)} = 2^n n!\, P_n(z)$:

$$(\zeta^2 - 1)\, P_n''(\zeta) + 2\zeta P_n'(\zeta) - n(n + 1)\, P_n(\zeta) = 0.$$

Aceasta este ecuația lui Legendre.

Primele polinoame ale lui Legendre sînt

$$P_0 = 1, \quad P_1 = \zeta, \quad P_2 = 3\zeta^2 - 1.$$

Expresia generală se poate obține din formulele lui Rodrigues. Se poate încă folosi o formulă de recurență, la care se ajunge în felul următor: Derivăm (61) cu privire la w:

$$\frac{\zeta - w}{\sqrt{1 - 2\zeta w + w^2}} = (1 - 2\zeta w + w^2) \sum_1^\infty n w^{n-1} P_n(\zeta) =$$

$$= P_1(\zeta) + w[2P_2(\zeta) - 2\zeta P_1(\zeta)] +$$

$$+ \sum_2^\infty w^n[(n + 1)\, P_{n+1}(\zeta) - 2n\zeta P_n(\zeta) + (n - 1)P_{n-1}(\zeta)].$$

Pe de altă parte

$$\frac{\zeta - w}{\sqrt{1 - 2\zeta w + w^2}} = (\zeta - w)\sum_0^\infty w^n P_n(\zeta) = \zeta P_0(\zeta) + w[\zeta P_1(\zeta) - P_0(\zeta)] +$$

$$+ \sum_2^\infty w^n [\zeta P_n(\zeta) - P_{n-1}(\zeta)].$$

Identificînd aceste expresii, obținem relația de recurență:

$$(n + 1)\, P_{n+1}(\zeta) - (2n + 1)\, \zeta P_n(\zeta) + nP_{n-1}(\zeta) = 0 \qquad (n > 0).$$

Observație. În teorema funcției inverse se poate presupune că $f(z)$ este meromorfă în U_{z_0}, finită și continuă pe fr U_0.

În demonstrația olomorfiei lui $\varphi(w)$ în V_{w_0}, cercul C' va fi luat așa ca să nu treacă prin nici un pol (posibil). În formula (50) va interveni și un număr finit de termeni, polii α_h din interiorul lui C' (constante independente de w). Concluzia subzistă.

Exemplul 7. În exemplul 3, pentru $p = -1$, $w = \dfrac{z}{1+2}$, avem polul $z = -1$. Totuși, luînd $\rho = \dfrac{r}{1+r}$, putem lăsa r arbitrar și avem maxim pentru $r = \infty$; $\rho_0 = 1$. Acesta este și raza de convergență a seriei $z(w)$, care reprezintă funcția inversă: $z = \dfrac{w}{1-w}$.

8. *Fie ecuația* $w = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots = f(z)$ *unde* $f(z)$ *este o serie convergentă în* $|z| < 1$. *Inversa locală pentru* $z = 0$, $w = 0$, *are vecinătatea* V_0 *(unde este definită) de rază* $\leqslant |a_1|$.

Căci, după consecința teoremei lui Saxer, dacă $\rho = \min |f(z)|$ pe $|z| = r$ ar fi $> |a_1|$, $f(z)$ ar avea cel puțin 2 rădăcini în discul $|z| < r$. Sau, după teorema directă, pe circumferința $|z| = r < 1$ există un punct unde $|f(z)| \leqslant |a_1|$, ceea ce dă $\rho = \min\limits_{|z|=r} f(z) \leqslant |a_1|$.

Această limitare presupune că considerăm $f(z)$ numai în domeniul de olomorfie.

§ 96. Reprezentarea funcțiilor meromorfe prin serii de funcții raționale

1. O funcție meromorfă transcendentă poate avea poli în număr finit sau numărabil. Într-adevăr, într-un disc oarecare de centru 0, $|z| \leqslant \rho$, numărul polilor funcției trebuie să fie finit, altminteri ei ar avea un punct limită în disc, care ar fi o singularitate esențială, contrar definiției funcțiilor meromorfe. Astfel, coroanele limitate de succesiunea de cercuri de centru O și raze $\rho = 1, 2, \ldots$ vor conține cîte un număr finit de poli și dacă numărul total al polilor nu este finit, ei vor forma un șir $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ce converge la infinit. Acest șir poate fi numerotat în ordinea modulului nedescrescători:

$$|a_0| \leqslant |a_1| \leqslant \ldots . |a_n| \leqslant |a_{n+1}| \leqslant \ldots$$

2. Lemă. *Două funcții meromorfe* $f(z)$ *și* $f_1(z)$, *care au aceiași poli cu aceleași părți principale, diferă printr-o funcție întreagă.*

Într-adevăr $f(z) - f_1(z)$ este olomorfă în orice punct care nu este pol, dar și în fiecare pol a, deoarece avem prin ipoteză într-o vecinătate V_a:

$$f(z) = P(z) + \varphi(z), \quad f_1(z) = P(z) + \varphi_1(z),$$

$P(z)$ fiind partea principală (aceeași) și $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$ funcții olomorfe în V_a; deci $f(z) - f_1(z) = \varphi(z) - \varphi_1(z)$ (în V_a) este o funcție olomorfă în a. Așadar

$f(z) - f_1(z)$ este olomorfă în tot planul la distanță finită, adică o funcție întreagă.

Consecință. Toate funcțiile meromorfe care au aceeași poli, cu aceleași părți principale ca funcția $f_1(z)$, sînt

$$f(z) = g(z) + f_1(z),$$

unde $g(z)$ este o funcție întreagă arbitrară.

De aici urmează că funcțiile meromorfe care au poli dați $a_1, \ldots, a_m$ cu părți principale date $P_1(z), \ldots, P_m(z)$ și numai acești poli, sînt

$$f(z) = g(z) + P_1(z) + \ldots + P_m(z)$$

cu $g(z)$ funcție întreagă arbitrară.

Într-adevăr, consecința precedentă se aplică, fiindcă funcția $P_1(z) + \ldots + P_m(z) = f_1(z)$ are polii dați, cu părțile principale $P_1, \ldots, P_m$. (De exemplu în a_1, $P_2(z), \ldots P_m(z)$ sînt olomorfe și deci $f_1(z)$ are tocmai partea principală $P_1(z)$.)

3. Acest rezultat nu poate fi generalizat sub aceeași formă la cazul cînd sînt dați un șir de poli a_n convergînd la ∞ și părțile principale $P_n(z)$, deoarece s-ar putea ca seria $\Sigma P_n(z)$ să nu fie convergentă.

Exemplul 1. *Fie polii $a_n = n\pi$ cu părțile principale $P_n = \dfrac{1}{z - n\pi}$ (acesta e cazul funcției* cotg z). $\sum_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{z - n\pi}$ nu este convergentă, căci partea sa reală $\sum_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{x - n\pi}{(x - n\pi)^2 + y^2}$ este divergentă ca și $\sum_{-\infty}^{+\infty} \dfrac{1}{x - n\pi}$.

Se poate însă demonstra:

Teorema 1. *(Mittag-Leffler). Există funcții care admit un șir dat de poli a_n (distincți) convergînd la ∞, cu părți principale date, $P_n(z)$, și nu mai au alte singularități la distanță finită; aceste funcții sînt date de formula*

$$f(z) = g(z) + P_0(z) + \sum_1^\infty (P_n(z) - Q_n(z)) \tag{62}$$

unde $g(z)$ este o funcție întreagă arbitrară, $P_0(z)$ partea principală în $z = 0$ (dacă acesta este pol) și $Q_n(z)$ polinoame convenabil alese, suma întinzîndu-se la toți polii $\neq 0$ (așezați în ordinea modulilor nedescrescători). Această serie este absolut convergentă în tot planul afară de poli și uniform convergentă în orice domeniu închis mărginit $\overline{\Delta}$, dacă s-au scos din el discuri oricît de mici cu centrele în polii care eventual se află în $\overline{\Delta}$, sau dacă (fără a scoate din $\overline{\Delta}$ asemenea discuri) lăsăm la o parte din membrul al doilea al ecuației (62) termenii cu poli în $\overline{\Delta}$.

Fie $a_1, a_2, \ldots$, polii dați, diferiți de zero, și distincți așezați în ordinea modulilor nedescrescători[29]: $|a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \ldots$. Pentru partea principală $P_n(z)$, $z = 0$ este un punct regulat; vom avea deci o dezvoltare tayloriană

$$P_n(z) = \sum_0^\infty a_{np} z^p, \tag{63}$$

[29] Această ordine nu este esențială, căci într-o serie absolut convergentă putem schimba ordinea termenilor fără ca să se piardă convergența absolută și uniformă. Este însă esențial ca $a_n \to \infty$.

convergentă în discul $|z| < |a_n|$ (căci a_n este unicul punct singular al acestei funcții) și uniform convergentă în discul Γ_n: $|z| \leqslant \frac{1}{2}|a_n|$. Fie apoi $\bar{\Delta}$ un domeniu închis și mărginit și Γ un disc de centru O și rază ρ, în care este conținut $\bar{\Delta}$. (ρ poate fi $\max |z|$ în $\bar{\Delta}$). Cum $|a_n| \to \infty$, vom avea $\frac{1}{2}|a_n| \geqslant \rho$ pentru $n \geqslant \nu$; cu alte cuvinte $\bar{\Delta} \subset \Gamma_n$ cu începere de la $n = \nu$. Luînd acum o serie convergentă, cu termeni pozitivi, $\sum_1^\infty \varepsilon_n$, vom observa că seria (63) are un rest

$$|R_n(z)| < \varepsilon_n \quad \text{în} \quad \bar{\Delta} \quad \text{pentru} \quad n \geqslant \nu;$$

deoarece ea este uniform convergentă în Γ_n și deci în $\Delta \subset \Gamma_n$. (n nu este rangul restului în seria (63), ci rangul polului a_n la care se referă $P_n(z)$ și restul $R_n(z)$). Vom considera așadar seria

$$\sum_\nu^\infty (P_n(z) - Q_n(z)) = \sum_\nu^\infty R_n(z), \tag{64}$$

unde $Q_n(z) = P_n(z) - R_n(z)$ este un polinom. Ea este absolut și uniform convergentă în $\bar{\Delta}$ (avînd modulii termenilor $< \varepsilon_n$). Seria nu-și va pierde aceste caractere dacă îi adăugăm și ceilalți termeni $P_n(z) - Q_n(z)$ care nu au poli în $\bar{\Delta}$, precum și eventual termenul $P_0(z)$ — cînd acesta există și $z = 0$ nu este în $\bar{\Delta}$; deoarece termenii adăugați sînt mărginiți în $\bar{\Delta}$. Același lucru se poate spune dacă se consideră întreaga serie

$$f_1(z) = P_0(z) + \sum_1^\infty (P_n(z) - Q_n(z))$$

în domeniul $\bar{\Delta}$ minus discuri de rază arbitrar de mică în jurul polilor a_n care cad în $\bar{\Delta}$; deoarece aceasta înseamnă a adăuga seriei (64) un număr finit de termeni, $P_0, \ldots, P_{\nu-1} - Q_{\nu-1}$, mărginiți în domeniul considerat, — ceea ce nu turbură convergența uniformă și absolută a seriei (vezi fig. 180).

Cum Δ poate fi orice domeniu mărginit din plan și discurile precedente de raze oricît de mici, orice punct z la distanță finită poate fi cuprins în interiorul unui asemenea domeniu, dacă z nu este un pol; deci seria $f_1(z)$ este absolut convergentă în orice punct $z \neq a_0, a_1, \ldots$, și uniform convergentă într-o vecinătate V_z suficient de mică. Funcția $f_1(z)$ admite polii a_n cu părțile principale $P_n(z)$ și este olomorfă în celelalte puncte din plan. Pentru un punct $z \neq a_0, a_1, \ldots$ aceasta rezultă din teorema lui Weierstrass asupra seriilor uniform convergente (în V_z). Apoi un punct a_n este pol pentru termenul $P_n(z) - Q_n(z)$, cu partea principală $P_n(z)$, și punct regulat pentru ceilalți termeni. Cum seria formată din ceilalți termeni este uniform convergentă într-o vecinătate V_{a_n} (cum reiese din cele de mai sus), suma ei este o funcție $\varphi(z)$ olomorfă în a_n și deci $f_1(z) = P_n(z) - Q_n(z) + \varphi(z)$ are polul a_n cu partea principală $P_n(z)$. Așadar $f_1(z)$ satisface cerințele enunțului. Rămîne să aplicăm lema de la nr. 2 pentru ca teorema să fie complet demonstrată.

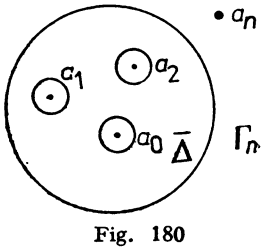

Fig. 180

Observație. Demonstrația teoremei ne dă și o metodă pentru a obține dezvoltarea în serie din formula (62). Este o dezvoltare în serie de funcții raționale $R_n(z) = P_n(z) - Q_n(z)$, unde $R_n(z)$ sînt resturi ale dezvoltării taylo-riene în origine, ale părților principale date, $P_n(z)$; aceste resturi trebuie să fie alese astfel ca să aibă modulii inferiori termenilor unei serii numerice convergente, $\sum_1 \varepsilon_n$.

4. *Aplicație. Fie dați polii simpli* $a_n \to \infty$ *cu părțile principale* $\dfrac{\alpha_n}{z - a_n}$ *(sau cu reziduurile* α_n*).*

Dacă $a_n \neq 0$, *avem dezvoltarea tayloriană în O:*

$$\frac{\alpha_n}{z - a_n} = -\frac{\alpha_n}{a_n}\frac{1}{1 - \dfrac{z}{a_n}} = -\frac{\alpha_n}{a_n}\left[1 + \frac{z}{a_n} + \ldots + \left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu_n}\frac{1}{1 - \dfrac{z}{a_n}}\right]$$

unde am pus în evidență restul:

$$R_n(z) = -\frac{\alpha_n}{a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu_n}\frac{1}{1 - \dfrac{z}{a_n}}.$$

Presupunînd α_n mărginiți, $|\alpha_n| \leqslant \alpha$ (fix) și considerînd seria în discul $|z| \leqslant \dfrac{1}{2}|a_n|$ (ca mai sus), avem

$$|R_n(z)| \leqslant \frac{2\alpha}{|a_n|}\left|\frac{z}{a_n}\right|^{\nu_n},$$

deoarece $\left|1 - \dfrac{z}{a_n}\right| \geqslant 1 - \left|\dfrac{z}{a_n}\right| \geqslant \dfrac{1}{2}$. Putem lua în orice caz $\nu_n = n$, deoarece atunci (a_1 fiind primul pol $\neq O$ în ordinea modulilor) vom avea în Γ_n:

$$|R_n(z)| \leqslant \frac{2\alpha}{|a_1|}\cdot\frac{1}{2^n},$$

în membrul al doilea figurînd termenul general al unei serii convergente.

Dacă voim să avem $\nu_n = p$ număr fix, vom scrie

$$|R_n(z)| \leqslant \frac{2\alpha\rho^p}{|a_n|^{p+1}} \quad \text{pentru} \quad |z| \leqslant \rho$$

și vom avea convergența uniformă în discul $|z| \leqslant \rho$ (lăsînd la o parte termenii corespunzători la $|a_n| \leqslant \rho$), dacă seria $\Sigma \dfrac{1}{|a_n|^{p+1}}$ este convergentă pentru un exponent $p + 1$. Natural, vom lua cel mai mic exponent cu această proprietate, așa că p va fi cel mai mare exponent pentru care $\Sigma \dfrac{1}{|a_n|^p}$ diverge.

Așadar, funcțiile meromorfe ale căror poli a_n sînt simpli și au reziduurile α_n mărginite, sînt reprezentate de:

$$(65) \qquad f(z) = g(z) + \frac{\alpha_0}{z} + \sum_1^{\infty}\alpha_n\left[\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \ldots + \frac{1}{a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu_n - 1}\right]$$

unde seria din membrul al doilea este absolut și uniform convergentă în condițiile teoremei lui Mittag—Leffler și putem lua întotdeauna $\nu_n = n$; iar în cazul cînd seria $\Sigma \frac{1}{|a_n|^p}$ nu diverge pentru toți exponenții p, putem lua $\nu_n = p$, cel mai mare exponent care face seria divergentă.

Observație. Dacă $f(z)$ este dată, și prin aceasta polii ei a_n și părțile principale $P_n(z)$, pentru a o pune sub forma (62) rămîne să determinăm funcția întreagă $g(z)$. Aceasta este o problemă în general dificilă, care revine la a evalua pe altă cale suma seriei din membrul al doilea.

Exemplul 2. Fie $f(z) = \operatorname{ctg} z$. Avem polii simpli $a_n = n\pi$ cu reziduurile $\alpha_n = 1$. Deci[30]

$$\operatorname{ctg} z = g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right).$$

Pentru a determina pe $g(z)$ observăm că putem scrie

$$\operatorname{ctg} z = g(z) + \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}$$

iar pe de altă parte cunoaștem formula (stabilită cu ajutorul teoriei reziduurilor):

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

Deci $g(z) = 0$ și putem scrie

$$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi} \right)$$

serie absolut convergentă în toate punctele $z \neq 0, \pm\pi, \ldots$ și uniform convergentă în orice domeniu mărginit din care s-au scos discurile $|z - n\pi| < \varepsilon$, de rază ε oricît de mică. (Am observat mai sus că seria $\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - n\pi}$, pe care ne-ar fi dat-o metoda reziduurilor, nu este convergentă).

§ 97. Reprezentarea funcțiilor întregi prin produse infinite (canonice)

1. O funcție întreagă poate avea un număr finit sau un șir de zerouri ce converg la ∞, și care pot fi așezate în ordinea modulilor nedescrescători. Aceasta se vede ca și pentru polii unei funcții meromorfe, ținînd seama de faptul cunoscut, că zerourile unei funcții olomorfe sînt izolate.

Printre funcțiile întregi cunoscute de noi, e^z nu are nici un zero, un polinom de grad m are m zerouri, sin z are șirul de zerouri $z = n\pi$.

2. Lemă 1. *O funcție întreagă lipsită de zerouri este de forma $e^{g(z)}$, unde $g(z)$ este o funcție întreagă (care poate fi oarecare).*

---

[30]) Seria cu două capete este o aranjare a seriei (65) în acest caz. Seria (65) fiind absolut și uniform convergentă în domeniile specificate, nu-și pierde aceste calități prin schimbarea ordinei termenilor. Seriile parțiale $\sum_{1}^{\infty}$ și $\sum_{-1}^{-\infty}$ sînt evident la fel.

Mai întîi este evident că, oricare ar fi funcţia întreagă $g(z)$, $e^{g(z)}$ este o funcţie întreagă ce nu are zerouri. Invers, dacă funcţia întreagă $G(z)$ nu are nici un zero, funcţia $\frac{G'(z)}{G(z)} = g_1(z)$ este de asemenea întreagă (fiind olomorfă în tot planul la distanţă finită, fiindcă $G(z) \neq 0$). Deci putem scrie

$$\log \frac{G'(z)}{G(z_0)} = \int_{z_0}^{z} g_1(z)\, dz = g_2(z),$$

unde se ia determinarea logaritmului care se anulează în $z = z_0$, determinare uniformă în tot planul pentru că integrala din membrul al doilea este uniformă (după teorema fundamentală a lui Cauchy); după altă teoremă cunoscută, ea este olomorfă în tot planul la distanţă finită, deci o funcţie întreagă $g_2(z)$.(Ceea ce rezultă şi din integrarea seriei tayloriene a lui $g_1(z)$, uniform convergentă în orice disc $|z| \leqslant R$.) Prin urmare

$$G(z) = e^{g_2(z) + \log G(z_0)} = e^{g(z)}$$

unde $g(z) = g_2(z) + \log G(z_0)$ este o funcţie întreagă.

3. Lema 2. *Dacă funcţiile întregi $f(z)$ şi $f_1(z)$ au aceleaşi zerouri cu aceleaşi multiplicităţi, cîtul lor este de forma $e^{g(z)}$, unde $g(z)$ este o funcţie întreagă.*

Într-adevăr, $\frac{f(z)}{f_1(z)}$ este olomorfă în tot planul la distanţă finită, pentru că $f_1(z) \neq 0$, adică o funcţie întreagă, şi nu are zerouri, deci este de forma $e^{g(z)}$.

Consecinţă. Funcţiile întregi care au aceleaşi zerouri, cu aceleaşi multiplicităţi ca funcţia întreagă $f_1(z)$, sînt:

$$f(z) = e^{g(z)} f_1(z)$$

unde $g(z)$ este o funcţie întreagă arbitrară.

Exemplu. Funcţiile întregi care au zerourile $a_1, \ldots, a_m$ cu multiplicităţile $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, şi numai pe acestea, sînt

$$f(z) = e^{g(z)} \left(1 - \frac{z}{a_1}\right)^{\alpha_1} \ldots \left(1 - \frac{z}{a_m}\right)^{\alpha_m}.$$

Formula aceasta nu se poate aplica la cazul unui şir de zerouri $a_n \to \infty$, pentru că produsul infinit $\prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n}$ nu este în general convergentă. Astfel, pentru $a_n = n$, $\alpha_n = 1$ (zerorile lui $\sin z$), $\prod_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right)$ nu este convergent.

Teorema 1. *(Weierstrass). Există funcţii întregi care au un şir de zerouri date a_n distincte şi convergînd la infinit, cu multiplicităţi date α_n mărginite, şi numai aceste zerouri; expresia generală a acestor funcţii este*

$$f(z) = e^{g(z)} z^{\alpha_0} \prod_1^{\infty} \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n} e^{\alpha_n Q_n(z)} \tag{66}$$

unde $g(z)$ este o funcţie întreagă arbitrară şi Q_n polinoame de forma

$$Q_n(z) = \frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}\left(\frac{z}{a_n}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{\nu_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu_n}, \tag{66'}$$

iar produsul infinit, întins la toate zerourile $a_n \neq 0$, este absolut și uniform convergent în orice domeniu mărginit; se poate lua aici $\nu_n = n$ întotdeauna și $\nu_n = p$ fix cînd seria $\sum_1^\infty \frac{1}{|a_n|^p}$ admite un exponent maxim p care o face divergentă: (Cînd $p = 0$ factorul exponențial lipsește.)

Să considerăm funcția $\frac{f'(z)}{f(z)}$; ea are în fiecare punct a_n un zero simplu de reziduu α_n (vezi indicatorul logaritmic) și este olomorfă în celelalte puncte la distanță finită. Deci avem, aplicînd (65) din § 96,

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \gamma(z) + \frac{\alpha_0}{z} + \sum_1^\infty \alpha_n \left[\frac{1}{z-a} + \frac{1}{a_n} + \ldots + \frac{1}{a_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu_n - 1}\right] =$$

$$= \gamma(z) + \sum_0^\infty R_n(z),$$

această serie fiind absolut și uniform convergentă în condițiile ce au fost precizate. Punctele a_n fiind numerotate în ordinea modulilor nedescrescători, să considerăm un disc Γ: $|z| \leqslant \rho$ și seria $\sum_\nu^\infty R_n(z)$, unde ν este astfel că $|a_n| > \rho$ pentru $n \geqslant \nu$. Această serie are termenii olomorfi în Γ (polii acestor termeni fiind exteriori lui Γ) și este absolut și uniform convergentă în Γ (cum am văzut). Aplicînd a doua teoremă relativă la integrarea unei serii de funcții, deducem că seria

$$\sum_\nu^\infty \int_0^z R_n(z)\,dz = \sum_\nu^\infty R_n^*(z)$$

are termenii olomorfi în Γ (teorema lui Cauchy) și este absolut și uniform convergentă în interiorul lui Γ. De aici urmează că produsul $\prod_1^\infty e^{R_n^*(z)}$ este absolut și uniform convergent în interiorul lui Γ. Însă

$$R_n^*(z) = \int_0^z R_n(z)\,dz = \int_0^z \alpha_n \left[\frac{1}{z-a_n} + \frac{1}{a_n} + \ldots + \frac{1}{a}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu_n - 1}\right] dz =$$

$$= \alpha_n \left[\log\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) + \frac{z}{a_n} + \ldots + \frac{1}{\nu_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)^{\nu_n}\right]$$

(cu determinarea logaritmului care se anulează în $z = 0$) și

$$e^{R_n^*(z)} = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n} e^{Q_n(z)}$$

$Q_n(z)$ avînd expresia (66'). Cu aceasta am demonstrat că produsul infinit din (66) este absolut și uniform convergent în orice domeniu mărginit dacă lăsăm la o parte factorii ce au zerouri în acel domeniu. Evident, el nu-și pierde această proprietate punînd la loc acei factori. (Se amintește că un produs infinit este socotit convergent și într-un punct unde un număr finit de factori se anulează dacă produsul este convergent cînd lăsăm la o parte acei factori.) Fie $f_1(z)$ funcția reprezentată de produsul infinit (66), fără factorul $e^{g(z)}$. După o teoremă cunoscută, $f_1(z)$ este olomorfă în tot planul la distanță finită produsul (fiind uniform convergent și avînd factorii olomorfi). Apoi $f_1(z)$ are în

fiecare a_n un zero de multiplicitate dată α_n. Deoarece lăsînd la o parte factorul corespunzător lui a_n, avem un produs convergent într-o vecinătate V_{a_n}, cu factorii $\neq 0$, (convergent în sens strict) și deci $f_1(z) = \left(1 - \frac{z}{a_n}\right)^{\alpha_n} \varphi(z)$, unde $\varphi(a_n) \neq 0$; ceea ce dovedește afirmația. Din același motiv $f_1(z)$ este diferit de zero în orice alt punct din V_{a_n}. Aplicînd lema precedentă, vedem că funcțiile întregi care admit zerourile date (și numai pe acestea) sînt reprezentate de formula (66).

Produsul infinit (66) se numește *produs canonic* dacă $\nu_n = p$.

Aplicație. Să considerăm funcția $f(z) = \sin z$, *care are zerourile* $a_n = n\pi$ *cu multiplicitățile* $\alpha_n = 1$. *După teorema lui Weierstrass*

$$\sin z = e^{g(z)} z \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}}$$

($p = 1$). *Pentru a determina pe* $g(z)$, *aplicăm o teoremă cunoscută (luînd derivate logaritmice) și deducem în orice punct diferit de punctele* $n\pi$,

$$\operatorname{ctg} z = \frac{g'(z)}{g(z)} + \frac{1}{z} \sum_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(\frac{1}{z - n\pi} + \frac{1}{n\pi}\right);$$

confruntînd cu o formulă stabilită anterior [vezi (13) din §82)] avem $g'(z) = 0$, $e^{g(z)} = C$. Împărțind relația penultimă cu z, în membrul al doilea rămîne un produs uniform convergent în $z = 0$ și are care acolo valoarea 1; pe de altă parte în membrul I $\frac{\sin z}{z} \to 1$ pentru $z \to 0$. Urmează $C = 1$ și

$$\sin z = z \prod_{-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - \frac{z}{n\pi}\right) e^{\frac{z}{n\pi}};$$

produs absolut și uniform convergent în orice domeniu mărginit.

Grupînd factorii ce corespund la $\pm n$ mai putem scrie

$$\sin z = z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2\pi^2}\right).$$

5. *Observație.* În enunțul teoremei lui Weierstrass am presupus α_n mărginiți. Fără a face vreo ipoteză cu privire la α_n, demonstrația de mai sus ne arată că formula (66) este totdeauna valabilă, polinoamele $Q_n(z)$ ne mai fiind însă în mod necesar de forma (66'): căci după teorema lui Mittag-Leffler, avem în orice caz

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \gamma(z) + \frac{\alpha_0}{z} + \sum_{1}^{\infty} \alpha_n \left(\frac{1}{z - a_n} + Q_n^*(z)\right),$$

unde $Q_n^*(z)$ sînt polinoame convenabile, această serie fiind absolut și uniform convergentă în condițiile știute. De aici se va deduce ca mai sus, formula (66), unde

$$Q_n(z) = \int_{z_0}^{z} Q_n^* \, dz.$$

Teorema 2. *O funcție meromorfă este cîtul a două funcții întregi.*

Fie $f(z)$ meromorfă; putem forma o funcție întreagă $g(z)$ avînd ca zerouri polii lui $f(z)$ cu aceleași multiplicități. Se vede imediat că funcția $f(z)\,g(z)$ nu are poli: într-un pol a al lui $f(z)$ avem $f(z) = (z-a)^{-\alpha}\varphi(z)$, $g(z) = (z-a)^{\alpha}\psi(z)$ cu $\varphi(z), \psi(z)$ olomorfe într-o vecinătate V_a; deci $f(z)g(z) = \varphi(z)\,\psi(z)$ este olomorfă în a. Urmează ca $f(z)g(z) = g_1(z)$ este o funcție întreagă și $f(z) = \dfrac{g_1(z)}{g(z)}$ este cîtul a două funcții întregi.

§ 98. Funcția gamma

1. Funcția gamma este definită după Gauss, în tot planul afară de punctele $z = 0, -1, -2, \ldots, -n, \ldots$, prin

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}. \qquad (n^z = e^{z\log n}). \tag{67}$$

Pentru a vedea dacă această limită există, considerăm

$$\frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z} = z\left(1+\frac{z}{1}\right)\ldots\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z\log n} =$$

$$= z\left[\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-\frac{z}{1}}\right]\ldots\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]e^{z\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\log n\right)}.$$

Cum se știe, $1+\dfrac{1}{2}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\log n \to C$, constanta lui Euler—Mascheroni ($C \sim 0,577$). Pe de altă parte

$$z\left[\left(1+\frac{z}{1}\right)e^{-\frac{z}{1}}\right]\ldots\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}}\right]$$

este produsul parțial de rang n al produsului canonic

$$z\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-\frac{z}{n}},$$

care după teorema lui Weierstrass este absolut și uniform convergent în orice domeniu mărginit, și nu se anulează de cît în punctele $z = -n (n \geqslant 0)$; așadar limita considerată există în toate punctele z afară de acestea și avem

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = e^{Cz}\,z\prod_1^{\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)e^{-z/n}. \tag{68}$$

Teorema 1. $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ *este o funcție întreagă, cu zerourile simple* $z = -n$, *iar* $\Gamma(z)$ *o funcție meromorfă cu polii simpli* $z = -n$.

2. Avem

$$\frac{\Gamma(z+1)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\frac{nz}{z+n+1} = z,$$

sau

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad z \neq -n. \tag{69}$$

Punînd în loc de z, $z+1$, $z+2$, ... avem încă

$$\Gamma(z+2) = (z+1)\Gamma(z+1),$$

$$\Gamma(z+m) = (z+m-1)\Gamma(z+m-1).$$

Urmează

$$\Gamma(z+m) = z(z+1)\dots(z+m-1)\,\Gamma(z) \quad (z \neq -n). \tag{70}$$

3. Avem

$$\Gamma(1) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

şi aplicînd (70):

$$\Gamma(n+1) = n!. \tag{71}$$

4. Presupunînd $z \neq \pm n$ (z neîntreg), putem scrie pe lîngă (68) şi

$$\frac{1}{\Gamma(-z)} = -e^{-Cz} z \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z}{n}\right) e^{\frac{z}{n}}.$$

Rezultă

$$\frac{1}{\Gamma(z)\Gamma(-z)} = -z^2 \prod_1^\infty \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) = -\frac{z}{\Pi} \sin \pi z.$$

Observînd că, după (69)

$$-z\Gamma(-z) = \Gamma(1-z),$$

urmează formula importantă

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z} \quad (z \neq \pm n). \tag{72}$$

Aplicaţie. Să calculăm reziduul lui $\Gamma(z)$ *într-un pol* $z = -m$ $(m \geqslant 0)$. Dacă α este acest reziduu, $\Gamma(z)\Gamma(1-z)$ are reziduul $\alpha\Gamma(1+m) = \alpha m!$, iar $\frac{\pi}{\sin \pi z}$ are reziduul $\frac{\pi}{\pi \cos \pi m} = (-1)^m$. Deci $\alpha = \frac{(-1)^m}{m!}$. Sau,

$$\lim_{z\to -m} (z+m)\Gamma(z) = \lim_{z\to -m} \frac{\Gamma(z+m+1)}{z(z+1)\dots(z+m-1)} = \frac{(-1)^m}{m!}.$$

5. Teorema 2. *Avem*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt \tag{73}$$

în semiplanul $\mathrm{Re}\, z > 0$ $(t^{z-1} = e^{(z-1)\log t})$, *formulă care extinde în complex integrala lui Euler de specia I.*

Vom stabili întîi existenţa integralei din membrul al doilea (ca integrală improprie). Aceasta înseamnă:

1° există şi este finită $\lim\limits_{q\to 0} \int_q^{t_0} e^{-t} t^{z-1}\, dt$ şi

2° există și este finită $\lim_{p\to\infty}\int_{t_0}^{p} e^{-t}t^{z-1}\,dt$, dacă $\mathrm{Re}\,z > 0$.

După criteriul de convergenră al lui Cauchy, aceasta înseamnă că $\int_p^q$, unde $0 < p < q$, tinde la 0 cînd $q \to 0$ sau cînd $p \to \infty$. Vom arăta că aceasta are loc chiar uniform în orice bandă $0 < a \leqslant x \leqslant b$ ($x = \mathrm{Re}\,z$). Într-adevăr avem

$$\left|\int_p^q e^{-t}t^{z-1}\,dt\right| \leqslant \int_p^q e^{-t}t^{x-1}\,dt$$

și este destul să considerăm ultima integrală.

1° Dacă $q < 1$ și $q \to 0$,

$$\int_p^q e^{-t}t^{x-1}\,dt < \int_p^q t^{a-1}\,dt = \frac{q^a - p^a}{a} \to 0.$$

2° Dacă $p > 1$

$$\int_p^q e^{-t}t^{x-t}\,dt \leqslant \int_p^q e^{-t}t^{b-1}\,dt;$$

luînd p destul de mare vom avea $e^{-t} < \frac{1}{t^{b+1}}$ pentru $t \geqslant p$ și integrala ultimă va fi

$$< \int_p^q \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q} \to 0.$$

Pentru a demonstra formula (73) vom observa că $e^{-t} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. Sîntem astfel conduși să considerăm integrala

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt = n^z \int_0^1 (1-\tau)^n \tau^{z-1}\,d\tau \text{ [31]}$$

(am făcut substituția $t = n\tau$). Ea poate fi calculată integrînd prin părți:

$$\int_0^1 (1-\tau)^n\tau^{z-1}\,d\tau = \left[\frac{\tau^z}{z}(1-\tau)^n\right]_0^1 + \frac{n}{z}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z\,d\tau =$$

$$= \frac{n}{z}\int_0^1 (1-\tau)^{n-1}\tau^z\,d\tau \text{ [32]}.$$

Aplicînd de n ori această identitate, obținem

$$\int_0^1 (1-\tau)^n\tau^{z-1}\,dz = \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n-1)}\int_0^1 \tau^{z+n-1}\,d\tau = \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$$

deci

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\,dt = \frac{n!\,n^z}{z(z+1)\ldots(z+n)}.$$

---

[31] Este o integrală improprie, a cărei existență urmează din cele de mai sus (1°) cu ajutorul inegalității (75).

[32] $|\tau^z| = e^{x\log\tau} = \tau^x \to 0$ pentru $\tau \to 0$, fiindcă $x > 0$.

Astfel am stabilit formula:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt \quad (\mathrm{Re} z > 0).$$

Formula (73) va fi demonstrată dacă dovedim că

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\, dt = 0. \tag{74}$$

Să punem $f(t) = 1 - e^t\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n$. Avem $f'(t) = \frac{t}{n}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^{n-1} e^t \geqslant 0$ în intervalul $[0, n]$, deci $f(t)$ crescător; şi cum $f(O) = 0$, $f(t) \geqslant 0$.

Pentru a aproxima pe $f(t)$, vom scrie

$$f(t) = \int_0^t f'(u)\, du = \int_0^t \frac{u}{n}\left(1 - \frac{u}{n}\right)^{n-1} e^u\, du < \frac{e^t}{n}\int_0^t u\, du = \frac{t^2 e^t}{2n}.$$

Aşadar, în intervalul $[0, n]$,

$$0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n < \frac{t^2}{2n}. \tag{75}$$

Pentru a stabili (74), vom scrie

$$J_n = \int_0^n \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1} dt = \int_0^\nu \left[e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n\right] t^{z-1}\, dt +$$

$$+ \int_\nu^n e^{-t} t^{z-1}\, dt - \int_\nu^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1}\, dt = J_1 + J_2 + J_3 \quad (n > \nu).$$

Avem: $|J_2| < \int_\nu^n e^{-t} t^{z-1}\, dt < \frac{\varepsilon}{3}$ pentru ν destul de mare (pentru că $\int_p^q e^{-t} t^{z-1}\, dt \to 0$ uniform cînd $p \to \infty$). Atunci avem şi $|J_3| < \int_\nu^n e^{-t} t^{z-1}\, dt < \frac{\varepsilon}{3}$, după (75). În sfîrşit, ν fiind fixat, avem tot după (75):

$$|J_1| < \frac{1}{2n}\int_0^\nu t^{x+1}\, dt = \frac{\nu^{x+2}}{2n(x+2)} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pentru } n > \frac{3\nu^{x+2}}{2\varepsilon(x+2)}.$$

Aşadar

$$|J_n| < \varepsilon \quad \text{pentru} \quad n > \nu, \ \frac{3\nu^{x+2}}{2\varepsilon(x+2)},$$

ceea ce dovedeşte (74) şi totodată formula (73).

§ 99. Funcţia $\Gamma(z)$

1) *Seria lui Gudermann:*

$$\log \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right)\log z - z + \log\sqrt{2\pi} +$$

$$+ \sum_0^\infty \left[\left(z + n + \frac{1}{2}\right)\log\frac{z+n+1}{z+n} - 1\right]$$

valabilă pentru $z \neq 0, -1, -2, \ldots$ *(cu determinările principale ale logaritmilor separate printr-o tăietură pe axa negativă).*

Plecăm de la definiția lui Gauss—Euler:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\ldots(z+n)},$$

de unde $\log \Gamma(z) = \lim_{n \to \infty} S_n$ cu

$$S_n = -\sum_{\nu=0}^{n} \log(z+\nu) + z \log n + \log n!.$$

Înlocuind aici $-1 = \left(z+n-\frac{1}{2}\right) - \left(z+n+\frac{1}{2}\right)$ putem scrie

$$S_n = \sum_{0}^{n} \left(z+\nu+\frac{1}{2}\right) \log(z+\nu+1) + \left(z-\frac{1}{2}\right) \log z -$$

$$-\left(z+n+\frac{1}{2}\right) \log(z+n+1) - \sum_{0}^{n} \left(z+\nu+\frac{1}{2}\right) \log(z+\nu) +$$

$$+ z \log n + \log n! = \sum_{0}^{n} \left[\left(z+\nu+\frac{1}{2}\right) \log \frac{z+\nu+1}{z+\nu} - 1\right] +$$

$$+\left(z-\frac{1}{2}\right) \log z - \left(z+n+\frac{1}{2}\right) \log(z+n+1) + z \log n + \log n! + n + 1.$$

Pentru n destul de mare

$$\log(z+n+1) = \log n + \log\left(1 + \frac{z+1}{n}\right) =$$

$$= \log n + \frac{z+1}{n} - \frac{(z+1)^2}{2n^2}(1+\varepsilon) \quad (\varepsilon \to 0).$$

Ținînd seama de aceasta, avem

$$S_n = \sum_{0}^{n} \left[\left(z+\nu+\frac{1}{2}\right) \log \frac{z+\nu+1}{z+\nu} - 1\right] + \left(z-\frac{1}{2}\right) \log z - z +$$

$$+\left(\log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right) \log n + n\right) + \frac{r_n}{n},$$

unde r_n este mărginit pentru $n \to \infty$. După formula lui Stirling

$$\log n! - \left(n+\frac{1}{2}\right) \log n + n \to \sqrt{2\pi}.$$

Astfel, făcînd $n \to \infty$ în formula precedentă se obține seria lui Gudermann.

2) *Seria aceasta este uniform convergentă în semiplanul* $\mathrm{Re}\, z > x_0$ (fix), *dacă scoatem (pe lîngă tăietura pe axa negativă) discurile de centre* $z = 0, -1, -2, \ldots$ *și raze arbitrar de mici.*

Avem în general, pentru $|\zeta| < \rho < 1$:

$$\log(1+\zeta) = \frac{\zeta}{1} - \frac{\zeta^2}{2} + \ldots = \zeta - \frac{\zeta^2}{2}(1+\varepsilon)$$

cu

$$\varepsilon = -\frac{2}{3}\zeta + \frac{2}{4}\zeta^2 - \ldots$$

$$|\varepsilon| < \frac{2}{3}(\rho + \rho^2 + \ldots) = \frac{2}{3}\frac{\rho}{1-\rho}.$$

Termenul general al seriei lui Gudermann se scrie

$$w_n = \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{z+n}\right) - 1 =$$

$$= \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{z+n} - \frac{1+\varepsilon_n}{2(z+n)^2}\right) - 1 = -\frac{1}{4(z+n)^2} -$$

$$-\left(1+\frac{1}{2(z+n)}\right)\frac{\varepsilon_n}{2(z+n)}.$$

Dacă $\operatorname{Re} z > x_0$, avem $|z+n| > x_0 + n$ (luînd $n > -x_0$ cînd $x_0 < 0$) Astfel, în cazul nostru putem lua

$$|\zeta| = \left|\frac{1}{z+n}\right| < \frac{1}{x_0+n} = \rho < 1$$

pentru $n > 1 - x_0$. Vom avea atunci

$$|\varepsilon_n| < \frac{2}{3}\frac{\frac{1}{x_0+n}}{1-\frac{1}{x_0+n}} = \frac{2}{3}\frac{1}{x_0+n-1}$$

și deci

$$|w_n| < \frac{1}{4(x_0+n)^2} + \left(1+\frac{1}{2(x_0+n)}\right)\frac{1}{3(x_0+n)}\cdot\frac{1}{x_0+n-1},$$

care este termenul general al unei serii convergente. Condiția $n > 1 - x_0$ atrage $x + n > 0$ pentru $x > x_0$, deci exclude termenii pentru care $\log\dfrac{z+n+1}{z+n}$ nu este definit. Adăugînd și termenii excluși, seria va fi convergentă în domeniul definit mai sus.

3) *Consecință:*

$$\log\Gamma(z) - \left(z-\frac{1}{2}\right)\log z + z \to \log\sqrt{2\pi}$$

pentru $z \to \infty$ *cu* $\operatorname{Re} z > x_0$.

4) *Seria derivată este convergentă uniform în aceleași condiții și convergentă în tot planul minus punctele* $z = 0, -1, \ldots$ *Ea este:*

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \log z - \frac{1}{2z} + \sum_0^\infty \left[\log \frac{z+n+1}{z+n} + \right.$$
$$\left. + \left(z+n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{z+n}\right)\right].$$

Observînd că

$$\frac{1}{2}\sum_0^\infty \left(\frac{1}{z+n+1} - \frac{1}{z+n}\right) = -\frac{1}{2z}$$

și

$$\sum_0^n \log \frac{z+\nu+1}{z+\nu} - \log n = \log \frac{z+n+1}{nz} \to -\log z,$$

putem scrie

$$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \lim_{n\to\infty}\left[\sum_0^n (z+\nu+1)\left(\frac{1}{z+\nu+1} - \frac{1}{z+\nu}\right) + \log n\right] =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left[\sum_0^n - \frac{1}{z+\nu} + \log \nu\right] = -\frac{1}{z} + \lim_{n\to\infty}\left[\sum_0^n \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{z+\nu}\right) + \right.$$
$$\left. + \log n - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right)\right] = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_1^\infty \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{z+\nu}\right).$$

γ fiind constanta lui Euler-Mascheroni. ($\gamma = 0{,}57721566$ cu aproximație de 10^{-8}).

Aceeași dezvoltare rezultă din dezvoltarea lui Weierstrass:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = z\, e^{\gamma z} \prod_1^\infty \left(1 + \frac{z}{\nu}\right) e^{-\frac{z}{\nu}}.$$

Aceasta este uniform convergentă în tot planul minus discurile de centre $z = 0, -1, \ldots$ Rezultă că seria lui Gudermann este și ea uniform convergentă în tot planul minus un unghi ($\pi - \varepsilon < \arg z < \pi + \varepsilon$), exclus pentru a separa determinările logaritmilor, și minus un cerc de centru O. Căci această serie se obține prin integrarea seriei lui $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$, care are același domeniu de convergență uniformă ca și seria lui $\frac{1}{\Gamma(z)}$.

5) *Derivînd seria lui* $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$ *avem*

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \Gamma(z) = \sum_0^\infty \frac{1}{(z+n)^2}.$$

Serii de factoriale (de specia I):

$$\sum_1^\infty \frac{n!\, a_n}{z(z+1)\ldots(z+n)} \quad z \neq 0, -1, -2, \ldots$$

TEOREMA 1. *(Landau). Seria converge în afară de punctele* 0, $-1, \ldots$ *numai în punctele unde converge seria lui Dirichlet* $\sum_1^\infty \frac{a_n}{n^z}$. *Ea converge uniform în orice disc unde aceasta converge uniform, dacă acel cerc lasă în exterior punctele* 0, $-1, \ldots$

Demonstrație:

$$\frac{n!a_n}{z(z+1)\ldots(z+n)} = \frac{a_n}{n^z}\frac{1}{g_n(z)},$$

$$g_n(z) = \frac{z(z+1)\ldots(z+n)}{n!n^z}.$$

După criteriul lui Du Bois Raymond [$\Sigma a_\nu b_\nu$ converge cînd $\Sigma(b_\nu - b_{\nu+1})$ este absolut convergentă și $\Sigma\, a_\nu$ converge], ajunge să demonstrăm convergența seriei

$$\sum_1^\infty \left| \frac{g_{n+1}(z) - g_n(z)}{g_n(z)g_{n+1}(z)} \right|. \tag{76}$$

Cum $\frac{1}{g_n(z)} \to \Gamma(z)$, $\frac{1}{g_n(z)}$ este mărginit pentru z dat, deci este destul ca $\sum_1^\infty |g_n(z) - g_{n+1}(z)|$ să conveargă, unde

$$g_n(z) - g_{n-1}(z) = g_{n-1}(z)\left[\left(1+\frac{z}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)^z - 1\right].$$

Există o constantă A așa ca, pentru $|z| < \rho$, $|g_n(z)| \leqslant A$ deoarece $g_n(z) \to \frac{1}{\Gamma(z)}$ funcție întreagă, uniform), iar

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^z = 1 - \frac{z}{n} + \frac{\theta_n(z)}{n^2}$$

cu $|\theta_n(z)|$ mărginit pentru $|z| < \rho$, și deci avem

$$|g_n(z) - g_{n-1}(z)| \leqslant A\left| -\frac{z^2}{n^2} + \frac{\theta_n(z)}{n^2} + \frac{z\theta_n(z)}{n^3} \right| < \frac{M}{n^2}.$$

Invers, din convergența seriei date urmează aceea a seriei Dirichlet; căci aceasta revine tot la convergența seriei $\Sigma|g_n(z) - g_{n+1}(z)|$.

Fie K un disc unde seria Dirichlet converge uniform și care lasă în exterior punctele 0, -1, ... După criteriul de convergență uniformă, aceasta revine la convergența uniformă a seriei (76) plus condiția ca $\frac{1}{g_n(z)}$ să fie uniform mărginită în K. Aceasta rezultă din cele de mai sus. Reciproc, dacă seria dată este uniform convergentă în K, și seria Dirichlet este convergentă. Ceea ce se vede tot cu teorema citată, seria $|g_n(z) - g_{n+1}(z)|$ fiind uniform convergentă și $g_n(z)$ uniform mărginite.

Exemplu. $\frac{1}{z^2} = \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$ Re $z > 0$. Avem scăzînd termenii pe rînd din membrul I

$$\frac{1}{z^2} - S_n = \frac{n!}{z^2(z+1)\dots(z+n)} = \frac{1}{z \cdot n^z} \frac{n! n^z}{z(z+1)\dots(z+n)}$$

ceea ce $\to 0$ pentru Re $z > 0$.

Funcția $\zeta(z)$ a lui Riemann. $\zeta(z) = \sum_1^\infty \frac{1}{n^z}$

1) Pentru Re$(z) > 1$, $\zeta(z) = \prod_p \frac{1}{1 - p^{-z}}$, unde p parcurge șirul numerelor prime 2, 3, 5, 7, ...

Fie Re $z = 1 + \delta > 1$. Seria și produsul sînt absolut convergente. (Seria $\zeta(z)$ are abscisa de convergență Re $z = 1$.) Avem

$$\frac{1}{1 - p^{-z}} = 1 + \frac{1}{p^z} + \frac{1}{p^{2z}} + \dots .$$

Înmulțind aceste dezvoltări pentru numerele prime $p \leqslant N$, obținem

$\prod_{p \leqslant N} \frac{1}{1 - p^{-z}} = \sum_1^N \frac{1}{n^z} + \sum_{N+1}^\infty{}' \frac{1}{n^z}$, unde Σ' înseamnă că nu se sumează decît anumiți termeni. (Se ține seama că un număr $\geqslant 2$ are o descompunere unică în factori primi.) Deci

$$\left| \prod_{p \leqslant N} \frac{1}{1 - p^{-z}} - \sum_1^N \frac{1}{n^z} \right| \leqslant \sum_{N+1}^\infty \frac{1}{n^{1+\delta}}.$$

Membrul al doilea este restul unei serii convergente.

2) $\frac{1}{\zeta(z)} = \prod_p (1 - p^{-z}) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^z}\right) = \sum_1^\infty \frac{\mu(n)}{n^z}$

$\mu(n)$ simbolul lui Möbius.

3) $\zeta^2(z) = \sum_1^\infty \frac{\tau_n}{n^z}$ τ_n = numărul divizorilor lui n.

ANEXĂ

Generalizarea teoremei lui Hardy și Littlewood (p. 356). *Dacă* $a_n \geqslant 0$ *și* $f(x) \sim \frac{1}{(1-x)^\alpha}$, *unde* $\alpha \geqslant 1$ *și* $x \to 1$, *atunci* $S_n \sim \frac{n^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Considerăm funcția

$$F(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2} f(t)\, dt = \sum_0^\infty a_n \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+\alpha)} x^{\alpha+n-1} \sim \sum_1^\infty \frac{a_n}{n^{\alpha-1}} x_n .$$

(Se pune $t = \tau x$ și se aplică formula $\dfrac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = \int_0^1 \tau^{x-1}\,(1-\tau)^{y-1}\,d\tau$ (vezi și exemplul 24)). Pentru a face trecerea de la seria penultima la ultima, se va observa că diferența resturilor este, în valoarea absolută,

$$\leqslant \sum_N^\infty \frac{a_n}{n^{\alpha-1}}\,|\varepsilon_n|\,x^n < \varepsilon \sum_N^\infty a_n x^n$$

pentru N destul de mare. Pe de altă parte, conform ipotezei,

$$F(x) \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^x (x-t)^{\alpha-2}\,(1-t)^{-\alpha}\,dt = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^1 \frac{\tau^{\alpha-2}\,d\tau}{1-x} =$$

$$= \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)(1-x)} \sim \frac{1}{\Gamma(\alpha)(1-x)}.$$

(S-a făcut substituția $\dfrac{x-t}{1-t} = \tau$). Avem așadar

$$\Gamma(\alpha) \sum_1^n \frac{a_n}{n^{\alpha-1}}\,x^n \sim \frac{1}{1-x},$$

de unde, după teorema lui Hardy și Littlewood (p. 356),

$$\sigma_n = \sum_1^n \frac{a_\nu}{\nu^{\alpha-1}} \sim \frac{n}{\Gamma(\alpha)},$$

adică

$$\sigma_n = \frac{n}{\Gamma(\alpha)}\,(1 + \varepsilon_n) \text{ cu } \varepsilon_n \to 0.$$

Pentru a deduce de aici rezultatul enunțat, ne vom servi de formula

$$(*) \qquad \sum_1^n \nu^{p-1} \sim \frac{n^p}{p} \quad (p \geqslant 1).$$

Scriem:

$$S_n = \sum_1^n a_\nu = \sum_1^n \nu^{\alpha-1}(\sigma_\nu - \sigma_{\nu-1}) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_1^n \nu^{\alpha-1}[1 + \nu\varepsilon_\nu - (\nu-1)\,\varepsilon_{\nu-1}] \sim \frac{n^\alpha}{\alpha\Gamma(\alpha)}$$

dacă vom arăta că

$$\frac{1}{n^\alpha} \sum_1^n [\nu\varepsilon_\nu - (\nu-1)\,\varepsilon_{\nu-1}]\,\nu^{\alpha-1} \to 0.$$

În adevăr, modelul acestei expresii este

$$\frac{1}{n^\alpha} \left| \sum_1^{n-1} [\nu^\alpha - \nu(\nu+1)^{\alpha-1}]\,\varepsilon_\nu + n^\alpha \varepsilon_n \right| =$$

$$= \frac{1}{n^\alpha} \left| \sum_1^{n-1} \nu^{\alpha-1} M_\nu \varepsilon_\nu + n^\alpha \varepsilon_n \right| < M \frac{\sum_1^{n-1} |\varepsilon_\nu|}{n} + |\varepsilon_n|,$$

unde $|M_\nu| < M$ fix. Ambii termeni din ultima expresie tind la 0 (primul în virtutea lemei lui Cauchy).

Observație. Formula (*) se poate deduce din următoarea lemă (Jensen), care generalizează lema lui Cauchy:

Lema lui Jensen. *Dacă* $\alpha_n > 0$ *și* $\frac{\beta_n}{\alpha_n} \to \lambda$, *iar seria* $\sum_1 \alpha_n$ *este divergentă, atunci*

$$\frac{\beta_1 + ... + \beta_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n} \to \lambda.$$

În adevăr, putem scrie

$$\beta_n = \lambda\alpha_n(1 + \varepsilon_n) \text{ cu } \varepsilon_n \to 0$$

și

$$\frac{\beta_1 + ... + \beta_n}{\alpha_1 + ... \beta\alpha_n} = \lambda + \frac{\alpha_1\varepsilon_1 + ... + \alpha_n\varepsilon_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}.$$

Este de dovedit că ultima parte tinde la 0. Fiind dat $\varepsilon > 0$, există N astfel că $|\varepsilon_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n > N$. Avem deci

$$\left|\frac{\alpha_1\varepsilon_1 + ... + \alpha_n\varepsilon_n}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}\right| < \frac{\left|\sum_1^N \alpha_\nu\varepsilon_\nu\right|}{\alpha_1 + ... + \alpha_n}\frac{\varepsilon}{2}.$$

și cum prima parte din membrul II tinde la 0 cu $n \to \infty$, ea va fi $< \frac{\varepsilon}{2}$ pentru $n > N_1 > N$. Astfel membrul I este $< \varepsilon$ pentru $n > N_1$.

Spre a obține formula (*) vom lua $\beta_\nu = \nu^{p-1}$ cu $p \geqslant 1$ și $\alpha_\nu = \nu^p - (\nu - 1)^p$, ceea ce dă $\alpha_1 + ... + \alpha_n = n^p$. Cum $n^p \to +\infty$ și $\alpha_\nu > 0$, lema este aplicabilă și avem

$$\frac{1}{n^p}\sum_1^n \nu^{p-1} \sim \frac{1}{p}$$

$$\left(\text{deoarece } \frac{\beta_\nu}{\alpha_\nu} = \frac{\nu^{p-1}}{\nu^p - (\nu - 1)^p} \to \frac{1}{p}\right).$$

Lema lui Cauchy se obține pentru $\alpha_n = 1$.

Observație. Lema precedentă poate fi utilă în căutarea unor limite.

Exemplu. $\frac{\log(n!)}{n \log n} \to 1.$

Se va lua $\beta_n = \log n$ și $\alpha_n = n \log n - (n - 1)\log(n - 1)$ $(n > 1)$ și $\alpha_1 = 0$ și se va observa că

$$\frac{\beta_{n+1}}{\alpha_{n+1}} = \frac{\log(n + 1)}{\log\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \log(n + 1)} \to 1.$$

Indice de materie

Aderența unui punct 22
Afixa unui număr complex 18
Amplitudinea unei rotații 140
— unui număr complex 16
Arc cos z 167
— de curbă parabolic 545
— deschis 257
— — regulat 257
— regulat 261
— simplu 22, 216, 257
— — deschis 261
— sin z 167
— ctg z 174
— tg z 174
Argumentul unui număr complex 16
Asemănare directă generală 140
Axa imaginară 18
— reală 18
Axioma I a lui Hausdorff 193
— II-a lui Hausdorff 193
— lui Fréchet 193
— lui Tietze 204
Axiomele de separație 193
a^z 159

Centrul unei omotetii 139
chz 175
Ciclu 553
Complementara unei mulțimi 189
Componentele unei mulțimi 211
Condițiile lui Cauchy 116
Conexiunea 205
Constanta lui Euler-Mascheroni 58
Constantele 429
Continuitatea funcțiilor compuse 42
— uniformă 43
Continuum 205
— degenerat 205
— diadic 216
— peanian 215, 255
Conturul unui domeniu 242
Convergența absolută a unei serii multiple 71
— unei funcții depinzînd de un parametru 308
— uniformă a unei funcții depinzînd de un parametru 308
— — — unui șir de funcții 308
Coroană 242
Corolarul lui Janiszewski 232
cos z 160
Criteriul de condensare Cauchy-Schlömilch 56
— — convergență a lui Pringsheim 94
— — — uniformă a lui Cauchy 309
— integral al lui Cauchy 57
— lui Abel 81
— — Cauchy de convergență uniformă pentru funcții depinzînd de un parametru 308
— — Cauchy de specia I 63
— — D'Alembert de specia II 63
— — Dedekind 81
— — Dirichlet 81
— — Du Bois Raymond 81
— — Ermakoff 59
— — Gauss 65
— — Kummer 66
Ctg z 169
Cth z 175
Curbă 23, 218, 258
— continuă 255
— de nivel 402
— local simplă 259
— regulată 130
— simplă 218
— — închisă 218, 257

Derivata unei funcții 116
Determinantul unei transformări liniare 134
Determinările separate ale unei funcții 153
— unei funcții 153
— — transformări 153
Diametrul unei mulțimi 202
Diferențiala 113
Distanța 202
— de la un punct la o mulțime 202
— între mulțimi 202
Domeniu 22
— determinat de o mulțime închisă 212
— exterior unei curbe simple închise 235
— — determinat de un poligon 226
— interior unei curbe simple închise 235
— — determinat de un poligon 226
— închis 22
— J_k 242
— Jordan 235, 242
— poligonal 224

Domeniu simplu conex 236
Dreaptă de sprijin a unei mulțimi convexe 247
Drum 23, 255
— deschis 261
— închis 256
— orientat 256
— rectificabil 262
Drumuri consecutive 256

Ecuația lui Kepler
ε-lanț 209
ε-rețea 198
Extremitatea unui arc 217
Extremitățile unui drum 256
e^z 155

Factorii produsului infinit 92
Familie compactă (normală) de funcții 417
— de vecinătăți echivalente 188
Formula lui Parseval 399
— — Rodrigues 525
Funcția algebrică 28
— armonică 121
— ciclometrică (arc sin z, arc cos z) 167
— — (arc tg z, arc cotg z) 174
— circulară (si z, cos z) 160
— — (tg z, cotg z) 169
— constantă 431
— continuă 31
— convergentă într-un punct 35
— convexă 411
— de o variabilă complexă 26
— depinzînd de un parametru 111
— — — — — convergentă 112
— diferențiabilă 113
— — într-un punct 35
— elementară 151
— exponențială 154
— gama 571
— generatoare a polinomului lui Legendre 562
— hiperbolică 175
— inversă 552
— — locală 552
— irațională 27
— întreagă 429
— limită a unei funcții depinzînd de un parametru 111
— lui Legendre 398
— mărginită într-un punct 38
— meromorfă 431
— — transcendentă 431
— monogenă 116
— multiformă 26
— olomorfă 120
— p-valentă 128
— rațională 28, 431
— transcendentă 27, 429
— uniformă 26, 419
— uniform mărginită 315
— univalentă 128
— $\zeta(z)$ a lui Riemann 579

Generalizarea teoremei lui Hardy și Littlewood 580
— — reziduurilor 438

Grupul topologic al homeomorfismelor unui spațiu cu vecinătăți 187

Homeomorfisme 187

Indicatorul logaritmic 529
Inegalitatea lui Cauchy 400
— — Gutzmer 399
— — Jensen 407
Inel 242
Interiorul unei mulțimi 189
Integrala curbilinie 283
— improprie 323
— lui Euler de specia I-a 354, 572
— — — — — II-a 354
— — Fresnel 443
— nedefinită 301
— Stieltjes 278
— uniform convergentă 325
Integralele lui Mehler-Dirichlet 527
Integrarea unei funcții raționale de cos și sin 330
Inversiunea 142

Închiderea unei mulțimi 22

Lema lui Alexander 230
— — Jensen 581
— — Schwartz 401
— — Töplitz 87
— — Weierstrass 370
Limita unei funcții 29
— — — compuse 41
— — — depinzînd de un parametru 111
— unui șir infinit de puncte 35
Linie frîntă 224
— poligonală 224
— — ce traversează o semidreaptă 225
— — — un poligon 228
— — înscrisă 262
log z 157
Lungimea unui drum 262

Maximul absolut 43
— realtiv 43
Metrică 196
Modul de periodicitate 303
Modulul unui număr complex 15
Multiplicitatea zerourilor unei funcții 154
— unui punct 256
Mulțime compactă 195
— conexă 205
— convexă 246
— densă în sine 190
— — — spațiu 190
— derivată 22, 190
— deschisă 22, 190
— discretă 190
— ε-conexă 209
— izolată 190
— înlănțuită 209
— mărginită 23
— perfectă 190
Mulțimi topologic echivalente 187

Natura seriei 52
Noduri 218, 256
Norma unui număr complex 15
Număr complex 13
— imaginar 14
— pur imaginar 14
Numere complexe conjugate 15
Numerele lui Bernoulli 385, 450
— — Euler 388

Omotetie 139
Ordin de conexiune 236
Ordinul unei funcţii întregi 431
— unghiular al unei curbe închise 276
— unui pol 425
— — zero al unei funcţii olomorfe 376
Ovală 249

Parametru normal 255
Partea principală a unui punct singular 423
Partiţie închisă a unei mulţimi 205
Plan euclidean 188
Planul lui Gauss 23, 188
Pol 151, 425
Poligon 224
— simplu 224
Polinoamele lui Bernoulli 514
— — Cebîşev 517
— — Hermite-Cebîşev 515
— — Iacobi 522
— — Laguerre 528
— — — (generalizate) 528
— — Legendre 396, 524, 562
Polinomul 27, 429
Polul unei asemănări 140
Principiul de identitate pentru funcţiile olomorfe într-un domeniu 375
Principiul maximului modulului 400
— minimului — 401
— variaţiei argumentului 535
Produs canonic 570
— cartezian 27
— infinit 92
— — absolut convergent 98
— — convergent 92
— — divergent 92
— — dublu 92
— — oscilator 92
— — simplu 92
Produse parţiale 92
Produsul lui Cauchy 90
— seriilor 69
Proecţie stereografică 24
Proprietăţi intrinsece 205
Punct aderent 22, 189
— critic 153
— — algebric al unei funcţii 153, 553
— — — de ordin p 530
— — — — — p al funcţiei inverse 533
— — al unei funcţii 153
— — polar 154, 554
— de convergenţă al unei funcţii depinzînd de un parametru 112
— — discontinuitate 31
— — divergenţă al unei funcţii depinzînd de un parametru 112
Puncte duble ale unei transformări 139
— separate de o mulţime 212
Punct exterior 22, 189
— frontieră 22, 189
— — accesibil 250
— — liniar accesibil 212
— — barat 251
— impar faţă de un poligon 225
— interior 22, 189
— izolat 189
— limită 22, 189
— liniar accesibil 212
— multiplu 256
— par faţă de un poligon 225
— regulat 419
— singular 419
— — esenţial (izolat) 425
— unghiular 276

Ramurile unei funcţii 153
Raportul unei asemănări 140
— — omotetii 139
Regiune 22
Reprezentări conforme 130
— continue 187
Reziduu 433
Rotaţia 140
— drumului orientat 274
— unui drum faţă de un punct 274
R-vecinătate 204

Secţiune în sens Dedekind 222
Sens de parcurs pe un arc 219
— direct faţă de interiorul unei curbe 278
— — — — exteriorul — — 278
Seria hipergeometrică 382
— lui Gudermann 574
— — Lagrange 557
— — Laurent 413
— ce converge cel puţin tot aşa de repede ca alta 61
— — diverge cel puţin tot aşa de repede ca alta 61
— — — mai repede ca alta 61
— convergentă 47
— dublă 46
— — sumată după diagonale 47
— — — — pătrate 47
— oscilatoare 47
— simplă 46
— de puteri 339
— factoriale de specia I-a 577
Seriile lui Lambert 389
Serii simple orizontale 48
— — verticale 48
Simpla conexiune 236
Sfera lui Riemann 188
sh z 175
Simbolul lui Möbius 391
Simetrie faţă de cercuri şi drepte 142
Singularităţi izolate 422
— — de specia I 422
— — — — S 422
— removibile (aparente) 424
sin z 160

Soluţii conjugate ale unei ecuaţii 122
Spaţiu bicompact 199
— cu vecinătăţi 187
— — — subordonat 187
— metrizabil 196
— normal 204
— topologic 187
Structura topologică a unui spaţiu 187
Subdrum 256
Suma drumurilor 257
Sumarea seriei după cuburi 47
— — — diagonale 47
— — — pătrate 47
Suma seriei 47
Sumele parţiale ale unei serii 47

Şir de funcţii 308

Tangentele frontierei unui domeniu convex 248
Tăietură 153, 217, 236
— cu un capăt 236
Teorema a 2-a a lui Abel 347
— — 3-a a lui Abel 349
— celor 3 cercuri (Hadamard) 410
— de invarianţă a domeniilor 548
— — — a lui Brouwer 244
— fundamentală a algebrei 529
— — — lui Cauchy 292
— întîia a lui Abel 339
— locală a funcţiilor inverse 553
— lui Abel 91, 312
— — Bolzano-Weierstrass 195
— — Cantor 215
— — Carathéodory 412
— — Casorati-Weierstrass 427
— — Cauchy 53, 55, 100, 300, 342
— — D'Alembert 424
— — Dedekind 313
— — Dirichlet 313
— — Du Bois Raymond 313
— — Euler 87
— — Gauss 425
— — Hadamard 345
— — Hardy şi Littlewood 356
— — Hausdorff 188
— — Heine 43
— — Heine-Borel-Lebesgue 199
— — Hurwitz 540
— — Janiszewski 213
— — Landau 578
— — Leibnitz 79, 83
— — Lindelöf 404
— — Liouville 424, 429, 431
— — Littlewood 359
Teorema lui Markov 85
— — Mertens 91
— — Mittag-Leffler 564
— — Montel 417
— — Morera 307, 310
— — Olivier 55
— — Peano 217
— — Porter 316
— — Raabe 64
— — Riemann 76
— — Rouché 530, 538
— — Saxer 547
— — Schlömilch 64
— — Schönfliess 251
— — Sierpinski 213
— — Weierstrass 75, 78, 333, 568
— — Wolff-Namura 551
— reziduurilor 436
Teoria funcţiilor de o variabilă complexă 12
Termenii unei serii 46
th z 175
tg z 169
Topologia unui spaţiu 187
Transformări antiliniare 134
— conforme directe 130
— — indirecte 130
— involutive
— liniare 134
— — eliptice 141
— — fracţionare 139
— — hiperbolice 141
— — întregi 139
— — loxodromice 141
— — parabolice 140
— regulate 125
— — în sens larg 129
Translaţie 139
Transversală de specia I 236
— — — II 236
— într-un domeniu 236

Unghi de rotaţie al unei asemănări 140

Valoarea principală a unei integrale 329
Variaţie mărginită 263
Vecinătate 21
Vecinătatea unui punct abstract 30
Vecinătate sferică 21
Vîrf al unui domeniu convex 248

Weierstrass Umordnungsatz 74

z^a 195
zero al unei funcţii olomorfe 376

Indice de autori

Abel 62, 80, 81, 91, 311, 312, 336, 338, 339, 347, 348, 349, 351, 369, 377, 380, 381, 382, 384
Alexander 230
Argand 18

Bernoulli 25, 129, 385, 386, 456, 507, 509, 514,
Bolzano 76, 195
Borel 199, 301
Bouquet 11
Briot 11
Brouwer 129, 244

Cantor 213, 215, 294
Caraman 6, 12
Carathéodory 412
Casorati 427, 428
Cauchy 11, 33, 53, 54, 55, 56, 57, 63, 80, 90, 91, 95, 100, 108, 109, 110, 116, 117, 118, 122, 123, 131, 155, 291, 292, 293, 299, 300, 301, 305, 309, 310, 311, 315, 317,319, 324, 328, 342, 343, 345, 348, 349, 350, 353, 370, 372, 382, 394, 395, 399, 400, 401, 413, 416, 428, 429, 433, 436, 447, 457, 528, 534, 537, 538, 568, 569, 573, 581, 582
Cebîşev 515, 517, 522
Cesaro 106
Climescu 6

D'Alambert 63, 67, 343, 366, 395, 424, 535, 540,
Darboux 288
Dedekind 81, 82, 222, 313
De la Vallée-Poussin 321, 323, 547, 558
Descartes 544
Dirichlet 52, 81, 313, 335, 338, 339, 363, 366, 369, 385, 505, 527, 578
Du Bois Reymond 81, 312, 366, 578

Ermakof 59, 109
Euclid 23
Euler 87, 156, 161, 330, 354, 388, 389, 507, 509, 571, 572, 575, 577

Fatou 349, 387
Fréchet 193,
Fresnel 443

Gauss 5, 7, 8, 18, 21, 23, 24, 43, 65, 66, 77, 78, 128, 135, 136, 152, 187, 188, 189, 200, 201, 208, 212, 256, 258, 262, 380, 396, 422, 423, 424, 425, 431, 530, 533, 535, 548, 571, 575
Goursat 295
Gudermann 575, 575, 576, 577
Gutzmer 399, 415

Hadamard 62, 345, 346, 410, 411
Hausdorff 188, 193, 255, 257
Hardy 356, 580
Heine 43, 44, 202, 301, 515, 517
Hermite 515
Hurwitz 540, 547, 551

Iacobi 522, 524

Janiszewski 213, 232, 234, 257, 258
Jensen 45, 407, 408, 581
Jentzsch 415
Jordan 233, 235, 242, 243, 244, 248, 250, 251, 254, 258, 263, 264, 265, 266, 278, 280, 283, 284, 285, 286, 298, 290, 292, 293, 298, 300, 301, 302, 303, 304, 305, 307, 421, 429, 528

Karamata 356
Kepler 542, 559
Knopp 66, 389
Kronecker 54, 105
Kummer 7, 66, 67, 89, 111
Kuratowski 540

Lagrange 20, 557, 559, 560
Laguerre 528
Lambert 389, 390, 391
Landau 578
Laplace 11, 121, 526, 527
Laurent 5, 9, 333, 392, 413, 414, 415, 419, 420, 424, 426, 432, 434, 437, 455, 462
Lebesgue 202, 266, 300, 301
Legendre 396, 398, 524, 562
Leibnitz 79, 83, 395, 435, 515, 516, 528, 562,
Levy 77
Lindelöf 402, 404, 405, 409
Liouville 424, 429, 430, 431,
Littlewood 353, 356, 359, 361, 580

Mac Laurin 50, 382
Mac Robert 511, 514,
Malmstén 82
Markoff 76, 85, 86
Markuşievici 546
Mascheroni 58, 509, 571, 572
Mayer 5
Mehler 527
Mertens 91
Mittag-Leffler 564, 567, 570
Möbius 23, 147, 391, 579
Moivre 17
Montel 5, 9, 300, 415, 417
Morera 307, 321, 334, 128
Morse 540

Namura 551
Negoescu 6

Olivier 55, 396

Parseval 341, 398, 399
Peano 217, 255, 262
Picard 427, 428
Pollard 295
Pringsheim 62, 94, 95, 109, 295
Ptolemeu 24, 149

Raabe 64, 65, 66, 67
Riemann 7, 11, 21, 24, 43, 76, 77, 188, 280, 281, 287, 300, 321, 422, 539, 579
Rodrigues 525, 526, 562
Rolle 520, 523, 544, 562
Rouché 530, 533, 538, 539, 540, 541, 544, 545, 546, 547, 548, 553, 554

Saxer 547, 563
Schlömilch 56, 64, 108
Schönfliess 251
Schwartz 154, 401, 402, 407, 409, 412, 415
Sohoţki 427
Steinitz 77
Stieltjes 9, 278, 280, 281, 284, 285
Stirling 512, 513, 575

Tauber 349, 350, 351, 353, 358, 360
Taylor 5, 9, 12, 166, 333, 359, 374, 432, 434
Tietze 204
Titchmarsh 359
Töplitz 45, 87, 88

Urysohn 198

Vitali 9, 415, 417

Weierstrass 12, 13, 23, 42, 75, 76, 78, 84, 85, 86, 87, 195, 288, 310, 319, 320, 333, 340, 356, 362, 370, 371, 384, 390, 399, 427, 428, 551, 556, 565, 568, 570, 571, 577
Weil A. 193
Wessel 18
Wolff 551

O. MAYER, *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă* — (Theory of Functions of a Complex Variable), Editura Academiei R.S.R., 1981, p. 592.

Contents

Introduction 11

Chapter I. Complex variable. Functions. Limits. Continuity. Series and infinite products

Complex numbers and variables

1. Definition of complex numbers. Cartesian form 13
2. Trigonometric form of a complex number 15
3. Geometric representation of a complex number 18
4. Inequalities for moduli 19
5. The complex variable. Gauss plane and Riemann sphere 21

Problems 25

Functions. Limits. Continuity.

6. The concept of functions of complex variables (in general) 26
7. The concepts of limit and continuity 29
8. Some theorems on the definition domain of a function 31
9. Cauchy's criterium 33
10. Limit of an infinite sequence 35
11. Operations with limits for moduli and arguments 37
12. Operations with limits for several functions and aplications to the continuity 40
13. Uniform continuity 42

Problems 45

Convergence of series and infinite products

14. Series (general properties) 46
15. Operations with series 50
16. Nature of a series 52
17. Necessary conditions 54
18. Criteria of convergence and divergence for simple series with positive terms .. 56
19. Comparison criteria 60
20. Kummer's criterium 66
21. Criteria of convergence of multiple series with positive terms 68
22. Absolute convergence of series 71
23. Weierstrass' theorem 78
24. Criteria of convergence for a series 79
25. Transformation of simple series 85
26. The product of two convergent series 90
27. Infinite products (general properties) 92
28. General criteria of convergence for infinite products 94
29. Criteria of convergence for simple infinite products with positive factors that are greater or smaller than 1 97
30. Absolute convergence of infinite products 98
31. General criteria of convergence for a product 100

Problems 102

Convergence of functions depending on a parameter and especially on series and infinite products of functions

32. Introduction 111

Chapter II. The concept of holomorphic function of a variable and plane conformal mappings. Elementary functions.

Monogeneity (derivability)

33. Differentiability 113
34. Derivative of a function of complex variable 116
Problems 122

Mapping defined by a holomorphic function

35. Inverse function 125
36. Domain transformation 127
37. Conformal mappings (general properties) 129
Problems 132

Linear transformations (homography)

38. General properties 134
39. Lines and circles in Gauss plane. Their invariance under linear transformation 135
40. Fixed points. Classification of linear transformations 139
41. Symmetry with respect to lines and circles 142
42. Conformal mappings of discs onto discs 145
43. Groupal properties of linear and antilinear transformations 147
Problems 148

Elementary functions

44. The functions z^n (entire n), $\sqrt[n]{z}$ (entire $n > 1$). Polynomials and rational functions 151
45. e^z (exponential function) 154
46. The (exponential) function $\log z$ 157
47. The functions a^z and z^α 159
48. Circular functions $\cos z$ and $\sin z$ 160
49. Cyclometric functions $\arccos z$ and $\arcsin z$ 167
50. Circular functions $\operatorname{tg} z$ and $\operatorname{ctg} z$ 169
51. Cyclometric functions $\operatorname{arc\,tg}\, z$ and $\operatorname{arc\,ctg}\, z$ 174
52. Hyperbolic functions 175
Problems 176

Chapter III. Introduction in the topology of Gauss plane

53. Spaces with neighbourhoods 187
54. Fundamental topological concepts (in $\mathcal{U}$ spaces) 189
55. Compact spaces 195
56. Topology in metrizable spaces 196
57. Continuous mappings and homeomorphisms 199
58. Applications to the continuity of functions 201
59. Distance between sets 202
60. Connectivity. Continua and domains 205
61. Components 211
62. Curves 214
63. Polygons and polygonal domains in C and $\bar{C}$ 224
64. Lemmas of separation 229
65. Domains bounded by simple curves 233
66. Connectivity of domains 236
67. Domains bounded by closed simple curves 242
68. Topological invariance of open sets (in C and $\bar{C}$) 243
69. Convex sets 246
70. Accessibility 250
Problems 253

Chapter IV. **The theory of integration in the complex domain**

71. Paths and curves in the complex plane 255
72. Stieltjes integrals 278
73. Curvilinear integrals in the complex plane 283
74. Cauchy's fundamental theorem 292
75. Indefinite integrals 301
76. Cauchy's integral 305
77. Uniform convergence and its applications 307
Problems 327

Chapter V. **Expansions in Taylor and Laurent series**

78. Series of holomorphic functions 333
79. Power series 339
Problems 361
80. Operations with power series 370
81. Expansions in Taylor series of a holomorphic function 373
82. Expansion in Taylor series of elementary functions 376
83. The maximum modulus principle 398
84. Laurent series 413
85. Vitali and Montel theorems 415

Chapter VI. **Singular points of uniform functions. Residues**

86. General properties 419
87. Poles 425
88. Esential isolated singular points. Meromorphic functions 427
89. Residue method and its applications 433
Problems 478
90. Special polynomials and generating functions 514
91. Logarithmic indicator 528
92. Applications to the transformation domains by a function of complex variable 532
93. Principle of argument variation 534
94. Topological properties of a mapping produced by a meromorphic function 543
95. Local inverse of a meromorphic function 552
96. Extension of meromorphic functions in series of rational functions 563
97. Extension of entire functions in infinite (canonical) products 567
98. Function Γ 571
99. Function $\Gamma(z)$ 574
Annex 579
Subject index 583
Author index 587

Redactor: LUMINIȚA ZORILESCU
Tehnoredactor: MAGDALENA IACOB
Coperta de: AURELIAN PETRESCU

Bun de tipar: 13 III 1981. Format: 16/70 × 100 G/m².
Coli de tipar: 37.
C. Z. pentru biblioteci mari. } *51753*
C. Z. pentru biblioteci mici. }

Tiparul executat sub comanda
nr. 1275 la
Întreprinderea poligrafică
„13 Decembrie 1918",
str. Grigore Alexandrescu nr.89—97
București
Republica Socialistă România